

Rencontre ANR SING

Toulouse, IMT, Salle Cavaillès (1R2-132)

12-14 juin 2023

	Lun 12	Mar 13	Mer 14
9:30-10:30	Ignat	Lamy	Canevari
11:00-12:00	Oliver Bonafoux	Bétermin	Monteil
15:00-16:00	Rota Nodari		

Lundi 12 juin

9:30-10:30. Radu Ignat

Minimalité des solutions vortex pour la fonctionnelle de Ginzburg-Landau

Cet exposé porte sur les solutions vortex dans des systèmes de type Ginzburg-Landau dépendant d'un paramètre $\epsilon > 0$ dans la boule unité B^N . Le but est de montrer la minimalité de la solution symétrique $u: B^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ correspondant au vortex de degré un. Nous établissons cette minimalité en dimension $N \geq 7$ pour tout ϵ . En dimension $2 \leq N \leq 6$, pour $u: B^N \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$, nous montrons un résultat de dichotomie entre la minimalité de la solution vortex "non-escaping" (cad, confinée dans $\mathbb{R}^N \times \{0\}$) et les solutions de vortex "escaping" dans la $N + 1$ direction selon le paramètre ϵ . Enfin, nous discutons aussi la minimalité de la solution vortex dans le modèle Ginzburg-Landau pour des champs gradients (aussi appelé Aviles-Giga).

11:00-12:00. Ramon Oliver Bonafoux

Ondes progressives hétéroclines dans des systèmes Allen-Cahn paraboliques en dimension deux.

Sous certaines hypothèses, j'ai démontré l'existence d'ondes progressives $w : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) pour les systèmes du type Allen-Cahn parabolique

$$\partial_t w - \Delta w = -\varepsilon^{-2} \nabla_u V(w) \text{ in } [0, +\infty) \times \mathbb{R}^2,$$

qui satisfont certaines conditions *hétéroclines* à l'infini. L'onde progressive w se propage au long de l'axe horizontal suivant une vitesse c^* et un profil \mathfrak{U} . Lorsque $x_1 \rightarrow \pm\infty$, le profil \mathfrak{U} connecte (dans un certain sens) deux orbites hétéroclines unidimensionnelles qui ont des énergies *différentes* et minimise une énergie à poids exponentielle dans une certaine classe de fonctions. Je vais présenter le résultat d'existence, puis discuter les liens avec le problème du comportement asymptotique des solutions lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, qui est encore largement ouvert pour les systèmes Allen-Cahn.

15:00-16:00. Simona Rota Nodari

Sur une équation de Schrödinger non-linéaire : unicité, non-dégénérescence et applications.

Dans cet exposé, après avoir énoncé un résultat concernant l'unicité et la non-dégénérescence des solutions radiales positives d'une classe d'équations elliptiques semi-linéaires, je m'intéresserai au cas particulier d'une équation de Schrödinger avec une non-linéarité donnée par une différence de puissances, i.e. $g(u) = u^q - u^p - \mu u$ pour $p > q > 1$ et μ une constante positive. Dans ce cas, la non-dégénérescence de l'unique solution positive permet d'en analyser le comportement dans différents régimes du paramètre μ . Ceci donne l'unicité des minimiseurs de l'énergie à norme L^2 fixée et la stabilité (orbitale) de u_μ dans certains régimes. Mon exposé est basé sur un travail en collaboration avec Mathieu Lewin.

Mardi 13 juin

9:30-10:30. Xavier Lamy

Autour de l'énergie de Ginzburg-Landau anisotrope

Considérons, pour des applications $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, l'énergie

$$GL_\varepsilon^\delta(u; \Omega) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\delta}{2} [(\operatorname{div} u)^2 - (\operatorname{curl} u)^2] + \frac{1}{4\varepsilon^2} (1 - |u|^2)^2 dx.$$

En présence d'une anisotropie $\delta \in (-1, 1)$ non nulle, de nombreux outils classiques pour l'analyse des minimiseurs et points critiques de GL_ϵ^δ ne sont plus applicables, et de nouveaux phénomènes apparaissent. Je présenterai quelques résultats et problèmes liés aux profils de vortex dans \mathbb{R}^2 (solutions entières de l'équation d'Euler-Lagrange), et au problème limite $\epsilon = 0^+$ où u est à valeurs dans \mathbb{S}^1 .

11:00-12:00. Laurent Bétermin

Interactions et cristaux optimaux

Le but de cet exposé est de récapituler brièvement différents résultats de cristallisation pour des potentiels à symétrie radiale ou avec contraintes angulaires, majoritairement dans le plan, expliquant l'émergence de réseaux triangulaires, carrés ou en nid d'abeille. L'idée est à la fois de montrer la complexité du problème de cristallisation et de faire naître une discussion entre nous concernant de possibles phénomènes nouveaux (plutôt à caractères non-radial). Du potentiel de Heitmann-Radin à la conjecture d'universalité optimale du réseau triangulaire (et son lien avec la conjecture d'Abrikosov) en passant par des interactions de masses et le potentiel de Lennard-Jones, différents exemples seront discutés afin d'éventuellement relier des techniques ou résultats connus avec des problèmes qui pourraient émerger de notre projet de recherche.

Mercredi 14 juin

9:30-10:30. Giacomo Canevari

Applications à valeurs dans le tore et problème de Plateau pour les courants vectoriels

Dans cet exposé, nous nous intéressons aux applications à valeurs dans le tore plat de dimension k et aux courants vectoriels (à k composantes), en codimension un. En effet, il existe un lien entre certains problèmes variationnels ou topologiques pour les applications à valeurs dans le tore (minimisation de la seminorme $W^{1,1}$ dans une classe des fonctions à singularités prescrites, problèmes de relèvement) et le problème de Plateau pour les courants normaux ou intégraux. Ce lien peut être exploité pour démontrer certaines inégalités pour les courants... mais il reste des questions grand ouvertes en

codimension supérieure. Cet exposé est basé sur un travail en collaboration avec Van Phu Cuong Le (Verona).

11:00-12:00. Antonin Monteil

Quelques questions à propos des skyrmions magnétiques

Les Skyrmions sont des singularités ponctuelles présentes dans les couches ferromagnétiques minces en présence d'un type d'interaction antisymétrique appelé "Intéraction de Dzialoszynski-Moriya" (DMI). Une propriété particulièrement intéressante, c'est qu'ils portent un degré topologique non nul en tant qu'application d'un domaine 2D à valeurs dans la sphère \mathbb{S}^2 . Un modèle très simple comprenant l'énergie d'échange (énergie de Dirichlet) et le terme DMI suffit à les décrire dans un domaine borné avec donnée de Dirichlet ; dans le cas du plan tout entier, on a besoin d'un potentiel de confinement qui a un sens physique (anisotropie, énergie de Zeeman...). On peut en effet montrer l'existence de minimiseurs avec condition de degré +1 (ou -1 selon la donnée au bord / à l'infini). Il existe une solution équivariante (solution à symétrie radiale) dont on sait qu'elle est stable, mais il n'est pas clair qu'il s'agit du minimiseur global. Par ailleurs, on ne sait pas grand chose des éventuelles configurations de degré supérieurs. Nous parlerons dans cet exposé de ces modèles élémentaires et de quelques questions associées.

11:30-12:30