

Principe du maximum pour le titre massique vapeur d'un écoulement diphasique

Gauthier Lazare^{a,b}

Directeur de thèse : Philippe Helluy^b

a - EDF R&D, Chatou, France

b - IRMA, Strasbourg, France

24 Octobre 2023



- 1 Système étudié
- 2 Méthodes numériques
 - Schémas Numériques
 - Discrétisation avec le schéma QG
 - Discrétisation avec le schéma QRd
 - Discrétisation avec le schéma QRq
- 3 Simulation et validation
- 4 Ajout d'un terme de production
- 5 Conclusion & Perspectives

1- Système étudié

- 1 Système étudié
- 2 Méthodes numériques
 - Schémas Numériques
 - Discrétisation avec le schéma QG
 - Discrétisation avec le schéma QRd
 - Discrétisation avec le schéma QRq
- 3 Simulation et validation
- 4 Ajout d'un terme de production
- 5 Conclusion & Perspectives

Introduction

On considère un écoulement diphasique de débit de mélange \mathbf{q} et de masse volumique ρ , déséquilibré en vitesse¹ : vitesse relative entre phases $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l$, débit relatif $\mathbf{q}_r = \rho \mathbf{u}_r$.

On s'intéresse à l'évolution instationnaire (sur une période $[0, T]$) du titre massique y en vapeur transporté par le débit $\mathbf{q}_g = \mathbf{q} + (1 - y)\mathbf{q}_r$ et qui tend à revenir à l'équilibre thermodynamique \bar{y} au bout d'un temps de relaxation τ .

1. L. Gastaldo, R. Herbin, J.C. Latché, *IMA Journal of Applied Mathematics* **31**,2011

Equations du problème

Les équations étudiées sont donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \mathbf{q} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho y)}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (y\mathbf{q}) + \underline{\nabla} \cdot (y(1-y)\mathbf{q}_r) &= \rho \frac{\bar{y} - y}{\tau} \end{aligned} \quad (1)$$

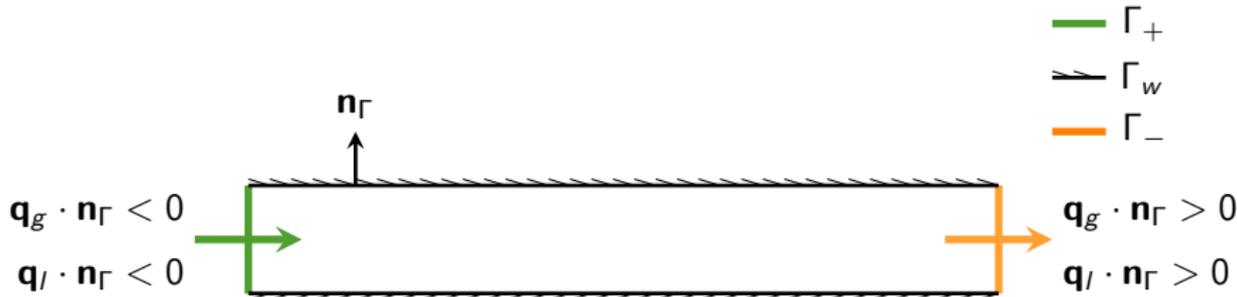
Avec les fonctions $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{q}_r(\mathbf{x}, t)$, $\tau(\mathbf{x}, t)$, $\bar{y}(\mathbf{x}, t)$ fournies en données d'entrée.

Domaine étudié

L'écoulement a lieu sur un domaine Ω , délimité par la surface Γ de normale sortante n_Γ avec :

$$\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_w \cup \Gamma_- \text{ où : } \begin{cases} \Gamma_+ = \{ \mathbf{x} \in \Gamma, \mathbf{q}_g \cdot \mathbf{n}_\Gamma < 0 \text{ ou } \mathbf{q}_l \cdot \mathbf{n}_\Gamma < 0 \} \\ \Gamma_w = \{ \mathbf{x} \in \Gamma, \mathbf{q}_g \cdot \mathbf{n}_\Gamma = 0 \text{ et } \mathbf{q}_l \cdot \mathbf{n}_\Gamma = 0 \} \\ \Gamma_- = \Gamma \setminus (\Gamma_+ \cup \Gamma_w) \end{cases} \quad (2)$$

Exemple de domaine 1 :



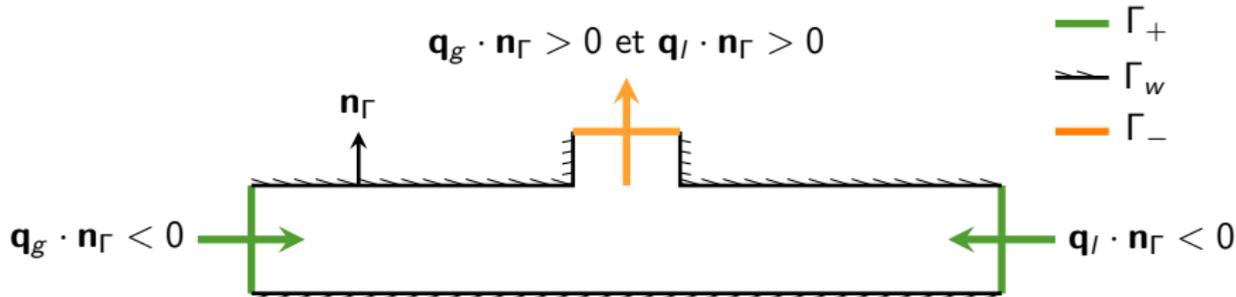
$$\begin{aligned} \mathbf{q}_g &= \mathbf{q} + (1 - y)\mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_l &= \mathbf{q} - y\mathbf{q}_r \end{aligned} \quad (3)$$

Domaine étudié

L'écoulement a lieu sur un domaine Ω , délimité par la surface Γ de normale sortante n_Γ avec :

$$\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_w \cup \Gamma_- \text{ où : } \begin{cases} \Gamma_+ = \{ \mathbf{x} \in \Gamma, \mathbf{q}_g \cdot \mathbf{n}_\Gamma < 0 \text{ ou } \mathbf{q}_l \cdot \mathbf{n}_\Gamma < 0 \} \\ \Gamma_w = \{ \mathbf{x} \in \Gamma, \mathbf{q}_g \cdot \mathbf{n}_\Gamma = 0 \text{ et } \mathbf{q}_l \cdot \mathbf{n}_\Gamma = 0 \} \\ \Gamma_- = \Gamma \setminus (\Gamma_+ \cup \Gamma_w) \end{cases} \quad (2)$$

Exemple de domaine 2 :



$$\begin{aligned} \mathbf{q}_g &= \mathbf{q} + (1 - y)\mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_l &= \mathbf{q} - y\mathbf{q}_r \end{aligned} \quad (3)$$

Principe du maximum continu

Conditions suffisantes^{1 2} :

- Masse volumique telle que $\rho(\mathbf{x}, t) > 0$
(assuré quand $\mathbf{u} = \mathbf{q}/\rho \in \mathcal{L}^\infty(\Omega \times [0, T])$) et avec des conditions initiales et limites sur Γ_+ positives),
- Conditions initiales telles que $y(\mathbf{x} \in \Omega, t = 0) \in [0, 1]$,
- Conditions limites telles que $y(\mathbf{x} \in \Gamma_+, t) \in [0, 1]$,
- Lois de fermeture telles que $\tau(\mathbf{x}, t) > 0$ et $\bar{y}(\mathbf{x}, t) \in [0, 1]$,
- $\frac{1}{\rho} \left((1 - 2y) \underline{\nabla} \cdot \mathbf{q}_r + 2\mathbf{q}_r \cdot \underline{\nabla} y \right) \in \mathcal{L}^\infty(\Omega \times [0, T])$.

-
1. R. Lewandowski, B. Mohammadi, *Math. Mod. and Meth. in App. Science* **03**, 1993
 2. T.H. Gronwall, *Annals of Mathematics* **20**, 1919

2- Méthodes numériques

- 1 Système étudié
- 2 Méthodes numériques
 - Schémas Numériques
 - Discrétisation avec le schéma QG
 - Discrétisation avec le schéma QRd
 - Discrétisation avec le schéma QRq
- 3 Simulation et validation
- 4 Ajout d'un terme de production
- 5 Conclusion & Perspectives

2.1- Schémas Numériques

Définitions

Le domaine Ω est séparé en N mailles $(\Omega_i)_{i \in [1, N]}$. Les équations sont intégrées sur chaque maille Ω_i . Les notations suivantes sont adoptées :

- θ_i^n la valeur approximée de θ sur la maille i au pas de temps n ,
- ω_i le volume de la maille i ,
- $j \in v(i)$ les voisins de la maille i ,
- S_{ij} la surface délimitant la maille i et la maille j ,
- \mathbf{n}_{ij} le vecteur normal à la surface S_{ij} sortant de la maille i vers la maille j ,
- $q_{ij}^* = \mathbf{q}_{ij}^* \cdot \mathbf{n}_{ij}$ le débit de mélange normal entre la maille i et la maille j ,
- $(q_r)_{ij}^* = (\mathbf{q}_r)_{ij}^* \cdot \mathbf{n}_{ij}$ le débit relatif normal entre la maille i et la maille j .
- $(q_g)_{ij}^* = (\mathbf{q} + (1 - y)\mathbf{q}_r)_{ij}^* \cdot \mathbf{n}_{ij}$ le débit du gaz normal entre la maille i et la maille j .

Avec les débits pris au temps $t^* \in [t^n, t^{n+1}]$.

Conservation de la masse

Le schéma pour la conservation de la masse est le suivant :

$$\omega_i(\rho_i^{n+1} - \rho_i^n) + \Delta t^n \sum_{j \in v(i)} S_{ij} q_{ij}^* = 0 \quad (4)$$

Equation du titre - discrétisation 1/2

- Discrétisation temporelle :

$$\begin{aligned} \left((\rho y)_i^{n+1} - (\rho y)_i^n \right) \omega_i &= \rho_i^n (y_i^{n+1} - y_i^n) \omega_i + y_i^{n+1} \underbrace{(\rho_i^{n+1} - \rho_i^n) \omega_i}_{= -\Delta t^n \sum_{j \in v(i)} S_{ij} q_{ij}^*} \end{aligned} \quad (5)$$

- Terme source de retour à l'équilibre :

$$\int_{\omega_i} \rho \frac{\bar{y} - y}{\tau} d\Omega \approx \rho_i^* \frac{\bar{y}_i^* - y_i^{n+1}}{\tau_i^*} \omega_i \quad (6)$$

On prendra par la suite : $\rho_i^* = \rho_i^n$, $\bar{y}_i^* = \bar{y}_i^n$, $\tau_i^* = \tau_i^n$.

Equation du titre - discrétisation 2/2

Pour la convection, deux méthodes différentes peuvent être utilisées :

- **Méthode 1 (méthodologie débit de gaz QG)** - Assembler les termes de convection ensemble :

$$\underline{\nabla} \cdot (y\mathbf{q}) + \underline{\nabla} \cdot (y(1-y)\mathbf{q}_r) = \underline{\nabla} \cdot (y\mathbf{q}_g) \quad (7)$$

Un seul schéma, noté QG, avec schéma amont implicite selon le débit de gaz est présenté.

- **Méthode 2 (méthodologie débit relatif QR)** - Traiter chaque terme séparément. Le terme de débit de mélange est discrétisé avec un schéma amont implicite. Deux schémas différents, notés QRd et QRq, sont présentés pour le terme de débit relatif.

2.2- Discrétisation avec le schéma QG

Schéma sur la maille i :

$$\begin{aligned} \rho_i^n \omega_i (y_i^{n+1} - y_i^n) - \Delta t^n \sum_{j \in \nu(i)} S_{ij} q_{ij}^* y_i^{n+1} \\ + \Delta t^n \sum_{j \in \nu(i)} S_{ij} (q_g)_{ij}^* \left\{ \text{sg}_{ij}^g y_i^{n+1} + (1 - \text{sg}_{ij}^g) y_j^{n+1} \right\} = \Delta t^n \rho_i^n \omega_i \frac{\bar{y}_i^n - y_i^{n+1}}{\tau_i^n} \end{aligned} \quad (8)$$

Avec la notation $\text{sg}_{ij}^g = \text{sg}((q_g)_{ij}^*)$.

Principe du maximum - schéma QG

Conditions suffisantes pour vérifier le principe du maximum au temps t^{n+1} :

- Lois de fermeture telles que $\tau_k^n > 0$ et $\bar{y}_n^k \in [0, 1], \forall k \in [1, M]$,
- Conditions initiales telles que $y_k^n \in [0, 1], \forall k \in [1, M]$,
- **Condition sur le pas de temps :**

$$(1 - y_i^n) + (1 - \bar{y}_i^n) \frac{\Delta t^n}{\tau} + \frac{\Delta t^n}{\rho_i^n \omega_i} \left[\sum_{j \in \nu(i)} S_{ij}(\mathbf{q}_r(1 - y))_{ij}^* \cdot \mathbf{n}_{ij} \right] \geq 0 \quad (9)$$

$$\forall i \in [1, M]$$

Remarque : La condition sur le pas de temps disparaît quand $\mathbf{q}_r = \mathbf{0}$!

Principe du maximum - conditions suffisantes 1/2

Le **système discret** peut se mettre sous la forme d'un **système matriciel** :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}^{n+1} = \mathbf{B} \text{ avec } \begin{cases} \mathbf{A} &= (a_{ij}) \\ \mathbf{B} &= (b_i) \\ \mathbf{Y}^n &= (y_i^n) \end{cases} \quad (10)$$

Le système discret pour $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{1} - \mathbf{Y}$ s'écrit :

$$\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{Y}}^{n+1} = \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{1} - \mathbf{B} \quad (11)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \hat{\mathbf{B}} &= (\hat{b}_i) & \text{où } \hat{b}_i &= \sum_j a_{ij} - b_i \\ \hat{\mathbf{A}} &= (\hat{a}_{ij}) & \text{où } \hat{a}_{ij} &= a_{ij} \\ \hat{\mathbf{Y}}^n &= (\hat{y}_i^n) & \text{où } \hat{y}_i &= 1 - y_i^n \end{cases} \quad (12)$$

Principe du maximum - conditions suffisantes 2/2

Conditions suffisantes sur le système discret pour vérifier le principe du maximum¹ :

$$\begin{aligned} \forall i \in [1, M], \quad & a_{ii} > 0 \\ & a_{ij} \leq 0, \quad j \in v(i) \\ & b_i \geq 0 \\ & \hat{b}_i \geq 0 \\ \Lambda_i = |a_{ii}| - \sum_{j \in v(i)} |a_{ij}| & > 0 \end{aligned} \tag{13}$$

1. R.S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, 2009

2.3- Discrétisation avec le schéma QRd

Schéma sur la maille i :

$$\begin{aligned} \rho_i^n \omega_i (y_i^{n+1} - y_i^n) + \Delta t^n \sum_{j \in v(i)} S_{ij} q_{ij}^* \left\{ (1 - \text{sg}_{ij}) (y_j^{n+1} - y_i^{n+1}) \right\} \\ + \Delta t^n \sum_{j \in v(i)} S_{ij} (q_r)_{ij}^* \left\{ \text{sg}_{ij}^r y_i^{n+1} (1 - y_j^n) + (1 - \text{sg}_{ij}^r) y_j^n (1 - y_i^{n+1}) \right\} \\ = \Delta t^n \rho_i^n \omega_i \frac{\bar{y}_i^n - y_i^{n+1}}{\tau_i^n} \end{aligned} \tag{14}$$

Avec les notations $\text{sg}_{ij} = \text{sg}(q_{ij}^*)$ et $\text{sg}_{ij}^r = \text{sg}((q_r)_{ij}^*)$.

Principe du maximum - schéma QRd

Conditions suffisantes pour vérifier le principe du maximum au temps t^{n+1} , quelque soit le pas de temps Δt^n :

- Lois de fermeture telles que $\tau_k^n > 0$ et $\bar{y}_n^k \in [0, 1], \forall k \in [1, M]$,
- Conditions initiales telles que $y_k^n \in [0, 1], \forall k \in [1, M]$,

Le schéma est donc inconditionnellement stable, **quelque soit le pas de temps**. Il est rigoureusement **conservatif en espace uniquement en stationnaire** ($y_i^{n+1} = y_i^n, i \in [1, M]$).

2.4- Discrétisation avec le schéma QRq

Schéma sur la maille i :

$$\begin{aligned} & \rho_i^n \omega_i (y_i^{n+1} - y_i^n) + \Delta t^n \sum_{j \in \nu(i)} S_{ij} q_{ij}^* \left\{ (1 - \text{sg}_{ij}) (y_j^{n+1} - y_i^{n+1}) \right\} \\ & + \Delta t^n \sum_{j \in \nu(i)} S_{ij} (q_r)_{ij}^* \left[\begin{array}{l} \text{sg}_{ij} \left\{ y_i^n (1 - y_i^{n+1}) (1 - \text{sg}_{ij}^r) + y_i^{n+1} (1 - y_i^n) \text{sg}_{ij}^r \right\} \\ + (1 - \text{sg}_{ij}) \left\{ y_j^n (1 - y_j^{n+1}) (1 - \text{sg}_{ij}^r) + y_j^{n+1} (1 - y_j^n) \text{sg}_{ij}^r \right\} \end{array} \right] \\ & = \Delta t^n \rho_i^n \omega_i \frac{\bar{y}_i^n - y_i^{n+1}}{\tau_i^n} \end{aligned} \tag{15}$$

Avec les notations $\text{sg}_{ij} = \text{sg}(q_{ij}^*)$ et $\text{sg}_{ij}^r = \text{sg}((q_r)_{ij}^*)$.

Principe du maximum QRq

Conditions suffisantes pour respecter le principe du maximum au temps t^{n+1} , quelque soit le pas de temps Δt^n :

- Lois de fermeture telles que $\tau_k^n > 0$ et $\bar{y}_n^k \in [0, 1], \forall k \in [1, N]$,
- Conditions initiales telles que $y_k^n \in [0, 1], \forall k \in [1, N]$,
- **Nouvelle condition** : Les débits \mathbf{q} et \mathbf{q}_r doivent respecter, quand $q_{ij}^* < 0$:

- Si $(q_r)_{ij}^* \geq 0$:

$$(q_r)_{ij}^*(1 - y_j^n) \leq |q_{ij}^*| \quad (16)$$

- Sinon, si $(q_r)_{ij}^* < 0$:

$$-(q_r)_{ij}^* y_j^n \leq |q_{ij}^*| \quad (17)$$

Remarque : La condition sur les débits est automatiquement vérifiée pour un écoulement co-courant.

3- Simulation et validation

- 1 Système étudié
- 2 Méthodes numériques
 - Schémas Numériques
 - Discrétisation avec le schéma QG
 - Discrétisation avec le schéma QRd
 - Discrétisation avec le schéma QRq
- 3 Simulation et validation
- 4 Ajout d'un terme de production
- 5 Conclusion & Perspectives

Cas stationnaire à paramètres constants

Pour un cas stationnaire unidimensionnel avec paramètres physiques $(\rho, q, q_r, \tau, \bar{y})$ constants et uniformes notés avec l'indice 0, l'équation sur le titre massique s'écrit :

$$\frac{\partial q^0 y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(q_r^0 y(1 - y)) = \frac{\rho^0(\bar{y}^0 - y)}{\tau^0} \quad (18)$$

Cas stationnaire à paramètres constants

Pour un cas stationnaire unidimensionnel avec paramètres physiques $(\rho, q, q_r, \tau, \bar{y})$ constants et uniformes notés avec l'indice 0, l'équation sur le titre massique s'écrit :

$$\frac{\partial q^0 y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(q_r^0 y(1 - y)) = \frac{\rho^0(\bar{y}^0 - y)}{\tau^0} \quad (18)$$

En notant $q_{lin}^0 = 2q_r^0$, $q_{log}^0 = q^0 + q_r^0 - q_{lin}^0 \bar{y}^0$, $\gamma^0 = \frac{\rho^0}{\tau^0}$, $y_\infty = \bar{y}^0$:

$$(q_{log}^0 + q_{lin}^0(y_\infty - y)) \frac{\partial y}{\partial x} = \gamma^0 \cdot (y_\infty - y) \quad (19)$$

Solution analytique et cas test

Avec une condition de Dirichlet $y(x = 0, t) = y_0$, la solution stationnaire $y(x)$ vérifie :

$$q_{lin}^0(y - y_0) - q_{log}^0 \ln \left(\frac{y_\infty - y}{y_\infty - y_0} \right) = \gamma^0 \cdot x \quad (20)$$

Solution analytique et cas test

Avec une condition de Dirichlet $y(x = 0, t) = y_0$, la solution stationnaire $y(x)$ vérifie :

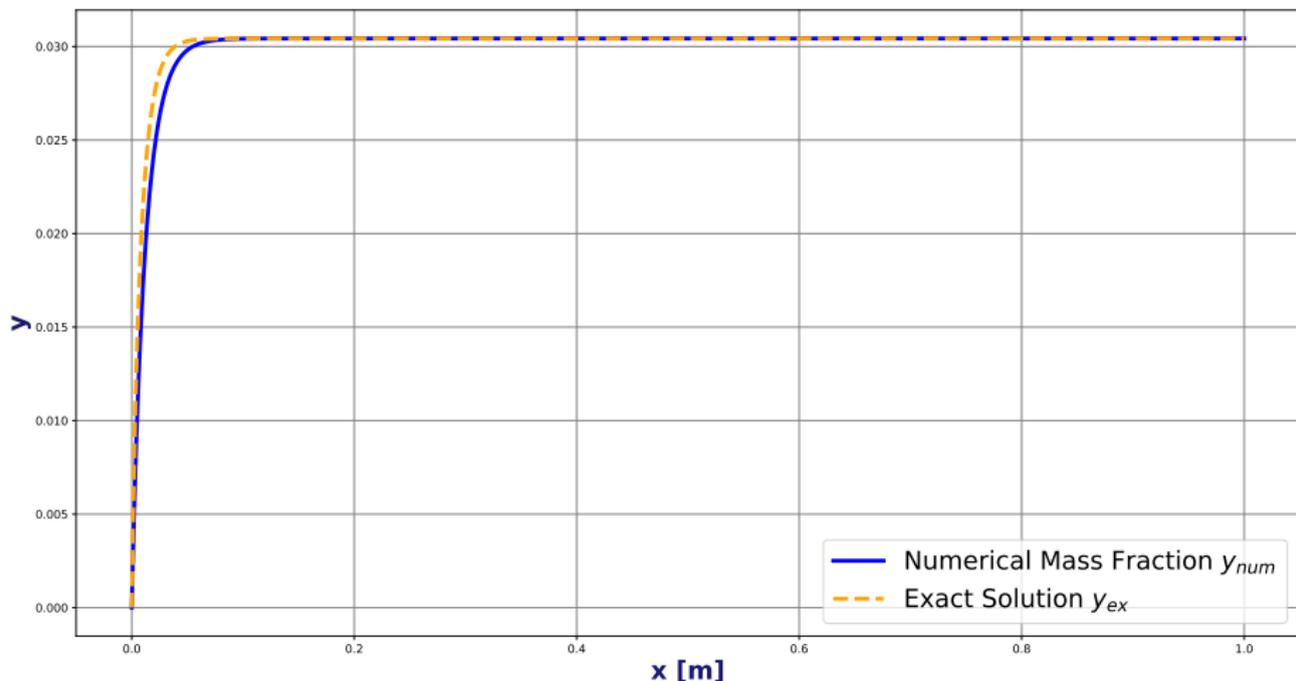
$$q_{lin}^0(y - y_0) - q_{log}^0 \ln \left(\frac{y_\infty - y}{y_\infty - y_0} \right) = \gamma^0 \cdot x \quad (20)$$

Un cas test est étudié sur $\Omega = [0, 1]$ (m) et avec :

Paramètre	Valeur	Unité
y_0	0.0	–
y_∞	3.04×10^{-2}	–
q_{lin}^0	–6000	$kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$
q_{log}^0	682.57	$kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$
γ^0	7×10^4	$kg \cdot m^{-3} \cdot s^{-1}$
Δx	10^{-3}	m

Simulation

Titre massique y en fonction de x - Solution schéma QRd (bleu) et solution exacte (orange).



Note : Un résultat similaire est obtenu avec le schéma QRq et le schéma QG.

Etude de la convergence en maillage 1/2

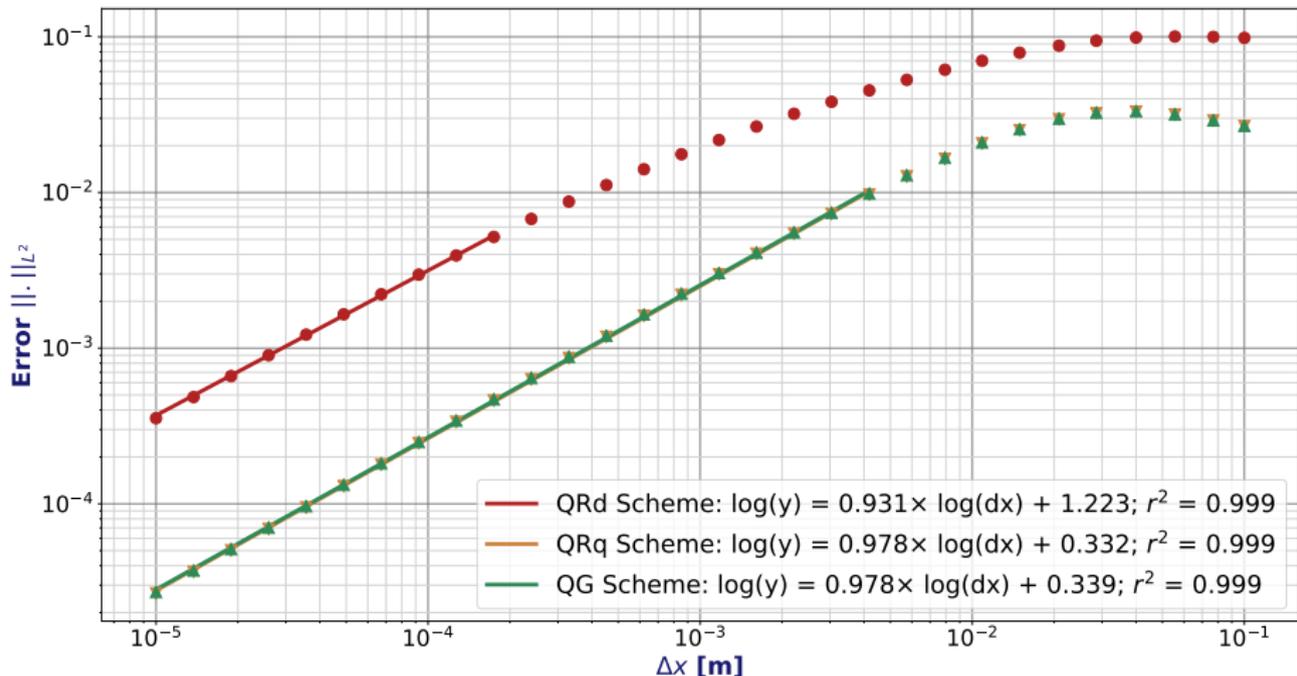
Pour le même cas test, plusieurs maillages sont simulés :
 $\Delta x \in [10^{-5}, 10^{-1}]$ m.

L'erreur (norme L_2) commise entre la solution numérique y_{num} et la solution exacte y_{ex} est calculée pour chaque maillage :

$$\text{err}_2 = \frac{\|y_{num} - y_{ex}\|_2}{\|y_{ex}\|_2} \text{ with } \|y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_x} y_i^2} \quad (21)$$

Etude de la convergence en maillage 2/2

Erreur en norme L_2 en fonction de la taille du maillage pour le schéma QG (vert), le schéma QRd (rouge) et le schéma QRq (orange) :



4- Ajout d'un terme de production

- 1 Système étudié
- 2 Méthodes numériques
 - Schémas Numériques
 - Discrétisation avec le schéma QG
 - Discrétisation avec le schéma QRd
 - Discrétisation avec le schéma QRq
- 3 Simulation et validation
- 4 Ajout d'un terme de production
- 5 Conclusion & Perspectives

Terme production

Ajout d'un terme de production $\Gamma(\mathbf{x}, t) > 0$ tel que l'on ne respecte pas le principe du maximum pour la borne 1.

Equation résolue :

$$\frac{\partial(\rho y)}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (y \mathbf{q}) + \underline{\nabla} \cdot (y(1-y) \mathbf{q}_r) = \rho \frac{\bar{y} - y}{\tau} + \Gamma(\mathbf{x}, t) \quad (22)$$

Schéma de production

Schéma implicite direct - schéma GAMi :

$$\int_{\omega_i} \Gamma d\Omega \approx \Gamma_i^* \omega_i \quad (23)$$

→ Ne respecte pas le principe du maximum.

Schéma de production

Schéma implicite direct - schéma GAMi :

$$\int_{\omega_i} \Gamma d\Omega \approx \Gamma_i^* \omega_i \quad (23)$$

Nouveau schéma :

$$\int_{\omega_i} \Gamma d\Omega \approx \Gamma_i^* \frac{1 - y_i^{n+1}}{1 - y_i^n} \omega_i \quad (24)$$

→ Respecte le principe du maximum mais problème pour $y_i^n = 1$.

Schéma de production

Schéma implicite direct - schéma GAMi :

$$\int_{\omega_i} \Gamma d\Omega \approx \Gamma_i^* \omega_i \quad (23)$$

Nouveau schéma :

$$\int_{\omega_i} \Gamma d\Omega \approx \Gamma_i^* \frac{1 - y_i^{n+1}}{1 - y_i^n} \omega_i \quad (24)$$

Schéma GAMc :

$$\int_{\omega_i} \Gamma d\Omega \approx \Gamma_i^* \cdot \frac{1 - y_i^{n+1}}{\max(1 - y_i^n, \varepsilon)} \omega_i \text{ with } \varepsilon \ll 1 \quad (25)$$

→ Respecte le principe du maximum, modifie la solution quand $y > 1 - \varepsilon$.

Ici, on utilise $\varepsilon = 1 \times 10^{-9}$.

Cas test avec production

Le terme de production utilisé est instationnaire mais uniforme :

$$\Gamma(\mathbf{x}, t) = \Gamma_0 \cos(\omega t) e^{-t/T_r} + \Gamma_\infty > 0 \quad (26)$$

Avec :

- $\Gamma_0 = 1.77 \text{ kg.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$
- $\Gamma_\infty = 0.3 \text{ kg.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$
- $\omega = 0.31 \text{ rad/s}$
- $T_r = 5.0 \text{ s}$

Equation résolue

L'équation résolue est :

$$\rho^0 \partial_t y + [q^0 + q_r^0 (1 - 2y)] \partial_x y = \rho^0 \frac{\bar{y}^0 - y}{\tau^0} + \Gamma(x, t) \quad (27)$$

Avec :

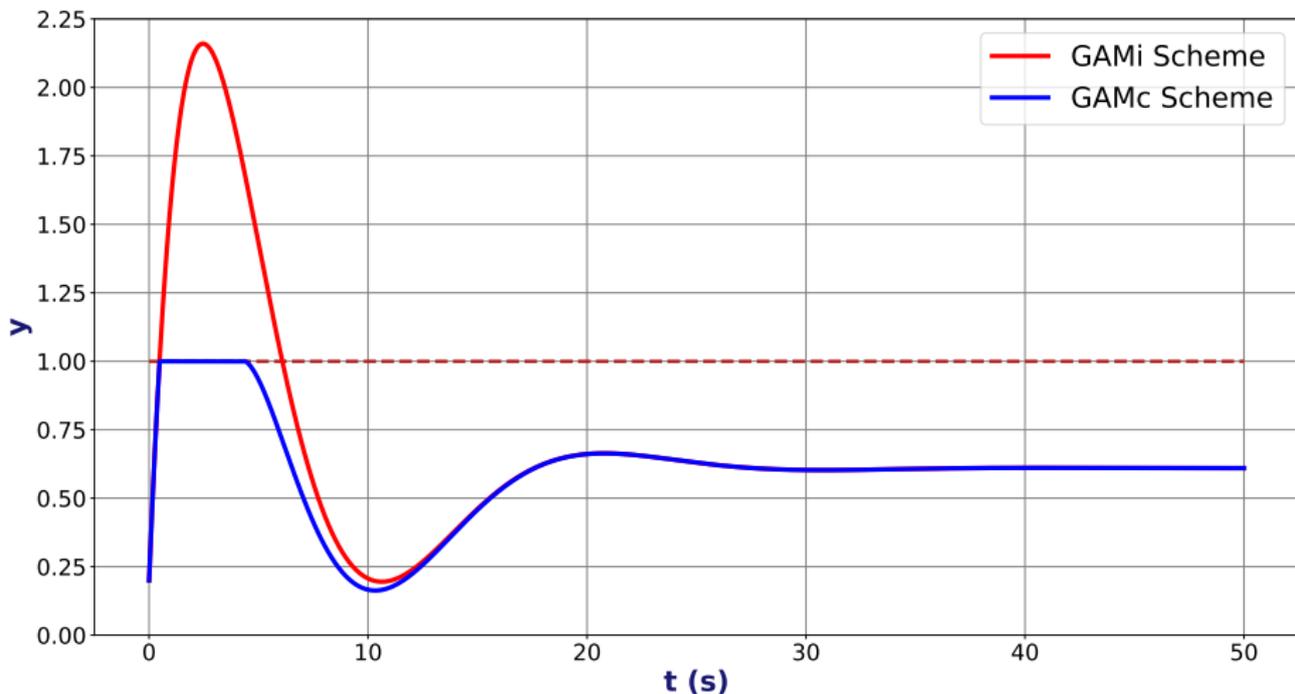
$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^0 = 1 \quad \text{kg.m}^{-3} \\ \tau^0 = 2.0 \quad \text{s} \\ \bar{y}^0 = 0.01 \\ y(x, t = 0) = 0.2 \\ y(x = 0, t) = 0.2 \end{array} \right. \quad (28)$$

Deux cas différents sont étudiés :

- sans écoulement : $q^0 = 0 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$; $q_r^0 = 0 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$,
- avec écoulement : $q^0 = 1.0 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$; $q_r^0 = 0.3 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$.

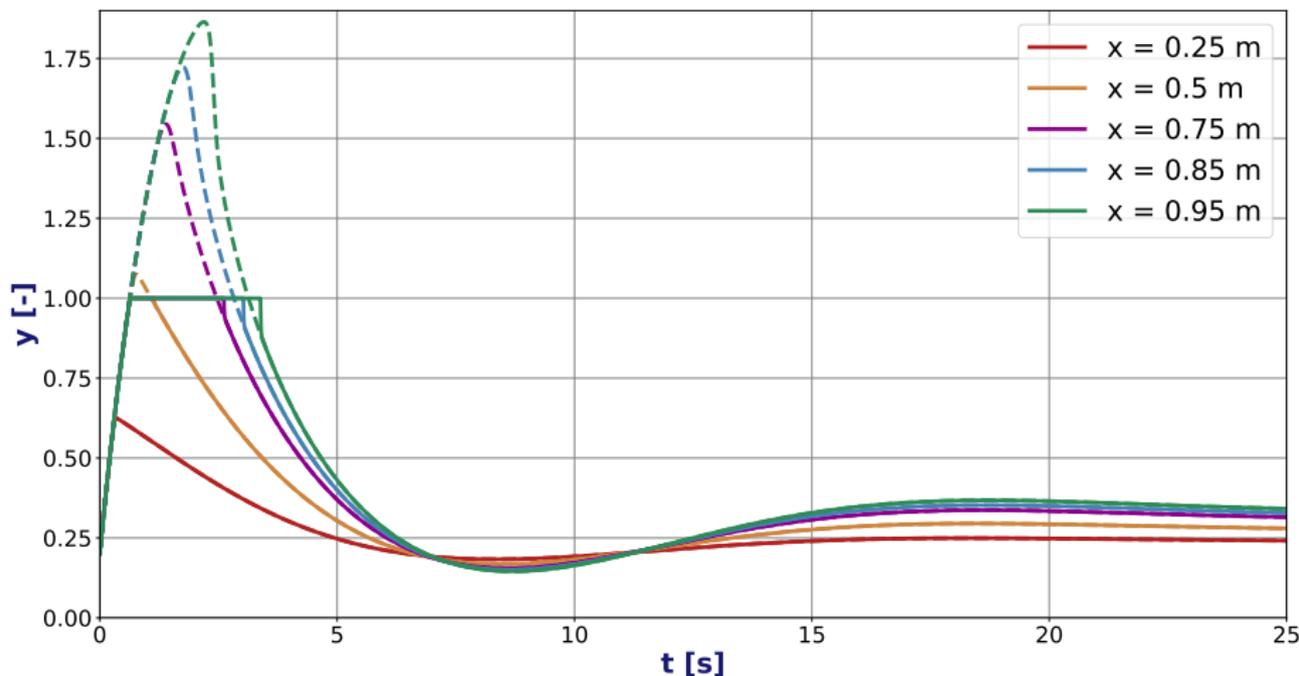
Cas sans écoulement

$$q^0 = 0 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1} ; q_r^0 = 0 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$$



Cas avec écoulement

$$q^0 = 1.0 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1} ; q_r^0 = 0.3 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$$



Titre massique y en différents points du domaine Ω en fonction du temps pour le schéma GAMi (ligne pointillée) et le schéma GAMc (ligne continue).

5- Conclusion & Perspectives

- 1 Système étudié
- 2 Méthodes numériques
 - Schémas Numériques
 - Discrétisation avec le schéma QG
 - Discrétisation avec le schéma QRd
 - Discrétisation avec le schéma QRq
- 3 Simulation et validation
- 4 Ajout d'un terme de production
- 5 Conclusion & Perspectives

Conclusion

- Principe du maximum continu pour l'équation du titre.
- Trois schémas différents conservant le principe du maximum discret ont été développés pour l'équation du titre.
 - Schéma QG : schéma conservatif avec condition sur le pas de temps.
 - Schéma QRd : schéma conservatif en stationnaire, sans aucune condition sur le pas de temps.
 - Schéma QRq : extension du schéma QRd, plus précis mais avec une éventuelle condition sur les débits considérés.
- Développement d'un schéma assurant le principe du maximum discret pour un terme de production pouvant faire dépasser la borne 1.

Travaux en cours et perspectives

- **Cas tests stationnaires supplémentaires** : faire varier les paramètres physiques constants pour voir l'évolution de l'erreur commise et du nombre d'itérations avant convergence.
- **Cas instationnaire** : développement en cours d'un cas test instationnaire 1D analytique pour étudier le comportement de chaque schéma.
- **Système complet edp** : implémentation de l'équation de titre dans un système d'edp avec quantité de mouvement et énergie.

Bibliographie

- L. Gastaldo, R. Herbin, J.-C. Latché, “A discretization of phase mass balance in fractional step algorithms for the drift- flux model”, *IMA Journal of Applied Mathematics* **31** (2011), no. 1, p. 116-146, <https://hal.science/hal-00308838>.
- R. Lewandowski, B. Mohammadi, “Existence and positivity results for the $\phi - \theta$ and a modified $k - \varepsilon$ two-equation turbulence models”, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* **03** (1993), no. 02, p. 195-215, <https://doi.org/10.1142/S0218202593000114>.
- R. S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Springer Berlin, Heiderlberg, 2009.
- T. H. Gronwall, “Note on the Derivatives with Respect to a Parameter of the Solutions of a System of Differential Equations”, *Annals of Mathematics* **20** (1919), no. 4, p. 292-296, <http://www.jstor.org/stable/1967124>.

Merci beaucoup pour votre attention. Je répondrai avec plaisir aux éventuelles questions.

Maille i :

$$\left((\rho y)_i^{n+1} - (\rho y)_i^n \right) \omega_i + \Delta t^n \sum_{j \in v(i)} S_{ij} \phi_{ij,i}^* = \dots \quad (29)$$

Maille j :

$$\left((\rho y)_j^{n+1} - (\rho y)_j^n \right) \omega_j + \Delta t^n \sum_{j \in v(i)} S_{ij} \phi_{ij,j}^* = \dots \quad (30)$$

Conservatif si : $\phi_{ij,i}^* + \phi_{ij,j}^* = 0$

Pour le schéma QRd, si $(q_r)_{ij}^* > 0$:

$$\begin{aligned}\phi_{ij,i}^* &= (q_r)_{ij}^* y_i^{n+1} (1 - y_j^n) \\ \phi_{ij,j}^* &= - (q_r)_{ij}^* y_i^n (1 - y_j^{n+1})\end{aligned}\tag{31}$$

⇒ conservatif uniquement en stationnaire.