Une aventure combinatoire : le jeu des cavaliers

Jean Pierre BOURGUIGNON

Que les mathématiques offrent matière à construire toutes sortes de jeux, plus ou moins complexes, cela se conçoit aisément. Mais que des mathématiques récentes puissent être explorées par de jeunes enfants sous forme de manipulations simples, voilà qui est moins commun. C'est pourtant l'expérience qui a pu être menée dans plusieurs écoles primaires, à partir de travaux de logique combinatoire élaborés par un grand mathématicien du XX^{e} siècle, Thoralf Albert SKOLEM. Et, peut-être plus étonnant encore, cette exploration a conduit à la création d'une œuvre d'art originale déployant en couleurs et en volumes certains des résultats explorés par les enfants.

SKOLEM nous invite à la combinatoire

SKOLEM est norvégien, comme d'autres grands mathématiciens, parmi lesquels nous pouvons citer Niels Henrik ABEL, qui vécut au XIX^{e} siècle, Sophus LIE, à la charnière entre le XIX^{e} et le XX^{e} siècle, et Atle SELBERG, médaille Fields 1950. Les contributions de SKOLEM à la logique et à la combinatoire ont été particulièrement remarquables.

Nous étudierons ici une question de combinatoire impliquant des suites d'entiers satisfaisant à des contraintes simples, appelées « suites de Skolem ». Comment ces suites sont-elles construites ?

On se donne un entier n, par exemple $n = 4$, avec pour objectif de ranger les nombres 1, 2, 3 et 4, chacun étant répété deux fois – ce qui donne huit nombres en tout dans ce cas –, de manière à satisfaire la condition suivante, appelée « CONDITION DE SKOLEM » : *« dans une suite de Skolem, deux apparitions d'un même nombre sont distantes de la valeur de ce nombre »*.

Cela signifie que les deux 1 sont contigus, les deux 2 sont à une distance de valeur 2, c'est-à-dire séparés par un seul nombre (donc deux intervalles), etc.

Ainsi par exemple, la suite 2 3 2 4 3 1 1 4 est une suite de Skolem puisque les deux 1 sont voisins, les deux 2 sont à une distance de 2 (séparés par un nombre), les deux 3 à une distance de 3 (séparés par deux nombres) et les deux 4 à une distance de 4 (séparés par trois nombres). À l'inverse, la suite 1 1 2 2 3 3 4 4 n'est pas une suite de Skolem, puisque, pour les 2, les 3 et les 4, elle ne respecte pas les contraintes présentées ci-dessus.

Le problème qui nous intéresse ici consiste à déterminer toutes les suites de Skolem. La réponse à cette question dépend, bien sûr, du nombre n.

Pour le cas le plus simple, n = 1, il n'y a presque rien à dire puisque la suite 11 est évidemment une solution, et la seule, au problème.

Pour $n = 2$, on démontre aisément qu'il n'y a pas de suite de Skolem, car il est impossible de placer le 1 redoublé entre les deux 2, alors que ces derniers ne doivent être séparés que par un seul nombre.

Mais qu'en est-il des cas moins évidents de $n = 3, 4, 5$… ?

Une expérience pédagogique

En 2000, Max LEGUEM, alors directeur de la Maison des Jeunes et de la Culture de la ville de Chilly-Mazarin, a proposé que, dans le cadre de l'Année mondiale des mathématiques célébrée cette année-là, soit menée une expérience originale pour « faire découvrir les mathématiques à des élèves du primaire de façon inhabituelle ». C'est Jean BRETTE, alors responsable de l'espace mathématiques du Palais de la Découverte, qui a suggéré d'explorer les suites de Skolem sous la forme du *« jeu des cavaliers »*. Durant deux ans, ce jeu a contribué à l'exploration des mathématiques dans plusieurs classes de CM1 et CM2 de l'école du Château de Chilly-Mazarin sous la responsabilité de deux professeurs, Valérie BOUGE et Olivier HENRIOT. Cette expérience a rencontré l'enthousiasme des enfants.

Après avoir convaincu de l'intérêt de l'expérience les parents et la hiérarchie de l'Éducation nationale – le soutien du recteur Daniel BANCEL a été utile à ce stade –, le jeu des cavaliers a été exploré non seulement dans ces deux classes, mais aussi dans d'autres classes de Villeneuve-Saint-Georges, sous la houlette de Jean BRETTE. Éric CHEVREAU a assuré le relais pour la MJC de Chilly-Mazarin après le départ de Max LEGUEM. L'expérience a été suivie de bout en bout par une équipe de cinéastes, ce qui s'est traduit par un film conçu et réalisé par Claude OTHNIN-GIRARD.

Après une sensibilisation s'appuyant sur la considération de problèmes de recouvrements d'échiquiers par des dominos, l'essentiel de l'appropriation du « jeu des cavaliers » par les enfants a consisté à passer d'une approche par tâtonnements, notamment pour les nombres n petits, à une réflexion plus systématique conduisant à une validation de la notion de preuve. De ce point de vue justement, le « jeu des cavaliers » est idéal, car il possède une propriété particulièrement intéressante (sur laquelle nous reviendrons plus bas) : il n'a pas de solution pour certains nombres n. Nous avons déjà constaté cette propriété pour $n = 2$, mais il y a bien d'autres cas.

Étude des solutions du « jeu des cavaliers »

Expliquons tout d'abord en quoi le problème des suites de Skolem peut être transformé en jeu. Il s'agit tout simplement de penser aux deux occurrences d'un même nombre dans une suite de Skolem comme aux deux jambes d'un cavalier. Chercher une suite de Skolem pour le nombre n est donc équivalent à positionner n cavaliers dont les jambes sont respectivement écartées de 1, 2, 3, ..., n cases, et de manière à ce qu'il n'y ait aucun espace laissé libre entre leurs pieds.

La formulation numérique que nous avons initialement considérée se voit donc transformée en une question de placement d'une collection de cavaliers.

Cette façon de considérer le problème a l'avantage de permettre de le résoudre à l'aide de manipulations concrètes, bien que cette mutation requière un peu d'imagination pour trouver comment éviter que les cavaliers ne se « marchent sur les pieds ». Nous proposons au lecteur de laisser libre cours à son imagination pour fabriquer sa propre version matérielle du jeu.

L'impossibilité constatée pour $n = 2$ incite à considérer le cas $n = 3$. Que découvrons-nous alors ? Nous sommes en présence de trois cavaliers : 1, 2 et 3, et de six emplacements pour leurs pieds.

Commençons la tentative de construction de cette suite en plaçant l'un des deux pieds du cavalier 3 à l'extrémité gauche (ce qui revient à dire que la suite commence par le nombre 3) ; il laisse entre ses jambes un double espace libre permettant de placer deux pieds d'autres cavaliers. À ce stade, l'état de la suite est donc : $3 - - 3 - -$.

Supposons que l'on place un pied du cavalier 2 dans l'espace libre de droite entre les deux pieds du cavalier 3 ; le cavalier 2 est alors contraint de placer son deuxième pied en enjambant le cavalier 3, ce qui donne : $3 - 2\ 3\ 2 -$.

On voit qu'il ne reste alors aucune place convenant au cavalier 1, puisque celui-ci a besoin d'occuper deux places adjacentes.

Si, en gardant la même position pour le cavalier 3, on cherche à placer le cavalier 2 à sa droite, on voit que cela est impossible, car il n'y a pas assez d'espaces libres.

Tentons maintenant la position où le pied gauche du cavalier 3 est cette fois à la deuxième place : $- 3 - - 3 -$. On peut alors positionner le cavalier 2 à l'extrême gauche $2\ 3\ 2 - 3 -$.

On constate immédiatement qu'il n'y a pas de place convenant au cavalier 1.

On peut alors tenter de placer différemment le cavalier 2 par rapport au cavalier 3 en gardant celui-ci à la deuxième place : $- 3 - 2\ 3\ 2$.

Mais, là encore, il n'est pas possible de trouver une place pour le cavalier 1.

Si l'on prend conscience qu'une suite de Skolem lue à l'envers est encore une suite de Skolem (car sa définition ne privilégie par la droite sur la gauche) ou encore qu'un bon placement des cavaliers peut être considéré en les regardant de face ou de dos, on se rend compte que les deux positions qu'on a considérées pour le cavalier 3 épuisent les positions possibles pour lui.

L'ensemble de ces tentatives nous assure donc que, pour $n = 3$ non plus, il n'y a pas de solution au « jeu des cavaliers », et donc pas de suite de Skolem.

Une exploration systématique de toutes les solutions du jeu pour $n = 4$ permet d'établir six solutions qui, écrites sous forme de suites de Skolem, sont les suivantes :

1	1	4	2	3	2	4	3	,
3	4	2	3	2	4	1	1	,
1	1	3	4	2	3	2	4	,
4	2	3	2	4	3	1	1	,
4	1	1	3	4	2	3	2	,
2	3	2	4	3	1	1	4	.

Une exploration un peu plus laborieuse permet de déterminer des solutions pour $n = 5$. En voici quelques-unes :

5	1	1	3	4	5	3	2	4	2	,
1	1	3	4	5	3	2	4	2	5	,
3	4	5	3	2	4	2	5	1	1	.

Au lecteur d'en trouver d'autres, voire de les découvrir toutes !

Un travail plus savant permet d'établir que, pour $n = 8$, il existe 504 solutions et que, pour $n = 12$, il y en a 455 936.

En fait, on dispose d'un encadrement du nombre de solutions pour tout n , mais pas de formule exacte, sauf à trouver toutes les solutions et à les dénombrer, ce qui est réalisable en faisant tourner un programme adéquat sur un ordinateur.

Une propriété générale et très intéressante des suites de Skolem, dénommée « THÉORÈME DE SKOLEM », a néanmoins pu être établie : *« il n'existe aucune suite de Skolem de longueur 2*n *[correspondant donc au nombre n] lorsque le reste de la division de* n *par 4 est 2 ou 3 »*.

Ce théorème généralise bien entendu ce qui nous avions établi par une étude directe (et tout à fait élémentaire) pour n = 2 et 3, puisque les restes des divisions de 2 et 3 par 4 sont respectivement égaux aux nombres eux-mêmes, à savoir 2 et 3. Il s'en suit qu'il n'y a pas de solution au jeu des cavaliers pour n = 6, 7, 10, 11, etc. La démonstration de ce théorème ne fait appel qu'à des mathématiques élémentaires. Pour mettre le lecteur sur la voie, disons qu'il nécessite de trouver le moyen de traduire numériquement la contrainte à laquelle les cavaliers sont soumis, à savoir le respect des valeurs des écarts entre deux mêmes nombres, l'ensemble de ces écarts prenant toutes les valeurs comprises entre 1 et n .

D'un point de vue pédagogique, le fait que, dans certains cas, l'exploration du « jeu des cavaliers » échoue est particulièrement intéressant : il oblige à passer de tentatives infructueuses à l'idée que, peut-être, il y a une raison profonde à ces échecs répétés. Il est possible de réaliser une version élémentaire de la démonstration pour $n = 6$, reposant sur une étude des parités. Pour les nombres plus grands, il est vraiment recommandé de recourir à la preuve générale.

La sculpture « Skolem, choc de blocs & chiffres au vent »

Dès l'amorce du projet, Max LEGUEM a souhaité qu'une trace de cette exploration mathématique perdure sous la forme d'une œuvre d'art, image tangible des liens que peuvent tisser entre elles des formes apparemment différentes de la connaissance.

Suite à une discussion avec Hubert CURIEN, alors président de la Fondation de France, nous avons pu contacter Catia RICCABONI, responsable, dans cette fondation, du programme « Nouveaux Commanditaires », qui permet à des citoyens ordinaires de commanditer une œuvre d'art. La méthode mise en œuvre dans ce programme consiste à confier à un connaisseur du monde de l'art la recherche de l'artiste pour les commanditaires. Pour ce projet, ce fut Mari LINNMAN, de l'Association 3CA, qui a finalement recommandé de contacter la sculptrice américaine Jessica STOCKHOLDER, professeure à Yale.

Les enfants de Chilly-Mazarin ont produit un cahier des charges à partir duquel elle a proposé une œuvre monumentale, de 9 m sur 11m, ayant deux parties :

– une partie fixe matérialise deux solutions du jeu des cavaliers pour $n = 8$ sur un quadrillage ;

ces deux solutions sont les suites de Skolem 3 5 2 3 2 7 5 8 6 4 1 1 7 4 6 8 et 6 1 1 2 7 2 6 8 4 5 3 7 4 3 5 8 qui peuvent être indifféremment remplacées par leurs inverses ; chaque cavalier est représenté par un objet dont la base s'inscrit dans un carré dont la longueur du côté varie de une à huit unités, selon le nombre qu'il représente ;

– une partie mobile, composée des huit cavaliers, un pour chaque taille, qui peuvent glisser sur des rails permettant d'explorer l'ensemble des solutions du jeu pour tous les nombres allant de 1 à 8 (si l'on s'intéresse à un nombre inférieur à 8, il suffit de mettre hors-jeu les cavaliers ayant un écartement supérieur au nombre choisi).

On peut facilement visualiser la disposition choisie par Jessica STOCKHOLDER pour implanter les objets qui matérialisent les cavaliers et auxquels, pour simplifier, on a donné une base carrée. Dans la sculpture réelle, les objets ont des tailles verticales, des formes variées, et sont réalisés dans des matériaux différents.

Cette sculpture est implantée dans le parc de l'Institut des Hautes Études Scientifiques à Bures-sur-Yvette (Essonne) (pour de plus amples informations, voir le site Internet de l'IHÉS www.ihes.fr). La construction de cette œuvre a été rendue possible grâce au soutien de la Fondation de France, du Conseil régional d'Ile-de-France, de la Communauté d'agglomération du plateau de Saclay, du Conseil régional d'Ile-de-France, du Conseil général de l'Essonne, de la Direction régionale de la recherche et de la technologie d'Ile-de-France, de la Fondation EDF, des ciments Lafarge et des Amis de l'IHÉS, et grâce à l'appui du nouveau recteur de l'académie de Versailles, Alain BOISSINOT, et du CRDP.

Des variantes du « jeu des cavaliers »

Les suites de Skolem continuent d'intéresser les spécialistes de combinatoire, comme en témoigne le fait que des articles de la revue *Ars Combinatorica* leur soient régulièrement consacrés.

Plusieurs variantes des suites de Skolem ont été étudiées : c'est le cas des « suites de Skolem étendues », qui se distinguent des suites de Skolem classiques par le fait que le nombre 0 est introduit dans la suite, dans laquelle il n'apparaît, lui, qu'une seule fois (puisque son entrejambe doit être nul). Les suites de Skolem étendues associées à l'entier n sont donc de longueur $2n+1$. Il est intéressant de noter qu'il existe des suites étendues pour tous les entiers, autrement dit que les restrictions introduites dans les suites de Skolem par le théorème de Skolem tombent pour ces suites-là.

Une sous-famille des suites de Skolem étendues a reçu une attention particulière : il s'agit des suites dont le 0 est à la $2n^e$ place (c'est-à-dire à l'avant-dernière place). Les spécialistes les appellent « suites de Skolem étendues pointées ». À leur tour, ces suites n'existent pas pour tout n, car une variante du théorème de Skolem s'applique à elles, faisant apparaître une condition impliquant le reste de la division de n par 4 – le lecteur pourra tenter de trouver laquelle par lui-même.

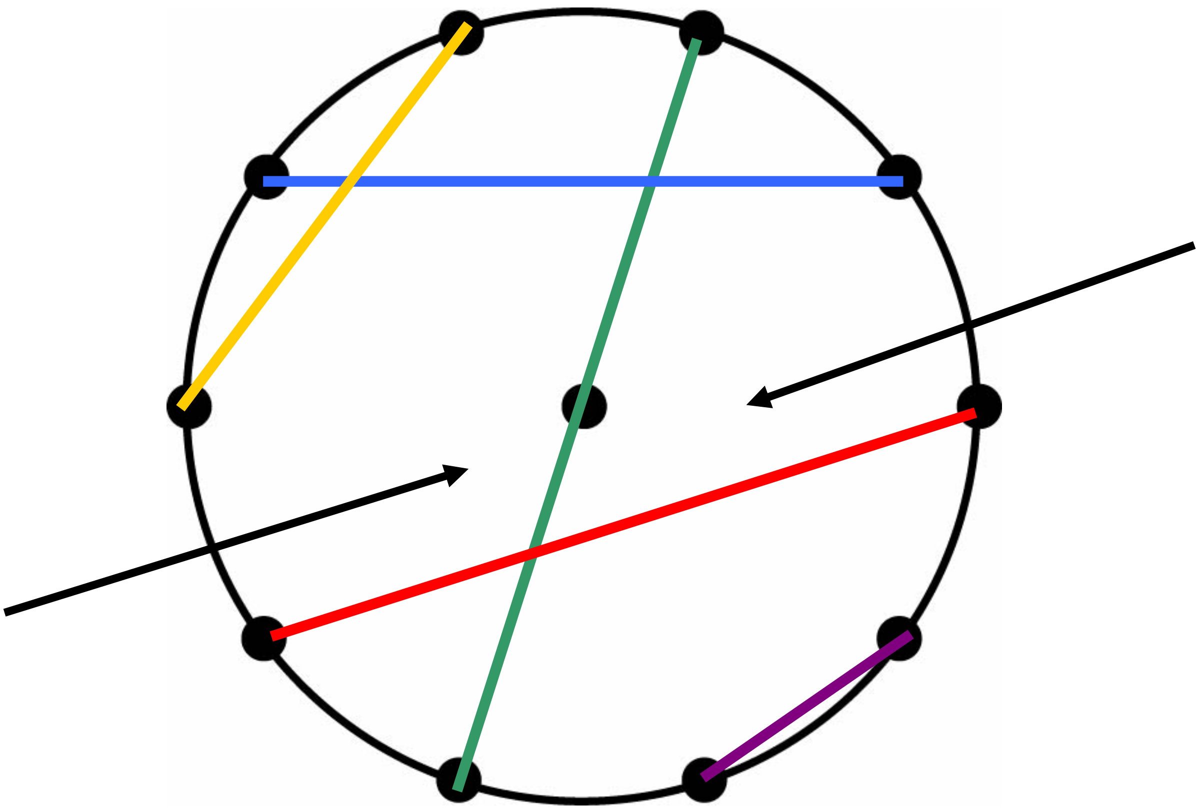
Ont aussi été étudiées des suites construites sur un cycle élémentaire, et plus généralement sur des graphes. Le cas des « suites de Skolem circulaires » est particulièrement intéressant pour une exploration par manipulation, comme dans le cas des cavaliers. Pour cela, sur un cercle, on dispose $2n$ points espacés régulièrement. La distance entre deux quelconques de ces points dépend donc seulement du nombre de points qui les séparent, en choisissant toujours de passer du côté le plus court (les points diamétralement opposés sont, eux, séparés par $n-1$ points quel que soit le côté par lequel on passe).

Il est facile de réaliser matériellement ce « jeu circulaire des cavaliers » : il suffit de tracer un cercle sur une planchette, de le percer de $2n$ trous régulièrement espacés et de se munir de n demi-cercles de tailles croissantes, le plus petit permettant de relier deux points voisins, le suivant deux points séparés par un autre point, etc., jusqu'au plus grand qui relie deux points diamétralement opposés ; chaque demi-cercle relie les deux points choisis en enfonçant ses extrémités dans les trous percés dans la planchette. Il peut être intéressant de réaliser ces demi-cercles avec un matériau qui permette de les colorier.

Une question se pose alors naturellement : y a-t-il une relation entre les solutions du « jeu circulaire des cavaliers » et celles du « jeu des cavaliers » classique ?

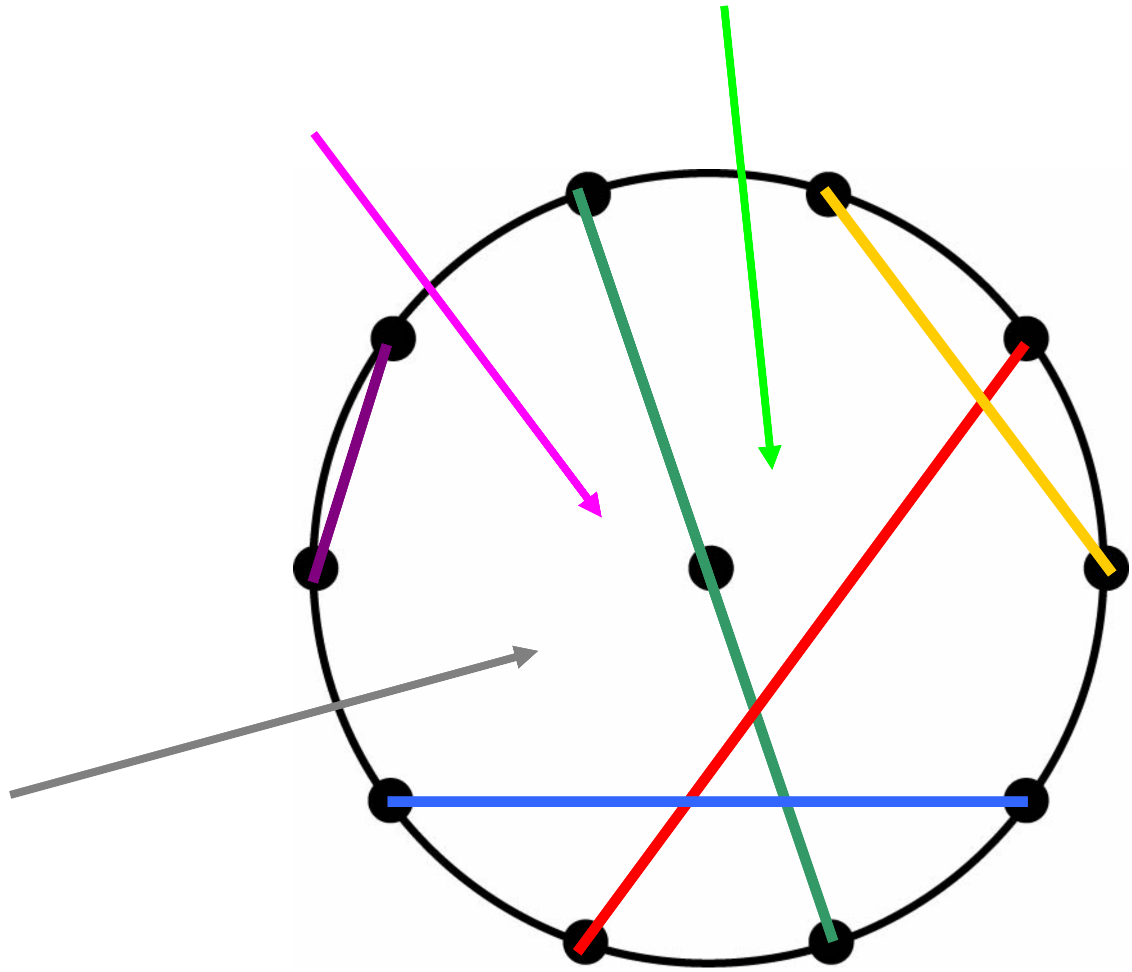
En effet, s'il est possible, comme dans la Figure 1 ci-dessous, correspondant au cas $n = 5$, d'atteindre le centre depuis l'extérieur sans passer entre les jambes d'un cavalier, alors on peut « ouvrir » le cercle. On obtient ainsi une suite de Skolem classique et son inverse (en parcourant le segment ainsi obtenu dans l'autre sens). Toujours dans l'exemple donné, on voit qu'il y a deux façons d'atteindre le centre, ce qui signifie que cette solution du « jeu circulaire des cavaliers » donne lieu à quatre solutions classiques 2 3 2 5 3 4 1 1 5 4 et 4 1 1 5 4 2 3 2 5 3, ainsi que les suites parcourues en sens inverse.

Figure 1



Dans l'exemple de la Figure 2, on voit qu'une solution circulaire peut même donner lieu à trois solutions classiques : 2 4 2 3 5 4 3 1 1 5 , 1 1 5 2 4 2 3 5 4 3 , 5 2 4 2 3 5 4 3 1 1 et à leurs inverses.

Figure 2



Il est naturel de se demander si le théorème de Skolem établissant l'impossibilité d'avoir des suites de Skolem pour tous les nombres dont le reste de la division par 4 est 2 ou 3 reste valable pour les suites de Skolem circulaires. La réponse est positive, ce qui nous dispense de chercher des solutions au « jeu circulaire des cavaliers » pour $n = 6$ et $n = 7$, par exemple.

On peut pousser encore un peu plus loin la question initiale sur les correspondances entre solutions du jeu classique et du jeu circulaire : est-il possible de trouver des solutions circulaires pour lesquelles il est impossible de faire les coupures nécessaires pour « ouvrir » le cercle, autrement dit des solutions pour lesquelles le centre n'est pas accessible de l'extérieur sans passer entre les jambes d'un cavalier ? La réponse est négative pour $n = 4$ et $n = 5$, mais positive pour $n = 8$, comme l'exemple de la Figure 3 donnée ci-dessous le montre… mais il y en a bien d'autres.

Figure 3