Cet exposé traite de systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles hyperboliques posés dans le quart d'espace. Plus précisément de tels systèmes sécrivent sous la forme générique :

$$\begin{cases} \partial_t u + \sum_{j=1}^{2} A_j \partial_j u = f, \text{ pour } (t, x_1, x_2) \in]0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ B_1 u_{|x_1=0} = g_1, \text{ sur } \{x_1 = 0\}, \\ B_2 u_{|x_2=0} = g_2, \text{ sur } \{x_2 = 0\}, \\ u_{|t \leq 0} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où les $A_j \in \mathbb{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$ sont les coefficients du problème et les $B_j \in \mathbb{M}_{p_j \times N}(\mathbb{R})$ sont les conditions que l'on impose sur le bord du quart d'espace.

On s'intéressera plus particulièrement dans cet exposé aux développements d'optique géométrique (ou BKW) pour de tels problèmes dans deux cas distincts. Le premier celui des problèmes de la forme (1) pour lesquels la solution existe est unique et est aussi régulière en norme L^2 que les termes sources f, g_1, g_2. La nature du développement BKW dépend alors fortement de la géométrie de la variété caractéristique du problème (1). On verra en particulier que ces développements permettent de mettre en évidence de nouveaux phénomènes propres au quart d'espace tels que l'autointeraction des phases (c'est-à-dire qu'après une phase revient se générer elle-même après un certain nombre de rebonds sur les faces du quart d'espace).

Dans le second cas, c'est-à-dire pour les problèmes dits faiblement bien posés, la solution perd un nombre fini de dérivées par rapport aux données du problème. Dans le cas d'un problème aux limites hyperbolique dans le demi-espace la caractérisation du nombre de pertes de dérivées possibles est bien comprise. On verra toutefois que pour le problème dans le quart d'espace le phénomène d'autointeraction permet de venir répeter un nombre arbitrairement grand de fois une perte de dérivée créant ainsi une instabilité violente (ou d'Hadmard) à partir d'une instabilité faible.