

# Structure galoisienne de la racine carrée de la codifférente d'extensions non abéliennes

Bouchaïb Sodaigui  
Université Polytechnique Hauts-de-France  
Laboratoire CERAMATHS  
Le Mont Houy, 59313 Valenciennes Cedex 9, France  
E-mail : bouchaib.sodaigui@uphf.fr

## Résumé

Soient  $k$  un corps de nombres et  $O_k$  son anneau d'entiers. Soit  $\Gamma$  un groupe fini d'ordre impair. Soient  $\mathcal{M}$  un  $O_k$ -ordre maximal dans l'algèbre semi-simple  $k[\Gamma]$  contenant  $O_k[\Gamma]$ . Soit  $Cl(O_k[\Gamma])$  (resp.  $Cl(\mathcal{M})$ ) le groupe des classes des  $O_k[\Gamma]$  (resp.  $\mathcal{M}$ )-modules localement libres. On désigne par  $\mathcal{R}(\mathcal{A}, O_k[\Gamma])$  (resp.  $\mathcal{R}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ ) l'ensemble des classes  $c$  de  $Cl(O_k[\Gamma])$  (resp.  $Cl(\mathcal{M})$ ) telles qu'il existe une extension  $N/k$  modérément ramifiée, à groupe de Galois isomorphe à  $\Gamma$ , avec  $[\mathcal{A}_{N/k}] = c$  (resp.  $[\mathcal{M} \otimes_{O_k[\Gamma]} \mathcal{A}_{N/k}] = c$ ), où  $[M]$  désigne la classe de  $M$ . Nous dirons que  $\mathcal{R}(\mathcal{A}, O_k[\Gamma])$  (resp.  $\mathcal{R}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ ) est l'ensemble des classes galoisiennes réalisables par la racine carrée de la codifférente. Lorsque  $\Gamma$  est abélien, il est bien connu que ces deux sous-ensembles sont des sous-groupes par l'intermédiaire d'une description non explicite inspirée par des travaux sur les classes réalisables par des anneaux d'entiers ; le problème de leurs structures dans le cas non abélien est ouvert. Dans cet exposé, lorsque  $\Gamma$  est d'ordre un nombre premier  $l$ , sous une certaine hypothèse on décrit explicitement  $\mathcal{R}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  par un idéal de Stickelberger. Ensuite, on applique ce résultat au cas où  $\Gamma$  est un groupe métacyclique non abélien d'ordre  $lm$ , où  $m$  est un entier impair ; sous certaines hypothèses, on définit un sous-ensemble de  $Cl(\mathcal{M})$  (qu'on peut interpréter à l'aide de la notion d'extensions domestiques) au moyen de deux idéaux de Stickelberger et on montre qu'il est un sous-groupe de  $Cl(\mathcal{M})$  contenu dans  $\mathcal{R}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ .