Corps enveloppants en dimension trois : isomorphismes valués et motivation

César Lecoutre

8 Juin 2023

Journées d'algèbre en l'honneur de F. Dumas et T. Lambre
Université Clermont Auvergne

Géométrie algébrique projective noncommmutative

$$\boxed{\mathbb{P}^n} \qquad \longleftrightarrow \qquad \boxed{\begin{array}{c} A = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n] \\ \deg(x_i) = 1 \end{array}}$$

Géométrie algébrique projective noncommmutative

$$\boxed{\mathbb{P}^n} \qquad \longleftrightarrow \qquad \boxed{\begin{array}{c} A = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n] \\ \deg(x_i) = 1 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbb{P}^n \\ \text{``quantique''} \end{array}}$$

Géométrie algébrique projective noncommmutative

$$\boxed{\mathbb{P}^n} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} A = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n] \\ \deg(x_i) = 1 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbb{P}^n \\ \text{“quantique”} \end{array}} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{Analogue de } A \\ \text{non commutatif ?} \end{array}}$$

Géométrie algébrique projective noncommmutative

Les algèbres AS régulières sont des algèbres graduées proches des anneaux de polynôme d'un point de vue homologique.

Géométrie algébrique projective noncommmutative

Les algèbres AS régulières sont des algèbres graduées proches des anneaux de polynôme d'un point de vue homologique.

Définition

Soit $R = \bigoplus_{i \geqslant 0} R_i$ *une* $\mathbb{k}$*-algèbre* $\mathbb{N}$*-graduée de type fini, avec* $R_0 = \mathbb{k}$*.*

Géométrie algébrique projective noncommmutative

Les algèbres AS régulières sont des algèbres graduées proches des anneaux de polynôme d'un point de vue homologique.

Définition

Soit $R = \bigoplus_{i \geqslant 0} R_i$ *une* $\mathbb{k}$*-algèbre* $\mathbb{N}$*-graduée de type fini, avec* $R_0 = \mathbb{k}$*. On dit que* R *est une algèbre Artin-Schelter régulière (AS régulière) si*

1. $\mathrm{GKdim}(R) < \infty$ *(condition sur la croissance de l'algèbre)*

Géométrie algébrique projective noncommmutative

Les algèbres AS régulières sont des algèbres graduées proches des anneaux de polynôme d'un point de vue homologique.

Définition

Soit $R = \bigoplus_{i \geqslant 0} R_i$ *une* $\mathbb{k}$*-algèbre* $\mathbb{N}$*-graduée de type fini, avec* $R_0 = \mathbb{k}$*. On dit que* R *est une algèbre Artin-Schelter régulière (AS régulière) si*

1. $\mathrm{GKdim}(R) < \infty$ *(condition sur la croissance de l'algèbre)*
2. $\mathrm{gl.dim}(R) = d < \infty$ *(dimension homologique)*

Géométrie algébrique projective noncommmutative

Les algèbres AS régulières sont des algèbres graduées proches des anneaux de polynôme d'un point de vue homologique.

Définition

Soit $R = \bigoplus_{i \geqslant 0} R_i$ *une* $\mathbb{k}$*-algèbre* $\mathbb{N}$*-graduée de type fini, avec* $R_0 = \mathbb{k}$*. On dit que R est une algèbre Artin-Schelter régulière (AS régulière) si*

1. $\mathrm{GKdim}(R) < \infty$ *(condition sur la croissance de l'algèbre)*
2. $\mathrm{gl.dim}(R) = d < \infty$ *(dimension homologique)*
3. $\underline{\mathrm{Ext}}^i_R(\mathbb{k}_R, R_R) = \begin{cases} 0 & i \neq d \\ {}_R\mathbb{k}(\ell) & i = d \quad (\text{où } \ell \in \mathbb{Z}) \end{cases}$
   en tant que R-module à gauche (condition Gorenstein).

Géométrie algébrique projective noncommmutative

Les algèbres AS régulières sont des algèbres graduées proches des anneaux de polynôme d'un point de vue homologique.

Définition

Soit $R = \bigoplus_{i \geqslant 0} R_i$ *une* $\Bbbk$*-algèbre* $\mathbb{N}$*-graduée de type fini, avec* $R_0 = \Bbbk$*. On dit que* R *est une algèbre Artin-Schelter régulière (AS régulière) si*

1. $\mathrm{GKdim}(R) < \infty$ *(condition sur la croissance de l'algèbre)*
2. $\mathrm{gl.dim}(R) = d < \infty$ *(dimension homologique)*
3. $\underline{\mathrm{Ext}}^i_R(\Bbbk_R, R_R) = \begin{cases} 0 & i \neq d \\ {}_R\Bbbk(\ell) & i = d \quad (\text{où } \ell \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

   en tant que R*-module à gauche (condition Gorenstein).*

Si une algèbre AS régulière admet des relations quadratiques, on peut la penser comme l'anneau des coordonnées d'un espace projectif non commutatif, un "quantum $\mathbb{P}^{d-1}$".

Exemples

1. Les anneaux de polynômes $\mathbb{k}[x_0, \ldots, x_d]$ sont des algèbres AS régulières de dimension $d+1$ pour tout $d \geqslant 0$.

Exemples

1. Les anneaux de polynômes $\mathbb{k}[x_0, \dots, x_d]$ sont des algèbres AS régulières de dimension $d + 1$ pour tout $d \geqslant 0$.
2. En dimension 2 il existe deux types d'algèbres AS régulières

$$\mathbb{k}\langle x, y \mid xy = yx + x^2 \rangle$$

Exemples

1. Les anneaux de polynômes $\mathbb{k}[x_0, \ldots, x_d]$ sont des algèbres AS régulières de dimension $d+1$ pour tout $d \geqslant 0$.
2. En dimension 2 il existe deux types d'algèbres AS régulières

$$\mathbb{k}\langle x, y \mid xy = yx + x^2 \rangle \text{ et } O_q(\mathbb{k}^2) = \mathbb{k}\langle x, y \mid xy = qyx \rangle$$

pour un scalaire non nul $q \in \mathbb{k}$.

Exemples

1. Les anneaux de polynômes $\mathbb{k}[x_0, \ldots, x_d]$ sont des algèbres AS régulières de dimension $d+1$ pour tout $d \geqslant 0$.
2. En dimension 2 il existe deux types d'algèbres AS régulières
$$\mathbb{k}\langle x, y \mid xy = yx + x^2 \rangle \text{ et } O_q(\mathbb{k}^2) = \mathbb{k}\langle x, y \mid xy = qyx \rangle$$
pour un scalaire non nul $q \in \mathbb{k}$.
3. En dimension 3, classification complète par des données géométriques (Artin-Tate-Van den Bergh et Stephenson).

Exemples

1. Les anneaux de polynômes $\Bbbk[x_0, \ldots, x_d]$ sont des algèbres AS régulières de dimension $d+1$ pour tout $d \geqslant 0$.
2. En dimension 2 il existe deux types d'algèbres AS régulières

   $$\Bbbk\langle x, y \mid xy = yx + x^2 \rangle \text{ et } O_q(\Bbbk^2) = \Bbbk\langle x, y \mid xy = qyx \rangle$$

   pour un scalaire non nul $q \in \Bbbk$.
3. En dimension 3, classification complète par des données géométriques (Artin-Tate-Van den Bergh et Stephenson).
4. En dimension $\geqslant 4$ on connaît de nombreux exemples mais on est loin d'une classification complète.

Exemples

1. Les anneaux de polynômes $\mathbb{k}[x_0, \ldots, x_d]$ sont des algèbres AS régulières de dimension $d+1$ pour tout $d \geqslant 0$.
2. En dimension 2 il existe deux types d'algèbres AS régulières

$$\mathbb{k}\langle x, y \mid xy = yx + x^2\rangle \text{ et } O_q(\mathbb{k}^2) = \mathbb{k}\langle x, y \mid xy = qyx\rangle$$

   pour un scalaire non nul $q \in \mathbb{k}$.
3. En dimension 3, classification complète par des données géométriques (Artin-Tate-Van den Bergh et Stephenson).
4. En dimension $\geqslant 4$ on connaît de nombreux exemples mais on est loin d'une classification complète.
5. En dimension 4, Pym étudie certaines algèbres AS :

Théorème (Pym '15)

Il existe 6 familles irréductibles de déformations lisses graduées de $A = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ en tant qu'algèbre Calabi-Yau, Koszul et ayant série de Hilbert $(1-t)^{-4}$.

Géométrie algébrique projective noncommmutative

Peut-on associer à une algèbre AS régulière un espace géométrique ?

Géométrie algébrique projective noncommmutative

Peut-on associer à une algèbre AS régulière un espace géométrique ?

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\mathbb{P}^n} \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{\begin{array}{c}\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n] \\ \deg(x_i) = 1\end{array}} \\
\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{proj}(A) = \text{idéaux} \\ \text{homogènes premiers} \\ \text{sauf } A_{\geqslant 1}\end{array}} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, bend right, "?"'] & \boxed{\begin{array}{c}\mathbb{C}\text{-algèbre commutative } A \\ \mathbb{N}\text{-graduée de type finie}\end{array}} \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{idéaux premiers} \\ \text{homogènes sauf } A_{\geqslant 1}\end{array}} \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{\text{Algèbre AS régulière}}
\end{tikzcd}$$

Géométrie algébrique projective noncommmutative

Peut-on associer à une algèbre AS régulière un espace géométrique ?

$\mathbb{P}^n$	$\longleftrightarrow$	$\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ $\deg(x_i) = 1$
$\mathrm{proj}(A) =$ idéaux homogènes premiers sauf $A_{\geqslant 1}$	$\longleftrightarrow$	$\mathbb{C}$-algèbre commutative A $\mathbb{N}$-graduée de type finie
X idéaux premiers homogènes sauf $A_{\geqslant 1}$	$\longleftrightarrow$	Algèbre AS régulière

Il y a trop peu d'idéaux premiers homogènes en non commutatif :

- $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)$ a seulement 4 idéaux homogènes : $\{0\}$, $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$ et $\langle x, y \rangle$
- le plan de Jordan a 3 idéaux homogènes : $\{0\}$, $\langle x \rangle$ et $\langle x, y \rangle$...

Géométrie algébrique projective noncommmutative

Peut-on associer à une algèbre AS régulière un espace géométrique ?

$\boxed{\mathbb{P}^n}$	$\longleftrightarrow$	$\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ $\deg(x_i) = 1$
$\mathrm{proj}(A) =$ idéaux homogènes premiers sauf $A_{\geqslant 1}$	$\longleftrightarrow$	$\mathbb{C}$-algèbre commutative A $\mathbb{N}$-graduée de type finie
X idéaux premiers homogènes sauf $A_{\geqslant 1}$	$\longleftrightarrow$	Algèbre AS régulière

Il y a trop peu d'idéaux premiers homogènes en non commutatif :

- $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)$ a seulement 4 idéaux homogènes : $\{0\}$, $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$ et $\langle x, y \rangle$
- le plan de Jordan a 3 idéaux homogènes : $\{0\}$, $\langle x \rangle$ et $\langle x, y \rangle$...
- À comparer avec les idéaux $\{0\}$, $\langle y \rangle$, $\langle x - sy \rangle$ et $\langle x, y \rangle$ de $\mathbb{C}[x, y]$, où $s \in \mathbb{C}$.

Schéma projectif noncommmutative

Schéma projectif noncommmutative

Définition (Artin et Zhang, '94)

Soit A une algèbre AS régulière noethérienne. On appelle ***schéma projectif noncommmutative*** *associé à A et on note $\mathrm{qgr}\text{-}A$ la catégorie quotient de la catégorie $\mathrm{gr}\text{-}A$ abélienne des A-modules à droite $\mathbb{Z}$-gradués de type fini par la sous-catégorie pleine $\mathrm{tors}\text{-}A$ des modules de torsion.*

Schéma projectif noncommmutative

Définition (Artin et Zhang, '94)

Soit A une algèbre AS régulière noethérienne. On appelle ***schéma projectif noncommmutative*** *associé à A et on note $\mathrm{qgr}\text{-}A$ la catégorie quotient de la catégorie $\mathrm{gr}\text{-}A$ abélienne des A-modules à droite $\mathbb{Z}$-gradués de type fini par la sous-catégorie pleine $\mathrm{tors}\text{-}A$ des modules de torsion.*

Exemple

Si A est une $\mathbb{k}$-algèbre commutative $\mathbb{N}$-graduée de type finie alors $\mathrm{qgr}\text{-}A$ est équivalente à la catégorie $\mathrm{coh}X$ des faisceaux cohérents sur $X = \mathrm{proj}(A)$, le schéma projectif associé à A.

Schéma projectif noncommmutative

Définition (Artin et Zhang, '94)

Soit A une algèbre AS régulière noethérienne. On appelle ***schéma projectif noncommmutative*** *associé à A et on note $\mathrm{qgr}\text{-}A$ la catégorie quotient de la catégorie $\mathrm{gr}\text{-}A$ abélienne des A-modules à droite $\mathbb{Z}$-gradués de type fini par la sous-catégorie pleine $\mathrm{tors}\text{-}A$ des modules de torsion.*

Exemple

Si A est une $\Bbbk$-algèbre commutative $\mathbb{N}$-graduée de type finie alors $\mathrm{qgr}\text{-}A$ est équivalente à la catégorie $\mathrm{coh}X$ des faisceaux cohérents sur $X = \mathrm{proj}(A)$, le schéma projectif associé à A.

Proposition (Zhang, '96)

Deux algèbres $\mathbb{N}$-graduées qui sont twists de Zhang l'une de l'autre ont des schémas projectifs noncommmutatives équivalents.

Schéma projectif noncommmutative

Définition (Artin et Zhang, '94)

Soit A une algèbre AS régulière noethérienne. On appelle ***schéma projectif noncommmutative*** *associé à A et on note $\mathrm{qgr}\text{-}A$ la catégorie quotient de la catégorie $\mathrm{gr}\text{-}A$ abélienne des A-modules à droite $\mathbb{Z}$-gradués de type fini par la sous-catégorie pleine $\mathrm{tors}\text{-}A$ des modules de torsion.*

Exemple

Si A est une $\Bbbk$-algèbre commutative $\mathbb{N}$-graduée de type finie alors $\mathrm{qgr}\text{-}A$ est équivalente à la catégorie $\mathrm{coh}X$ des faisceaux cohérents sur $X = \mathrm{proj}(A)$, le schéma projectif associé à A.

Proposition (Zhang, '96)

Deux algèbres $\mathbb{N}$-graduées qui sont twists de Zhang l'une de l'autre ont des schémas projectifs noncommmutatives équivalents.

Exemple

Le plan quantique $B = \mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ et le plan de Jordan J sont tous deux des twists de Zhang de $A = \Bbbk[x, y]$, donc $\mathrm{qgr}\text{-}B \simeq \mathrm{qgr}\text{-}C \simeq \mathrm{qgr}\text{-}A \simeq \mathrm{coh}\text{-}\mathbb{P}^1$.

Twist de Zhang

Définition - Proposition (Zhang '96)

Soit A une $\Bbbk$-algèbre $\mathbb{N}$-graduée et soit σ un automorphisme gradué de A.

Twist de Zhang

Définition - Proposition (Zhang '96)

*Soit A une $\mathbb{k}$-algèbre $\mathbb{N}$-graduée et soit σ un automorphisme gradué de A. Le **twist de Zhang de** A **par** σ est l'algèbre A^σ qui est égale à A en tant que $\mathbb{k}$-espace vectoriel gradué et dont le produit est donné par $a \star b = a\sigma^m(b)$ sur des éléments homogènes $a \in A_m$ et $b \in A_n$.*

Twist de Zhang

Définition - Proposition (Zhang '96)

*Soit A une $\Bbbk$-algèbre $\mathbb{N}$-graduée et soit σ un automorphisme gradué de A. Le **twist de Zhang de** A **par** σ est l'algèbre A^σ qui est égale à A en tant que $\Bbbk$-espace vectoriel gradué et dont le produit est donné par $a \star b = a\sigma^m(b)$ sur des éléments homogènes $a \in A_m$ et $b \in A_n$.*

Exemple

Le plan de Jordan $J = \Bbbk\langle x, y \mid yx - xy = x^2\rangle$ est un twist de Zhang de $A = \Bbbk[x, y]$.

Twist de Zhang

Définition - Proposition (Zhang '96)

*Soit A une $\Bbbk$-algèbre $\mathbb{N}$-graduée et soit σ un automorphisme gradué de A. Le **twist de Zhang de** A **par** σ est l'algèbre A^σ qui est égale à A en tant que $\Bbbk$-espace vectoriel gradué et dont le produit est donné par $a \star b = a\sigma^m(b)$ sur des éléments homogènes $a \in A_m$ et $b \in A_n$.*

Exemple

Le plan de Jordan $J = \Bbbk\langle x, y \mid yx - xy = x^2\rangle$ est un twist de Zhang de $A = \Bbbk[x, y]$. Avec $\sigma \in \mathrm{Aut}(A)$ donné par $\sigma(x) = x$ et $\sigma(y) = y - x$:

$$
\begin{aligned}
x \star y &= x\sigma(y) = xy - x^2 \\
y \star x &= y\sigma(x) = yx = xy \\
x \star x &= x\sigma(x) = x^2
\end{aligned}
$$

Twist de Zhang

Définition - Proposition (Zhang '96)

*Soit A une $\mathbb{k}$-algèbre $\mathbb{N}$-graduée et soit σ un automorphisme gradué de A. Le **twist de Zhang de** A **par** σ est l'algèbre A^σ qui est égale à A en tant que $\mathbb{k}$-espace vectoriel gradué et dont le produit est donné par $a \star b = a\sigma^m(b)$ sur des éléments homogènes $a \in A_m$ et $b \in A_n$.*

Exemple

Le plan de Jordan $J = \mathbb{k}\langle x, y \mid yx - xy = x^2\rangle$ est un twist de Zhang de $A = \mathbb{k}[x, y]$. Avec $\sigma \in \mathrm{Aut}(A)$ donné par $\sigma(x) = x$ et $\sigma(y) = y - x$:

$$\left.\begin{array}{l} x \star y = x\sigma(y) = xy - x^2 \\ y \star x = y\sigma(x) = yx = xy \\ x \star x = x\sigma(x) = x^2 \end{array}\right\} \implies y \star x - x \star y = x \star x$$

Twist de Zhang

Définition - Proposition (Zhang '96)

*Soit A une $\Bbbk$-algèbre $\mathbb{N}$-graduée et soit σ un automorphisme gradué de A. Le **twist de Zhang de** A **par** σ est l'algèbre A^σ qui est égale à A en tant que $\Bbbk$-espace vectoriel gradué et dont le produit est donné par $a \star b = a\sigma^m(b)$ sur des éléments homogènes $a \in A_m$ et $b \in A_n$.*

Exemple

Le plan de Jordan $J = \Bbbk\langle x, y \mid yx - xy = x^2\rangle$ est un twist de Zhang de $A = \Bbbk[x, y]$. Avec $\sigma \in \mathrm{Aut}(A)$ donné par $\sigma(x) = x$ et $\sigma(y) = y - x$:

$$\left.\begin{array}{l} x \star y = x\sigma(y) = xy - x^2 \\ y \star x = y\sigma(x) = yx = xy \\ x \star x = x\sigma(x) = x^2 \end{array}\right\} \implies y \star x - x \star y = x \star x$$

Donc il existe un morphisme de $\Bbbk$-algèbres surjectif $J \to A^\sigma$. Or $h_J(t) = (1-t)^{-2}$ et $h_{A^\sigma}(t) = h_A(t) = (1-t)^{-2}$ donc $J \cong A^\sigma$.

Algèbres Calabi-Yau (tordues)

On note $R^e = R \otimes_{\mathbb{k}} R^{op}$.

Algèbres Calabi-Yau (tordues)

On note $R^e = R \otimes_{\mathbb{k}} R^{op}$.

Définition (Ginsburg, Reyes-Rogalski-Zhang)

Une $\mathbb{k}$-algèbre $\mathbb{N}$-graduée R est dite Calabi-Yau tordue (CY tordue) si

- *R a une résolution projective finie de R^e-modules de type fini*

Algèbres Calabi-Yau (tordues)

On note $R^e = R \otimes_{\Bbbk} R^{op}$.

Définition (Ginsburg, Reyes-Rogalski-Zhang)

Une $\Bbbk$-algèbre $\mathbb{N}$-graduée R est dite Calabi-Yau tordue (CY tordue) si

- *R a une résolution projective finie de R^e-modules de type fini*
- *Il existe un entier d et un automorphisme d'algèbre $\mu \in Aut(A)$ tels que* $Ext^i_{R^e}(R, R^e) \cong \begin{cases} 0 & i \neq d \\ {}^1R^{\mu}(\ell) & i = d \end{cases}$

en tant que R^e-modules gradués. Ici $\ell \in \mathbb{Z}$ et ${}^1R^{\mu}(\ell)$ est le R-bimodule isomorphe à R en tant que $\Bbbk$-espace vectoriel et tel que $r \cdot s \cdot t = rs\mu(t)$.

Algèbres Calabi-Yau (tordues)

On note $R^e = R \otimes_{\mathbb{k}} R^{op}$.

Définition (Ginsburg, Reyes-Rogalski-Zhang)

Une $\mathbb{k}$-algèbre $\mathbb{N}$-graduée R est dite Calabi-Yau tordue (CY tordue) si

- *R a une résolution projective finie de R^e-modules de type fini*
- *Il existe un entier d et un automorphisme d'algèbre $\mu \in Aut(A)$ tels que $Ext^i_{R^e}(R, R^e) \cong \begin{cases} 0 & i \neq d \\ {}^1R^\mu(\ell) & i = d \end{cases}$*

en tant que R^e-modules gradués. Ici $\ell \in \mathbb{Z}$ et ${}^1R^\mu(\ell)$ est le R-bimodule isomorphe à R en tant que $\mathbb{k}$-espace vectoriel et tel que $r \cdot s \cdot t = rs\mu(t)$. L'automorphisme μ est appelé l'automorphisme de Nakayama et, si il est intérieur, alors R est dite Calabi-Yau (CY).

Algèbres Calabi-Yau (tordues)

On note $R^e = R \otimes_{\mathbb{k}} R^{op}$.

Définition (Ginsburg, Reyes-Rogalski-Zhang)

Une $\mathbb{k}$-algèbre $\mathbb{N}$-graduée R est dite Calabi-Yau tordue (CY tordue) si

- *R a une résolution projective finie de R^e-modules de type fini*
- *Il existe un entier d et un automorphisme d'algèbre $\mu \in Aut(A)$ tels que $Ext^i_{R^e}(R, R^e) \cong \begin{cases} 0 & i \neq d \\ {}^1R^{\mu}(\ell) & i = d \end{cases}$*

en tant que R^e-modules gradués. Ici $\ell \in \mathbb{Z}$ et ${}^1R^{\mu}(\ell)$ est le R-bimodule isomorphe à R en tant que $\mathbb{k}$-espace vectoriel et tel que $r \cdot s \cdot t = rs\mu(t)$. L'automorphisme μ est appelé l'automorphisme de Nakayama et, si il est intérieur, alors R est dite Calabi-Yau (CY).

Proposition (Reyes, Rogalski et Zhang, '14)

Une $\mathbb{k}$-algèbre AS régulière $R = \bigoplus_{i \geqslant 0} R_i$ avec $R_0 = \mathbb{k}$ est toujours CY tordue.

Retour à la dimension 4, sur $\mathbb{C}$

Pym étudie les schémas projectifs noncommutatifs provenant d'algèbres quadratiques, Koszul et avec série de Hilbert $(1-t)^{-4}$.

Retour à la dimension 4, sur $\mathbb{C}$

Pym étudie les schémas projectifs noncommutatifs provenant d'algèbres quadratiques, Koszul et avec série de Hilbert $(1-t)^{-4}$.

On peut se peut se ramener, par twist de Zhang analytique, à un représentant canonique qui est Calabi-Yau et Koszul.

Retour à la dimension 4, sur $\mathbb{C}$

Pym étudie les schémas projectifs noncommutatifs provenant d'algèbres quadratiques, Koszul et avec série de Hilbert $(1-t)^{-4}$.

On peut se peut se ramener, par twist de Zhang analytique, à un représentant canonique qui est Calabi-Yau et Koszul.

Théorème (Pym '15)

Il existe 6 familles irréductibles de déformations lisses graduées de $A = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ en tant qu'algèbre Calabi-Yau, Koszul et ayant série de Hilbert $(1-t)^{-4}$.

Retour à la dimension 4, sur $\mathbb{C}$

Pym étudie les schémas projectifs noncommutatifs provenant d'algèbres quadratiques, Koszul et avec série de Hilbert $(1-t)^{-4}$.

On peut se peut se ramener, par twist de Zhang analytique, à un représentant canonique qui est Calabi-Yau et Koszul.

Théorème (Pym '15)

Il existe 6 *familles irréductibles de déformations lisses graduées de* $A = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ *en tant qu'algèbre Calabi-Yau, Koszul et ayant série de Hilbert* $(1-t)^{-4}$.

$\rightarrow$ Par paramétrisation de la variété des structures de Poisson unimodulaires et quadratiques sur $\mathbb{P}^3$.

Classification de Pym [1]

Les 6 familles du théorème de Pym sont les adhérences des $GL(4, \mathbb{C})$-orbites des formes normales suivantes :

Type	Orbit dimension	Relations	Description
$\mathsf{L}(1,1,1,1)$	14	(3)	A skew-polynomial ring that is Calabi–Yau [40, Example 5.5]
$\mathsf{L}(1,1,2)$	17	(5)	An algebra from [11, Theorem 1.1] that is Calabi–Yau
$\mathsf{R}(2,2)$	16	(7)	A four-dimensional Sklyanin algebra [5, 43, 44]
$\mathsf{R}(1,3)$	21	(9)	A central extension of a three-dimensional Sklyanin algebra [31]
$\mathsf{S}(2,3)$	17	(11)	An Ore extension of $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ by a divergence-free derivation
$\mathsf{E}(3)$	13	(15)	The quantization of the third symmetric power of $\mathbb{P}^1$

1. B. Pym, "Quantum deformations of projective three-space", Adv. Math., No. 281, 1216-1241, (2015)

L'algèbre de Pym $E(3)$

Le type $E(3)$ correspond à l'algèbre engendrée par $x_0, \ldots, x_3$ soumis aux relations

$$
\begin{aligned}
[x_0, x_1] &= 5x_0^2 \\
[x_0, x_2] &= -\frac{45}{2}x_0^2 + 5x_0x_1 \\
[x_0, x_3] &= \frac{195}{2}x_0^2 - \frac{45}{2}x_0x_1 + 5x_0x_2 \\
[x_1, x_2] &= -\frac{3}{2}x_0x_1 + 3x_0x_2 + x_1^2 \\
[x_1, x_3] &= 5x_0x_1 - 3x_0x_2 + 7x_0x_3 - \frac{5}{2}x_1^2 + x_1x_2 \\
[x_2, x_3] &= -\frac{77}{2}x_0x_2 - \frac{77}{2}x_0x_3 + \frac{21}{2}x_1x_2 + 7x_1x_3 - 3x_2^2.
\end{aligned}
$$

L'algèbre de Pym $E(3)$

Le type $E(3)$ correspond à l'algèbre engendrée par $x_0, \ldots, x_3$ soumis aux relations

$$\begin{aligned}
[x_0, x_1] &= 5x_0^2 \\
[x_0, x_2] &= -\frac{45}{2}x_0^2 + 5x_0x_1 \\
[x_0, x_3] &= \frac{195}{2}x_0^2 - \frac{45}{2}x_0x_1 + 5x_0x_2 \\
[x_1, x_2] &= -\frac{3}{2}x_0x_1 + 3x_0x_2 + x_1^2 \\
[x_1, x_3] &= 5x_0x_1 - 3x_0x_2 + 7x_0x_3 - \frac{5}{2}x_1^2 + x_1x_2 \\
[x_2, x_3] &= -\frac{77}{2}x_0x_2 - \frac{77}{2}x_0x_3 + \frac{21}{2}x_1x_2 + 7x_1x_3 - 3x_2^2.
\end{aligned}$$

L'algèbre de Pym $E(3)$

Le type $E(3)$ correspond à l'algèbre engendrée par $x_0, \dots, x_3$ soumis aux relations

$$
\begin{aligned}
[x_0, x_1] &= 5x_0^2 \\
[x_0, x_2] &= -\frac{45}{2}x_0^2 + 5x_0x_1 \\
[x_0, x_3] &= \frac{195}{2}x_0^2 - \frac{45}{2}x_0x_1 + 5x_0x_2 \\
[x_1, x_2] &= -\frac{3}{2}x_0x_1 + 3x_0x_2 + x_1^2 \\
[x_1, x_3] &= 5x_0x_1 - 3x_0x_2 + 7x_0x_3 - \frac{5}{2}x_1^2 + x_1x_2 \\
[x_2, x_3] &= -\frac{77}{2}x_0x_2 - \frac{77}{2}x_0x_3 + \frac{21}{2}x_1x_2 + 7x_1x_3 - 3x_2^2.
\end{aligned}
$$

L'algèbre de Pym $E(3)$

Le type $E(3)$ correspond à l'algèbre engendrée par $x_0, \ldots, x_3$ soumis aux relations

$$
\begin{aligned}
[x_0, x_1] &= 5x_0^2 \quad \Longrightarrow \quad x_0x_1 = x_1'x_0\\
[x_0, x_2] &= -\frac{45}{2}x_0^2 + 5x_0x_1 \quad \Longrightarrow \quad x_0x_2 = x_2'x_0\\
[x_0, x_3] &= \frac{195}{2}x_0^2 - \frac{45}{2}x_0x_1 + 5x_0x_2 \quad \Longrightarrow \quad x_0x_3 = x_3'x_0\\
[x_1, x_2] &= -\frac{3}{2}x_0x_1 + 3x_0x_2 + x_1^2\\
[x_1, x_3] &= 5x_0x_1 - 3x_0x_2 + 7x_0x_3 - \frac{5}{2}x_1^2 + x_1x_2\\
[x_2, x_3] &= -\frac{77}{2}x_0x_2 - \frac{77}{2}x_0x_3 + \frac{21}{2}x_1x_2 + 7x_1x_3 - 3x_2^2.
\end{aligned}
$$

L'algèbre de Pym $E(3)$

Le type $E(3)$ correspond à l'algèbre engendrée par $x_0, \ldots, x_3$ soumis aux relations

$$
\begin{aligned}
[x_0, x_1] &= 5x_0^2 \\
[x_0, x_2] &= -\frac{45}{2}x_0^2 + 5x_0x_1 \\
[x_0, x_3] &= \frac{195}{2}x_0^2 - \frac{45}{2}x_0x_1 + 5x_0x_2 \\
[x_1, x_2] &= -\frac{3}{2}x_0x_1 + 3x_0x_2 + x_1^2 \\
[x_1, x_3] &= 5x_0x_1 - 3x_0x_2 + 7x_0x_3 - \frac{5}{2}x_1^2 + x_1x_2 \\
[x_2, x_3] &= -\frac{77}{2}x_0x_2 - \frac{77}{2}x_0x_3 + \frac{21}{2}x_1x_2 + 7x_1x_3 - 3x_2^2.
\end{aligned}
$$

L'algèbre de Pym $E(3)$

Le type $E(3)$ correspond à l'algèbre engendrée par $x_0, \ldots, x_3$ soumis aux relations

$$
\begin{aligned}
[x_0, x_1] &= 5x_0^2 \\
[x_0, x_2] &= -\frac{45}{2}x_0^2 + 5x_0x_1 \\
[x_0, x_3] &= \frac{195}{2}x_0^2 - \frac{45}{2}x_0x_1 + 5x_0x_2 \\
[x_1, x_2] &= -\frac{3}{2}x_0x_1 + 3x_0x_2 + x_1^2 \\
[x_1, x_3] &= 5x_0x_1 - 3x_0x_2 + 7x_0x_3 - \frac{5}{2}x_1^2 + x_1x_2 \\
[x_2, x_3] &= -\frac{77}{2}x_0x_2 - \frac{77}{2}x_0x_3 + \frac{21}{2}x_1x_2 + 7x_1x_3 - 3x_2^2.
\end{aligned}
$$

Construction des algèbres $A(n, a)$ et $R(n, a)$

Soit $A = \mathbb{k}[X_0, \ldots, X_n]$ et, pour $a \in \mathbb{k}$, soit Δ et Γ_a deux dérivations de A données pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$ par :

$$\Delta(X_i) = X_{i-1} \quad \text{et} \quad \Gamma_a(X_i) = (a+i)X_i \qquad (X_{-1} := 0)$$

Construction des algèbres $A(n, a)$ et $R(n, a)$

Soit $A = \mathbb{k}[X_0, \ldots, X_n]$ et, pour $a \in \mathbb{k}$, soit Δ et Γ_a deux dérivations de A données pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$ par :

$$\Delta(X_i) = X_{i-1} \quad \text{et} \quad \Gamma_a(X_i) = (a+i)X_i \qquad (X_{-1} := 0)$$

On a $[\Delta, \Gamma_a] = \Delta \circ \Gamma_a - \Gamma_a \circ \Delta = \Delta$.

Construction des algèbres $A(n,a)$ et $R(n,a)$

Soit $A = \Bbbk[X_0, \ldots, X_n]$ et, pour $a \in \Bbbk$, soit Δ et Γ_a deux dérivations de A données pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$ par :

$$\Delta(X_i) = X_{i-1} \quad \text{et} \quad \Gamma_a(X_i) = (a+i)X_i \qquad (X_{-1} := 0)$$

On a $[\Delta, \Gamma_a] = \Delta \circ \Gamma_a - \Gamma_a \circ \Delta = \Delta$. En posant pour $f, g \in A$ par

$$\{f, g\} = \Delta(f)\Gamma_a(g) - \Delta(g)\Gamma_a(f)$$

on obtient un **crochet de Poisson** sur A.

Construction des algèbres $A(n, a)$ et $R(n, a)$

Soit $A = \Bbbk[X_0, \ldots, X_n]$ et, pour $a \in \Bbbk$, soit Δ et Γ_a deux dérivations de A données pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$ par :

$$\Delta(X_i) = X_{i-1} \quad \text{et} \quad \Gamma_a(X_i) = (a + i)X_i \qquad (X_{-1} := 0)$$

On a $[\Delta, \Gamma_a] = \Delta \circ \Gamma_a - \Gamma_a \circ \Delta = \Delta$. En posant pour $f, g \in A$ par

$$\{f, g\} = \Delta(f)\Gamma_a(g) - \Delta(g)\Gamma_a(f)$$

on obtient un **crochet de Poisson** sur A. On note $A(n, a) = (A, \{-, -\})$.

Une formule de déformation

On supposera dans la suite $\operatorname{car} \mathbb{k} = 0$.

Une formule de déformation

On supposera dans la suite $\operatorname{car} \Bbbk = 0$. Pour tout $x, y \in A = \Bbbk[X_0, \ldots, X_n]$ on pose

$$x \star y = \sum_{i \geqslant 0} \Delta^i(x) \binom{\Gamma_a}{i}(y) = xy + \Delta(x)\Gamma_a(y) + \cdots$$

où $\binom{\Gamma_a}{i} = \frac{1}{i!}\Gamma_a(\Gamma_a - \mathrm{id}) \cdots (\Gamma_a - (i-1)\mathrm{id})$.

Une formule de déformation

On supposera dans la suite $\operatorname{car} \Bbbk = 0$. Pour tout $x, y \in A = \Bbbk[X_0, \ldots, X_n]$ on pose

$$x \star y = \sum_{i \geqslant 0} \Delta^i(x) \binom{\Gamma_a}{i}(y) = xy + \Delta(x)\Gamma_a(y) + \cdots$$

où $\displaystyle\binom{\Gamma_a}{i} = \frac{1}{i!}\Gamma_a(\Gamma_a - \mathrm{id}) \cdots (\Gamma_a - (i-1)\mathrm{id})$.

- Puisque $\Delta^{n+1}(X_i) = 0$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, la dérivation Δ est localement nilpotente, donc $x \star y \in A$ pour tout $x, y \in A$.

Une formule de déformation

On supposera dans la suite $\operatorname{car} \Bbbk = 0$. Pour tout $x, y \in A = \Bbbk[X_0, \ldots, X_n]$ on pose

$$x \star y = \sum_{i \geqslant 0} \Delta^i(x) \binom{\Gamma_a}{i}(y) = xy + \Delta(x)\Gamma_a(y) + \cdots$$

où $\displaystyle \binom{\Gamma_a}{i} = \frac{1}{i!}\Gamma_a(\Gamma_a - \mathrm{id}) \cdots (\Gamma_a - (i-1)\mathrm{id})$.

- Puisque $\Delta^{n+1}(X_i) = 0$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, la dérivation Δ est localement nilpotente, donc $x \star y \in A$ pour tout $x, y \in A$.

Proposition (Coll-Gerstenhaber-Giaquinto 1989)

La loi de composition interne $\star$ est associative.

Une formule de déformation

On supposera dans la suite $\mathrm{car}\,\Bbbk = 0$. Pour tout $x, y \in A = \Bbbk[X_0, \dots, X_n]$ on pose

$$x \star y = \sum_{i \geqslant 0} \Delta^i(x) \binom{\Gamma_a}{i}(y) = xy + \Delta(x)\Gamma_a(y) + \cdots$$

où $\displaystyle\binom{\Gamma_a}{i} = \frac{1}{i!}\Gamma_a(\Gamma_a - \mathrm{id})\cdots(\Gamma_a - (i-1)\mathrm{id})$.

• Puisque $\Delta^{n+1}(X_i) = 0$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, la dérivation Δ est localement nilpotente, donc $x \star y \in A$ pour tout $x, y \in A$.

Proposition (Coll-Gerstenhaber-Giaquinto 1989)

La loi de composition interne $\star$ est associative.

• On note $R(n, a) = (A, \star)$.

Exemples

- $R(1, a)$ est isomorphe au plan de Jordan (si $a \neq 0$) :

$$X_0 \star X_1 = X_1 \star X_0 - aX_0 \star X_0 \quad \text{et} \quad \{X_0, X_1\} = -aX_0^2$$

Exemples

- $R(1, a)$ est isomorphe au plan de Jordan (si $a \neq 0$) :

$$X_0 \star X_1 = X_1 \star X_0 - aX_0 \star X_0 \quad \text{et} \quad \{X_0, X_1\} = -aX_0^2$$

- $R(2, a)$ a pour relations

$$\begin{aligned}
X_0 \star X_1 - X_1 \star X_0 &= -\, aX_0 \star X_0 \\
X_0 \star X_2 - X_2 \star X_0 &= -\, aX_0 \star X_1 - \binom{a}{2} X_0 \star X_0 \\
X_1 \star X_2 - X_2 \star X_1 &= (a+2)X_0 \star X_2 - (a+1)X_1 \star X_1 \\
&\qquad + \binom{a+2}{2} X_0 \star X_1.
\end{aligned}$$

Exemples

- $R(1, a)$ est isomorphe au plan de Jordan (si $a \neq 0$) :

$$X_0 \star X_1 = X_1 \star X_0 - aX_0 \star X_0 \quad \text{et} \quad \{X_0, X_1\} = -aX_0^2$$

- $R(2, a)$ a pour relations

$$\begin{aligned} X_0 \star X_1 - X_1 \star X_0 =& - aX_0 \star X_0 \\ X_0 \star X_2 - X_2 \star X_0 =& - aX_0 \star X_1 - \binom{a}{2} X_0 \star X_0 \\ X_1 \star X_2 - X_2 \star X_1 =& (a+2)X_0 \star X_2 - (a+1)X_1 \star X_1 \\ & + \binom{a+2}{2} X_0 \star X_1. \end{aligned}$$

- $A(2, a)$ a pour crochet de Poisson $\{X_0, X_1\} = -aX_0^2$,

$$\{X_0, X_2\} = -aX_0X_1,\ \{X_0, X_2\} = (a+2)X_0X_2 - (a+1)X_1^2$$

Exemples

- $R(1, a)$ est isomorphe au plan de Jordan (si $a \neq 0$) :
$$X_0 \star X_1 = X_1 \star X_0 - aX_0 \star X_0 \quad \text{et} \quad \{X_0, X_1\} = -aX_0^2$$
- $R(2, a)$ a pour relations
$$\begin{aligned} X_0 \star X_1 - X_1 \star X_0 =& - aX_0 \star X_0 \\ X_0 \star X_2 - X_2 \star X_0 =& - aX_0 \star X_1 - \binom{a}{2} X_0 \star X_0 \\ X_1 \star X_2 - X_2 \star X_1 =& (a+2)X_0 \star X_2 - (a+1)X_1 \star X_1 \\ & + \binom{a+2}{2} X_0 \star X_1. \end{aligned}$$
- $A(2, a)$ a pour crochet de Poisson $\{X_0, X_1\} = -aX_0^2$,
$$\{X_0, X_2\} = -aX_0X_1, \ \{X_0, X_2\} = (a+2)X_0X_2 - (a+1)X_1^2$$
- $R(3, -5/4)$ est l'exemple de Pym.

$R(n, a)$ est une déformation de $A(n, a)$

- $R(n, a)$ est graduée pour le degré $d(X_i) = 1$,

$R(n, a)$ est une déformation de $A(n, a)$

- $R(n, a)$ est graduée pour le degré $d(X_i) = 1$,
- $R(n, a)$ est filtrée pour le degré $\varepsilon(X_i) = i$, on note $(R^{\leqslant i})_{i \in \mathbb{N}}$ la filtration,

$R(n,a)$ est une déformation de $A(n,a)$

- $R(n,a)$ est graduée pour le degré $d(X_i) = 1$,
- $R(n,a)$ est filtrée pour le degré $\varepsilon(X_i) = i$, on note $(R^{\leqslant i})_{i\in\mathbb{N}}$ la filtration,
- $\Delta(R^{\leqslant i}) \subset R^{\leqslant i-1}$ et $\Gamma_a(R^{\leqslant i}) \subset R^{\leqslant i}$,

$R(n,a)$ est une déformation de $A(n,a)$

- $R(n,a)$ est graduée pour le degré $d(X_i) = 1$,
- $R(n,a)$ est filtrée pour le degré $\varepsilon(X_i) = i$, on note $(R^{\leqslant i})_{i\in\mathbb{N}}$ la filtration,
- $\Delta(R^{\leqslant i}) \subset R^{\leqslant i-1}$ et $\Gamma_a(R^{\leqslant i}) \subset R^{\leqslant i}$,
- le gradué associé est commutatif, isomorphe à A,

$R(n,a)$ est une déformation de $A(n,a)$

- $R(n,a)$ est graduée pour le degré $d(X_i) = 1$,
- $R(n,a)$ est filtrée pour le degré $\varepsilon(X_i) = i$, on note $(R^{\leqslant i})_{i\in\mathbb{N}}$ la filtration,
- $\Delta(R^{\leqslant i}) \subset R^{\leqslant i-1}$ et $\Gamma_a(R^{\leqslant i}) \subset R^{\leqslant i}$,
- le gradué associé est commutatif, isomorphe à A, donc il peut être muni d'un crochet de Poisson. Si $\varepsilon(a) = i$ et $\varepsilon(b) = j$:

$$\begin{aligned}\{a + R^{\leqslant i-1}, b + R^{\leqslant j-1}\} :=& (a \star b - b \star a) + R^{\leqslant i+j-2} \\ =& \Delta(a_i)\Gamma_a(b_j) - \Delta(b_j)\Gamma_a(a_i) + R^{\leqslant i+j-2}\end{aligned}$$

$R(n,a)$ est une déformation de $A(n,a)$

- $R(n,a)$ est graduée pour le degré $d(X_i) = 1$,
- $R(n,a)$ est filtrée pour le degré $\varepsilon(X_i) = i$, on note $(R^{\leqslant i})_{i\in\mathbb{N}}$ la filtration,
- $\Delta(R^{\leqslant i}) \subset R^{\leqslant i-1}$ et $\Gamma_a(R^{\leqslant i}) \subset R^{\leqslant i}$,
- le gradué associé est commutatif, isomorphe à A, donc il peut être muni d'un crochet de Poisson. Si $\varepsilon(a) = i$ et $\varepsilon(b) = j$:

$$\begin{aligned}\{a + R^{\leqslant i-1}, b + R^{\leqslant j-1}\} :=&(a \star b - b \star a) + R^{\leqslant i+j-2}\\ =&\Delta(a_i)\Gamma_a(b_j) - \Delta(b_j)\Gamma_a(a_i) + R^{\leqslant i+j-2}\end{aligned}$$

- le gradué associé est isomorphe à $A(n,a)$ en tant qu'algèbres de Poisson.

$R(n,a)$ est une déformation de $A(n,a)$

- $R(n,a)$ est graduée pour le degré $d(X_i) = 1$,
- $R(n,a)$ est filtrée pour le degré $\varepsilon(X_i) = i$, on note $(R^{\leqslant i})_{i\in\mathbb{N}}$ la filtration,
- $\Delta(R^{\leqslant i}) \subset R^{\leqslant i-1}$ et $\Gamma_a(R^{\leqslant i}) \subset R^{\leqslant i}$,
- le gradué associé est commutatif, isomorphe à A, donc il peut être muni d'un crochet de Poisson. Si $\varepsilon(a) = i$ et $\varepsilon(b) = j$:

$$\begin{aligned}\{a + R^{\leqslant i-1}, b + R^{\leqslant j-1}\} :=& (a \star b - b \star a) + R^{\leqslant i+j-2} \\ =& \Delta(a_i)\Gamma_a(b_j) - \Delta(b_j)\Gamma_a(a_i) + R^{\leqslant i+j-2}\end{aligned}$$

- le gradué associé est isomorphe à $A(n,a)$ en tant qu'algèbres de Poisson. Par exemple dans $R(2,a)$:

$$X_1 \star X_2 - X_2 \star X_1 = (a+2)X_0 \star X_2 - (a+1)X_1 \star X_1 + \binom{a+2}{2} X_0 \star X_1$$

donne $\{\overline{X_1}, \overline{X_2}\} = (a+2)\overline{X_0} \cdot \overline{X_2} - (a+1)\overline{X_1} \cdot \overline{X_1}$.

Proposition permettant des arguments de récurrence

Proposition

On suppose $a \neq 0$ et on considère $F \in A$. Alors on a les équivalences suivantes :

1. *F est normal dans $R(n, a)$, i.e. $F \star R(n, a) = R(n, a) \star F$*

Proposition permettant des arguments de récurrence

Proposition

On suppose $a \neq 0$ et on considère $F \in A$. Alors on a les équivalences suivantes :

1. *F est normal dans $R(n,a)$, i.e. $F \star R(n,a) = R(n,a) \star F$*
2. *F est Poisson normal dans $A(n,a)$, i.e. $\{F, A(n,a)\} \subset FA(n,a)$*

Proposition permettant des arguments de récurrence

Proposition

On suppose $a \neq 0$ et on considère $F \in A$. Alors on a les équivalences suivantes :

1. *F est normal dans $R(n,a)$, i.e. $F \star R(n,a) = R(n,a) \star F$*
2. *F est Poisson normal dans $A(n,a)$, i.e. $\{F, A(n,a)\} \subset FA(n,a)$*
3. *$F \in \ker \Delta$ et $\Gamma_a(F) = uF$ pour un scalaire $u \in \mathbb{k}$.*

Proposition permettant des arguments de récurrence

Proposition

On suppose $a \neq 0$ et on considère $F \in A$. Alors on a les équivalences suivantes :

1. *F est normal dans $R(n,a)$, i.e. $F \star R(n,a) = R(n,a) \star F$*
2. *F est Poisson normal dans $A(n,a)$, i.e. $\{F, A(n,a)\} \subset FA(n,a)$*
3. *$F \in \ker \Delta$ et $\Gamma_a(F) = uF$ pour un scalaire $u \in \mathbb{k}$.*

- L'élément X_0 est normal dans $R(n,a)$, Poisson normal dans $A(n,a)$ et

$$\frac{R(n,a)}{\langle X_0 \rangle} \cong R(n-1, a+1), \qquad \frac{A(n,a)}{\langle X_0 \rangle} \cong A(n-1, a+1).$$

Étude de $R(n, a)$

Théorèmes (L.-Sierra, '19)

Soit $n \geqslant 1$ *et* $a \in \mathbb{k}$*.*

- $R(n, a)$ *est intègre et noethérienne.*

Étude de $R(n, a)$

Théorèmes (L.-Sierra, '19)

Soit $n \geqslant 1$ *et* $a \in \Bbbk$.

- $R(n, a)$ *est intègre et noethérienne.*
- $R(n, a)$ *est engendrée par* $n + 1$ *générateurs et* $\binom{n+1}{2}$ *relations quadratiques explicites, pour tout* $0 \leqslant i, j \leqslant n$:

$$X_i * X_j - X_j * X_i = \sum_{k=1}^{j} \binom{-a-i}{k} X_{j-k} * X_i - \sum_{\ell=1}^{i} \binom{-a-j}{\ell} X_{i-\ell} * X_j$$

Étude de $R(n, a)$

Théorèmes (L.-Sierra, '19)

Soit $n \geqslant 1$ et $a \in \Bbbk$.

- $R(n, a)$ *est intègre et noethérienne.*
- $R(n, a)$ *est engendrée par $n + 1$ générateurs et $\binom{n+1}{2}$ relations quadratiques explicites, pour tout $0 \leqslant i, j \leqslant n$:*

$$X_i * X_j - X_j * X_i = \sum_{k=1}^{j} \binom{-a-i}{k} X_{j-k} * X_i - \sum_{\ell=1}^{i} \binom{-a-j}{\ell} X_{i-\ell} * X_j$$

- $R(n, a)$ *est Artin-Schelter régulière de dimension $n + 1$.*

Étude de $R(n,a)$

Théorèmes (L.-Sierra, '19)

Soit $n \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{k}$.

- $R(n,a)$ *est intègre et noethérienne.*
- $R(n,a)$ *est engendrée par* $n+1$ *générateurs et* $\binom{n+1}{2}$ *relations quadratiques explicites, pour tout* $0 \leqslant i,j \leqslant n$ *:*

$$X_i * X_j - X_j * X_i = \sum_{k=1}^{j} \binom{-a-i}{k} X_{j-k} * X_i - \sum_{\ell=1}^{i} \binom{-a-j}{\ell} X_{i-\ell} * X_j$$

- $R(n,a)$ *est Artin-Schelter régulière de dimension* $n+1$*.*
- *Pour* $n \geqslant 2$ *et* $a, b \in \mathbb{k}$ *on a :*

$$R(n,a) \cong R(n,b) \iff a = b \iff A(n,a) \cong A(n,b).$$

$R(n, a)$ est CY ?

Théorème (L.-Sierra, '19)

$R(n, a)$ est CY ssi $a = -\dfrac{(n+2)(n-1)}{2(n+1)}$ ssi $A(n, a)$ est unimodulaire.

$R(n,a)$ est CY ?

Théorème (L.-Sierra, '19)

$R(n,a)$ est CY ssi $a = -\dfrac{(n+2)(n-1)}{2(n+1)}$ ssi $A(n,a)$ est unimodulaire.

Pour $n = 3$ on retrouve la valeur $a = -5/4$ de Pym.

$R(n, a)$ est CY ?

Théorème (L.-Sierra, '19)

$R(n, a)$ est CY ssi $a = -\dfrac{(n+2)(n-1)}{2(n+1)}$ ssi $A(n, a)$ est unimodulaire.

Pour $n = 3$ on retrouve la valeur $a = -5/4$ de Pym.

- $R(n, a)$ est AS régulière donc CY tordue, par l'automorphisme de Nakayama μ

$R(n,a)$ est CY ?

Théorème (L.-Sierra, '19)

$R(n,a)$ est CY ssi $a = -\dfrac{(n+2)(n-1)}{2(n+1)}$ ssi $A(n,a)$ est unimodulaire.

Pour $n = 3$ on retrouve la valeur $a = -5/4$ de Pym.

- $R(n,a)$ est AS régulière donc CY tordue, par l'automorphisme de Nakayama μ
- $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}} R(n,a) = \{\lambda\phi_c \mid \lambda \in \Bbbk^\times, c \in \Bbbk\}$ où $\phi_c(X_i) = \sum_{k \geqslant 0} \binom{c}{k} \Delta^k(X_i)$

$R(n, a)$ est CY ?

Théorème (L.-Sierra, '19)

$R(n, a)$ est CY ssi $a = -\dfrac{(n+2)(n-1)}{2(n+1)}$ ssi $A(n, a)$ est unimodulaire.

Pour $n = 3$ on retrouve la valeur $a = -5/4$ de Pym.

- $R(n, a)$ est AS régulière donc CY tordue, par l'automorphisme de Nakayama μ
- $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}} R(n, a) = \{\lambda\phi_c \mid \lambda \in \Bbbk^\times, c \in \Bbbk\}$ où $\phi_c(X_i) = \sum_{k \geqslant 0} \binom{c}{k} \Delta^k(X_i)$
- $R(n, a) = {}^{\phi_a}R(n, 0)$ est un twist de Zhang de $R(n, 0)$

$R(n,a)$ est CY ?

Théorème (L.-Sierra, '19)

$R(n,a)$ est CY ssi $a = -\dfrac{(n+2)(n-1)}{2(n+1)}$ ssi $A(n,a)$ est unimodulaire.

Pour $n = 3$ on retrouve la valeur $a = -5/4$ de Pym.

- $R(n,a)$ est AS régulière donc CY tordue, par l'automorphisme de Nakayama μ
- $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}} R(n,a) = \{\lambda\phi_c \mid \lambda \in \mathbb{k}^\times, c \in \mathbb{k}\}$ où $\phi_c(X_i) = \sum_{k\geqslant 0} \binom{c}{k} \Delta^k(X_i)$
- $R(n,a) = {}^{\phi_a}R(n,0)$ est un twist de Zhang de $R(n,0)$
- L'automorphisme de Nakayama de $R(n,0)$ se calcule par récurrence

$R(n,a)$ est CY ?

Théorème (L.-Sierra, '19)

$R(n,a)$ est CY ssi $a = -\dfrac{(n+2)(n-1)}{2(n+1)}$ ssi $A(n,a)$ est unimodulaire.

Pour $n = 3$ on retrouve la valeur $a = -5/4$ de Pym.

- $R(n,a)$ est AS régulière donc CY tordue, par l'automorphisme de Nakayama μ
- $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}} R(n,a) = \{\lambda\phi_c \mid \lambda \in \mathbb{k}^\times, c \in \mathbb{k}\}$ où $\phi_c(X_i) = \sum_{k\geqslant 0} \binom{c}{k} \Delta^k(X_i)$
- $R(n,a) = {}^{\phi_a}R(n,0)$ est un twist de Zhang de $R(n,0)$
- L'automorphisme de Nakayama de $R(n,0)$ se calcule par récurrence
- L'automorphisme de Nakayama de $R(n,a)$ est ϕ_c pour

$$c = (n+1)a + \binom{n+1}{2} - 1$$

Comparaison $R(n, a)$ et $A(n, a)$

Soit $n \geqslant 2$.

- $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}} R(n, a) \cong \mathbb{k}^\times \times \mathbb{k} \cong \mathrm{PAut}_{\mathrm{gr}} A(n, a)$

Comparaison $R(n,a)$ et $A(n,a)$

Soit $n \geqslant 2$.

- $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}} R(n,a) \cong \mathbb{k}^\times \times \mathbb{k} \cong \mathrm{PAut}_{\mathrm{gr}} A(n,a)$
- Pour tout sous-ensemble P de A :
  - $P \in \mathrm{Spec}\ R(n,a) \iff P \in \mathrm{PSpec}\ A(n,a)$, en particulier les spectres sont homéomorphes

Comparaison $R(n,a)$ et $A(n,a)$

Soit $n \geqslant 2$.

- $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}} R(n,a) \cong \mathbb{k}^\times \times \mathbb{k} \cong \mathrm{PAut}_{\mathrm{gr}} A(n,a)$
- Pour tout sous-ensemble P de A :
  - $P \in \mathrm{Spec}\ R(n,a) \iff P \in \mathrm{PSpec}\ A(n,a)$, en particulier les spectres sont homéomorphes
  - P est un idéal primitif de $R(n,a)$ si et seulement si c'est un idéal Poisson primitif de $A(n,a)$

Comparaison $R(n,a)$ et $A(n,a)$

Soit $n \geqslant 2$.

- $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}} R(n,a) \cong \mathbb{k}^\times \times \mathbb{k} \cong \mathrm{PAut}_{\mathrm{gr}} A(n,a)$
- Pour tout sous-ensemble P de A :
  - $P \in \mathrm{Spec}\ R(n,a) \iff P \in \mathrm{PSpec}\ A(n,a)$, en particulier les spectres sont homéomorphes
  - P est un idéal primitif de $R(n,a)$ si et seulement si c'est un idéal Poisson primitif de $A(n,a)$
- $R(n,a)$ satisfait l'équivalence de Dixmier-Moeglin :

$$\begin{aligned} P \text{ est primitif} &\iff P \text{ est localement clos dans } \mathrm{Spec}\ R(n,a) \\ &\iff Z(\mathrm{Frac}\ R/P) \text{ est algébrique sur } \mathbb{k} \end{aligned}$$

Comparaison $R(n,a)$ et $A(n,a)$

Soit $n \geqslant 2$.

- $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}} R(n,a) \cong \mathbb{k}^\times \times \mathbb{k} \cong \mathrm{PAut}_{\mathrm{gr}} A(n,a)$
- Pour tout sous-ensemble P de A :
  - $P \in \mathrm{Spec}\ R(n,a) \iff P \in \mathrm{PSpec}\ A(n,a)$, en particulier les spectres sont homéomorphes
  - P est un idéal primitif de $R(n,a)$ si et seulement si c'est un idéal Poisson primitif de $A(n,a)$
- $R(n,a)$ satisfait l'équivalence de Dixmier-Moeglin :

$$\begin{aligned} P \text{ est primitif } &\iff P \text{ est localement clos dans } \mathrm{Spec}\ R(n,a) \\ &\iff Z(\mathrm{Frac}\ R/P) \text{ est algébrique sur } \mathbb{k} \end{aligned}$$

et $A(n,a)$ satisfait l'équivalence de Dixmier-Moeglin Poisson.

Comparaison $R(n,a)$ et $A(n,a)$

Soit $n \geqslant 2$.

- $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}} R(n,a) \cong \mathbb{k}^\times \times \mathbb{k} \cong \mathrm{PAut}_{\mathrm{gr}} A(n,a)$
- Pour tout sous-ensemble P de A :
  - $P \in \mathrm{Spec}\ R(n,a) \iff P \in \mathrm{PSpec}\ A(n,a)$, en particulier les spectres sont homéomorphes
  - P est un idéal primitif de $R(n,a)$ si et seulement si c'est un idéal Poisson primitif de $A(n,a)$
- $R(n,a)$ satisfait l'équivalence de Dixmier-Moeglin :

$$\begin{aligned} P \text{ est primitif } &\iff P \text{ est localement clos dans } \mathrm{Spec}\ R(n,a) \\ &\iff Z(\mathrm{Frac}\ R/P) \text{ est algébrique sur } \mathbb{k} \end{aligned}$$

  et $A(n,a)$ satisfait l'équivalence de Dixmier-Moeglin Poisson.
- $\mathrm{Frac}\ R(n,a)$ est isomorphe à un corps de Weyl $D_{1,n-1}(\mathbb{k})$ si et seulement si $a \in \mathbb{Q}$ si et seulement si $\mathrm{Frac}\ A(n,a)$ est isomorphe à un corps de Poisson-Weyl.

Corps des fractions

L'algèbre $R = R(n, a)$ est intègre et noethérienne, elle admet donc un corps des fractions noncommutatif Frac $R(n, a)$.

Corps des fractions

L'algèbre $R = R(n, a)$ est intègre et noethérienne, elle admet donc un corps des fractions noncommutatif Frac $R(n, a)$. On a

$$(A[X_0^{-1}])^\Delta = \Bbbk[X_0^{\pm 1}, X_1, X_2, \ldots, X_n]^\Delta = \Bbbk[X_0^{\pm 1}, Y_2, \ldots, Y_n]$$

Corps des fractions

L'algèbre $R = R(n, a)$ est intègre et noethérienne, elle admet donc un corps des fractions noncommutatif Frac $R(n, a)$. On a

$$(A[X_0^{-1}])^{\Delta} = \Bbbk[X_0^{\pm 1}, X_1, X_2, \dots, X_n]^{\Delta} = \Bbbk[X_0^{\pm 1}, Y_2, \dots, Y_n]$$

où $Y_i = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} \left(-\frac{X_1}{X_0} \right)^k \Delta^k(X_i).$

Corps des fractions

L'algèbre $R = R(n, a)$ est intègre et noethérienne, elle admet donc un corps des fractions noncommutatif Frac $R(n, a)$. On a

$$(A[X_0^{-1}])^\Delta = \Bbbk[X_0^{\pm 1}, X_1, X_2, \dots, X_n]^\Delta = \Bbbk[X_0^{\pm 1}, Y_2, \dots, Y_n]$$

où $Y_i = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} \left(-\frac{X_1}{X_0} \right)^k \Delta^k(X_i)$. (tranche locale $\Delta(X_1/X_0) = 1$).

Corps des fractions

L'algèbre $R = R(n, a)$ est intègre et noethérienne, elle admet donc un corps des fractions noncommutatif Frac $R(n, a)$. On a

$$(A[X_0^{-1}])^{\Delta} = \Bbbk[X_0^{\pm 1}, X_1, X_2, \dots, X_n]^{\Delta} = \Bbbk[X_0^{\pm 1}, Y_2, \dots, Y_n]$$

où $Y_i = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} \left(-\frac{X_1}{X_0} \right)^k \Delta^k(X_i)$. (tranche locale $\Delta(X_1/X_0) = 1$).

Proposition

On a $R[X_0^{-1}] = \Bbbk[X_0^{\pm 1}, Y_2, \dots, Y_n][X_1; X_0\Gamma_a]$, *i.e.* ($Y_0 := X_0$)

$$X_1 \star Y_i - Y_i \star X_1 = X_0\Gamma_a(Y_i) = X_0(a+i)Y_i = (a+i)X_0 \star Y_i$$

Corps des fractions

L'algèbre $R = R(n,a)$ est intègre et noethérienne, elle admet donc un corps des fractions noncommutatif Frac $R(n,a)$. On a

$$(A[X_0^{-1}])^\Delta = \Bbbk[X_0^{\pm 1}, X_1, X_2, \ldots, X_n]^\Delta = \Bbbk[X_0^{\pm 1}, Y_2, \ldots, Y_n]$$

où $Y_i = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!}\left(-\frac{X_1}{X_0}\right)^k \Delta^k(X_i)$. (tranche locale $\Delta(X_1/X_0) = 1$).

Proposition

On a $R[X_0^{-1}] = \Bbbk[X_0^{\pm 1}, Y_2, \ldots, Y_n][X_1; X_0\Gamma_a]$, *i.e.* ($Y_0 := X_0$)

$$X_1 \star Y_i - Y_i \star X_1 = X_0\Gamma_a(Y_i) = X_0(a+i)Y_i = (a+i)X_0 \star Y_i$$

Théorème (L.-Sierra, '19)

Pour $n > 1$, *le corps* Frac $R(n,a)$ *est isomorphe à un corps enveloppant* Frac $U(\mathfrak{h}_{\varepsilon,a} \otimes_\Bbbk K)$ *où* $K = \Bbbk(Z_0, Z_2, \ldots, Z_{n-2})$ *est un corps commutatif de fractions rationnelles en* $n-2$ *variables et où* $\mathfrak{h}_{\varepsilon,a} = Span(x,y,z)$

$$[x,y] = \varepsilon y, \quad [x,z] = az, \quad [y,z] = 0 \qquad (\varepsilon = 1 \text{ ou } 2)$$

Corps des fractions

L'algèbre $R = R(n, a)$ est intègre et noethérienne, elle admet donc un corps des fractions noncommutatif Frac $R(n, a)$. On a

$$(A[X_0^{-1}])^\Delta = \Bbbk[X_0^{\pm 1}, X_1, X_2, \ldots, X_n]^\Delta = \Bbbk[X_0^{\pm 1}, Y_2, \ldots, Y_n]$$

où $Y_i = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} \left(-\frac{X_1}{X_0}\right)^k \Delta^k(X_i)$. (tranche locale $\Delta(X_1/X_0) = 1$).

Proposition

On a $R[X_0^{-1}] = \Bbbk[X_0^{\pm 1}, Y_2, \ldots, Y_n][X_1; X_0\Gamma_a]$, *i.e.* ($Y_0 := X_0$)

$$X_1 \star Y_i - Y_i \star X_1 = X_0\Gamma_a(Y_i) = X_0(a+i)Y_i = (a+i)X_0 \star Y_i$$

Théorème (L.-Sierra, '19)

Pour $n > 1$, *le corps* Frac $R(n, a)$ *est isomorphe à un corps enveloppant* Frac $U(\mathfrak{h}_{\varepsilon,a} \otimes_\Bbbk K)$ *où* $K = \Bbbk(Z_0, Z_2, \ldots, Z_{n-2})$ *est un corps commutatif de fractions rationnelles en* $n-2$ *variables et où* $\mathfrak{h}_{\varepsilon,a} = Span(x, y, z)$

$$[x, y] = \varepsilon y, \quad [x, z] = az, \quad [y, z] = 0 \qquad (\varepsilon = 1 \text{ ou } 2)$$

Corps des fractions - Exemple de $R(2, a)$

$R(2, a)$ est engendré par X_0, X_1 et X_2 soumis à

$$
\begin{aligned}
X_0 \star X_1 - X_1 \star X_0 &= - aX_0 \star X_0 \\
X_0 \star X_2 - X_2 \star X_0 &= - aX_0 \star X_1 - \binom{a}{2} X_0 \star X_0 \\
X_1 \star X_2 - X_2 \star X_1 &= (a+2)X_0 \star X_2 - (a+1)X_1 \star X_1 + \binom{a+2}{2} X_0 \star X_1.
\end{aligned}
$$

Corps des fractions - Exemple de $R(2,a)$

$R(2,a)$ est engendré par x_0, x_1 et x_2 soumis à

$$x_0x_1 - x_1x_0 = -ax_0^2$$
$$x_0x_2 - x_2x_0 = -ax_0x_1 - \binom{a}{2}x_0^2$$
$$x_1x_2 - x_2x_1 = (a+2)x_0x_2 - (a+1)x_1^2 + \binom{a+2}{2}x_0x_1.$$

Corps des fractions - Exemple de $R(2,a)$

$R(2,a)$ est engendré par x_0, x_1 et x_2 soumis à

$$\begin{aligned}
x_0x_1 - x_1x_0 &= -ax_0^2\\
x_0x_2 - x_2x_0 &= -ax_0x_1 - \binom{a}{2}x_0^2\\
x_1x_2 - x_2x_1 &= (a+2)x_0x_2 - (a+1)x_1^2 + \binom{a+2}{2}x_0x_1.
\end{aligned}$$

On a $y_2 = X_2 - \frac{1}{2}X_0^{-1}X_1^2 = x_2 - \frac{1}{2}x_0^{-1}x_1^2 + \frac{a+1}{2}x_1$ et on calcule

$$\begin{aligned}
x_0x_1 - x_1x_0 &= -ax_0^2\\
x_0y_2 - y_2x_0 &= 0\\
x_1y_2 - y_2x_1 &= (a+2)x_0y_2
\end{aligned}$$

Corps des fractions - Exemple de $R(2,a)$

$R(2,a)$ est engendré par x_0, x_1 et x_2 soumis à

$$x_0x_1 - x_1x_0 = -ax_0^2$$
$$x_0x_2 - x_2x_0 = -ax_0x_1 - \binom{a}{2}x_0^2$$
$$x_1x_2 - x_2x_1 = (a+2)x_0x_2 - (a+1)x_1^2 + \binom{a+2}{2}x_0x_1.$$

On a $y_2 = X_2 - \frac{1}{2}X_0^{-1}X_1^2 = x_2 - \frac{1}{2}x_0^{-1}x_1^2 + \frac{a+1}{2}x_1$ et on calcule

$$\begin{aligned} x_0x_1 - x_1x_0 &= -ax_0^2 \\ x_0y_2 - y_2x_0 &= 0 \\ x_1y_2 - y_2x_1 &= (a+2)x_0y_2 \end{aligned} \iff \begin{aligned} y_1y_0 - y_0y_1 &= ay_0 \\ y_0y_2 - y_2y_0 &= 0 \\ y_1y_2 - y_2y_1 &= (a+2)y_2 \end{aligned}$$

en posant $y_0 = x_0$ et $y_1' = x_0^{-1}x_1$.

Corps des fractions - Exemple de $R(2,a)$

$R(2,a)$ est engendré par x_0, x_1 et x_2 soumis à

$$\begin{aligned} x_0x_1 - x_1x_0 &= -ax_0^2 \\ x_0x_2 - x_2x_0 &= -ax_0x_1 - \binom{a}{2}x_0^2 \\ x_1x_2 - x_2x_1 &= (a+2)x_0x_2 - (a+1)x_1^2 + \binom{a+2}{2}x_0x_1. \end{aligned}$$

On a $y_2 = X_2 - \frac{1}{2}X_0^{-1}X_1^2 = x_2 - \frac{1}{2}x_0^{-1}x_1^2 + \frac{a+1}{2}x_1$ et on calcule

$$\begin{aligned} x_0x_1 - x_1x_0 &= -ax_0^2 \\ x_0y_2 - y_2x_0 &= 0 \\ x_1y_2 - y_2x_1 &= (a+2)x_0y_2 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} y_1y_0 - y_0y_1 &= ay_0 \\ y_0y_2 - y_2y_0 &= 0 \\ y_1y_2 - y_2y_1 &= (a+2)y_2 \end{aligned}$$

en posant $y_0 = x_0$ et $y_1' = x_0^{-1}x_1$. Avec $x = \frac{1}{a}y_1$, $y = y_0$ et $z = y_2$ on a

$$[x,y] = y, \quad [y,z] = 0, \quad [x,z] = \alpha z \quad (\alpha \in \mathbb{k}).$$

Partie II

Rappel du contexte

Soit $\mathbb{k}$ un corps quelconque et $\alpha \in \mathbb{k}$. On considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\alpha$ avec base (x, y, z) et crochets de Lie :

$$[x, y] = y, \quad [x, z] = \alpha z, \quad [y, z] = 0.$$

Rappel du contexte

Soit $\mathbb{k}$ un corps quelconque et $\alpha \in \mathbb{k}$. On considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\alpha$ avec base (x, y, z) et crochets de Lie :

$$[x, y] = y, \quad [x, z] = \alpha z, \quad [y, z] = 0.$$

Question : Peut-on déterminer une condition sur α et β nécessaire et suffisante à l'isomorphisme des corps enveloppants $K(\mathfrak{g}_\alpha)$ et $K(\mathfrak{g}_\beta)$?

Rappel du contexte

Soit $\mathbb{k}$ un corps quelconque et $\alpha \in \mathbb{k}$. On considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\alpha$ avec base (x, y, z) et crochets de Lie :

$$[x, y] = y, \quad [x, z] = \alpha z, \quad [y, z] = 0.$$

Question : Peut-on déterminer une condition sur α et β nécessaire et suffisante à l'isomorphisme des corps enveloppants $K(\mathfrak{g}_\alpha)$ et $K(\mathfrak{g}_\beta)$?

Théorème (Alev, Dumas et L.)

Le corps enveloppant $K(\mathfrak{g}_\alpha)$ est isomorphe à un corps de Weyl si et seulement si α est dans $\mathbb{k}_0$ le sous-corps premier de $\mathbb{k}$.

Rappel du contexte

Soit $\mathbb{k}$ un corps quelconque et $\alpha \in \mathbb{k}$. On considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\alpha$ avec base (x, y, z) et crochets de Lie :

$$[x, y] = y, \quad [x, z] = \alpha z, \quad [y, z] = 0.$$

Question : Peut-on déterminer une condition sur α et β nécessaire et suffisante à l'isomorphisme des corps enveloppants $K(\mathfrak{g}_\alpha)$ et $K(\mathfrak{g}_\beta)$?

Théorème (Alev, Dumas et L.)

Le corps enveloppant $K(\mathfrak{g}_\alpha)$ est isomorphe à un corps de Weyl si et seulement si α est dans $\mathbb{k}_0$ le sous-corps premier de $\mathbb{k}$.

Proposition (Alev, Dumas et L.)

Soit $M \in GL_2(\mathbb{Z})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{k} \setminus \mathbb{k}_0$ tels que $\beta = M.\alpha$ pour l'action homographique de $GL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{k} \setminus \mathbb{k}_0$. Alors les corps $K(\mathfrak{g}_\alpha)$ et $K(\mathfrak{g}_\beta)$ sont isomorphes.

Valuation sur $K(\mathfrak{g}_\alpha)$

L'inclusion de la sous-algèbre de Lie dérivée $\mathfrak{g}'_\alpha = \mathbb{k}y \oplus \mathbb{k}z$ dans $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{k}x \oplus \mathbb{k}y \oplus \mathbb{k}z$ induit une structure de $U(\mathfrak{g}'_\alpha)$-module libre sur $U(\mathfrak{g}_\alpha)$ de base $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$:

Valuation sur $K(\mathfrak{g}_\alpha)$

L'inclusion de la sous-algèbre de Lie dérivée $\mathfrak{g}'_\alpha = \Bbbk y \oplus \Bbbk z$ dans $\mathfrak{g}_\alpha = \Bbbk x \oplus \Bbbk y \oplus \Bbbk z$ induit une structure de $U(\mathfrak{g}'_\alpha)$-module libre sur $U(\mathfrak{g}_\alpha)$ de base $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$:

$$U(\mathfrak{g}_\alpha) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ a_0, \dots, a_n \in U(\mathfrak{g}'_\alpha) \right\}$$

Valuation sur $K(\mathfrak{g}_\alpha)$

L'inclusion de la sous-algèbre de Lie dérivée $\mathfrak{g}'_\alpha = \Bbbk y \oplus \Bbbk z$ dans $\mathfrak{g}_\alpha = \Bbbk x \oplus \Bbbk y \oplus \Bbbk z$ induit une structure de $U(\mathfrak{g}'_\alpha)$-module libre sur $U(\mathfrak{g}_\alpha)$ de base $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$:

$$U(\mathfrak{g}_\alpha) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\; a_0, \ldots, a_n \in U(\mathfrak{g}'_\alpha) \right\}$$

On obtient une fonction degré sur $U(\mathfrak{g}_\alpha)$ en posant $\deg(u) = n$ pour tout $u \neq 0$.

Valuation sur $K(\mathfrak{g}_\alpha)$

L'inclusion de la sous-algèbre de Lie dérivée $\mathfrak{g}'_\alpha = \Bbbk y \oplus \Bbbk z$ dans $\mathfrak{g}_\alpha = \Bbbk x \oplus \Bbbk y \oplus \Bbbk z$ induit une structure de $U(\mathfrak{g}'_\alpha)$-module libre sur $U(\mathfrak{g}_\alpha)$ de base $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$:

$$U(\mathfrak{g}_\alpha) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ a_0, \ldots, a_n \in U(\mathfrak{g}'_\alpha) \right\}$$

On obtient une fonction degré sur $U(\mathfrak{g}_\alpha)$ en posant $\deg(u) = n$ pour tout $u \neq 0$.

Avec $\mathrm{val} = -\deg$ on obtient une valuation sur $U(\mathfrak{g}_\alpha)$, donc sur $K(\mathfrak{g}_\alpha)$, telle que $\mathrm{val}(y) = \mathrm{val}(z) = 0$ et $\mathrm{val}(x) = -1$.

Valuation sur $K(\mathfrak{g}_\alpha)$

L'inclusion de la sous-algèbre de Lie dérivée $\mathfrak{g}'_\alpha = \Bbbk y \oplus \Bbbk z$ dans $\mathfrak{g}_\alpha = \Bbbk x \oplus \Bbbk y \oplus \Bbbk z$ induit une structure de $U(\mathfrak{g}'_\alpha)$-module libre sur $U(\mathfrak{g}_\alpha)$ de base $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$:

$$U(\mathfrak{g}_\alpha) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ a_0, \ldots, a_n \in U(\mathfrak{g}'_\alpha) \right\}$$

On obtient une fonction degré sur $U(\mathfrak{g}_\alpha)$ en posant $\deg(u) = n$ pour tout $u \neq 0$.

Avec $\mathrm{val} = -\deg$ on obtient une valuation sur $U(\mathfrak{g}_\alpha)$, donc sur $K(\mathfrak{g}_\alpha)$, telle que $\mathrm{val}(y) = \mathrm{val}(z) = 0$ et $\mathrm{val}(x) = -1$.

Question : Peut-on déterminer une condition sur α et β nécessaire et suffisante à l'isomorphisme des corps enveloppants $K(\mathfrak{g}_\alpha)$ et $K(\mathfrak{g}_\beta)$ *en tant que corps valués* ?

Complétion de $K(\mathfrak{g}_\alpha)$

Le corps $K(\mathfrak{g}_\alpha) = \operatorname{Frac} \Bbbk[y, z][x; D_\alpha]$ où $D_\alpha = y\partial_y + \alpha z\partial_z$ (on a $xa = ax + D_\alpha(a)$ pour tout $a \in \Bbbk[y, z]$)

Complétion de $K(\mathfrak{g}_\alpha)$

Le corps $K(\mathfrak{g}_\alpha) = \operatorname{Frac} \Bbbk[y,z][x;D_\alpha]$ où $D_\alpha = y\partial_y + \alpha z \partial_z$ (on a $xa = ax + D_\alpha(a)$ pour tout $a \in \Bbbk[y,z]$) est un sous-corps du corps complété $F(\mathfrak{g}_\alpha)$ où $u := x^{-1}$, $\delta_\alpha := -D_\alpha$ et :

$$F(\mathfrak{g}_\alpha) = \Bbbk(y,z)(\!(u;\delta_\alpha)\!) = \left\{ \sum_{i \geqslant m} a_i u^i \;\middle|\; m \in \mathbb{Z},\ a_i \in \Bbbk(y,z) \right\}$$

avec $ua = au + \sum_{i \geqslant 1} \delta_\alpha^i(a) u^{i+1}$ pour tout $a \in \Bbbk(y,z)$.

Complétion de $K(\mathfrak{g}_\alpha)$

Le corps $K(\mathfrak{g}_\alpha) = \operatorname{Frac} \Bbbk[y,z][x; D_\alpha]$ où $D_\alpha = y\partial_y + \alpha z \partial_z$ (on a $xa = ax + D_\alpha(a)$ pour tout $a \in \Bbbk[y,z]$) est un sous-corps du corps complété $F(\mathfrak{g}_\alpha)$ où $u := x^{-1}$, $\delta_\alpha := -D_\alpha$ et :

$$F(\mathfrak{g}_\alpha) = \Bbbk(y,z)(\!(u;\delta_\alpha)\!) = \left\{ \sum_{i \geqslant m} a_i u^i \;\middle|\; m \in \mathbb{Z},\ a_i \in \Bbbk(y,z) \right\}$$

avec $ua = au + \sum_{i \geqslant 1} \delta_\alpha^i(a) u^{i+1}$ pour tout $a \in \Bbbk(y,z)$.

Théorème (Dumas)

Il existe un isomorphisme valué entre les corps enveloppants $K(\mathfrak{g}_\alpha)$ et $K(\mathfrak{g}_\beta)$ si et seulement si il existe un isomorphisme entre les corps complétés $F(\mathfrak{g}_\alpha)$ et $F(\mathfrak{g}_\beta)$.

Complétion de $K(\mathfrak{g}_\alpha)$

Le corps $K(\mathfrak{g}_\alpha) = \operatorname{Frac}\mathbb{k}[y,z][x;D_\alpha]$ où $D_\alpha = y\partial_y + \alpha z\partial_z$ (on a $xa = ax + D_\alpha(a)$ pour tout $a \in \mathbb{k}[y,z]$) est un sous-corps du corps complété $F(\mathfrak{g}_\alpha)$ où $u := x^{-1}$, $\delta_\alpha := -D_\alpha$ et :

$$F(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathbb{k}(y,z)(\!(u;\delta_\alpha)\!) = \left\{ \sum_{i \geqslant m} a_i u^i \;\middle|\; m \in \mathbb{Z},\ a_i \in \mathbb{k}(y,z) \right\}$$

avec $ua = au + \sum_{i\geqslant 1} \delta_\alpha^i(a) u^{i+1}$ pour tout $a \in \mathbb{k}(y,z)$.

Théorème (Dumas)

Il existe un isomorphisme valué entre les corps enveloppants $K(\mathfrak{g}_\alpha)$ et $K(\mathfrak{g}_\beta)$ si et seulement si il existe un isomorphisme entre les corps complétés $F(\mathfrak{g}_\alpha)$ et $F(\mathfrak{g}_\beta)$.

Lemme (Dumas)

Pour tout $f \in F(\mathfrak{g}_\alpha)$ tel que $\mathrm{val}(f) > 0$ l'élément $1 + f$ admet des racines n-ièmes pour une infinité d'entiers naturels n.

Isomorphisme valué

Théorème (Alev, Dumas, L.)

On suppose que $\mathrm{car}\,\mathbb{k} = 0$*. Les corps complétés* $F(\mathfrak{g}_\alpha)$ *et* $F(\mathfrak{g}_\beta)$ *sont isomorphes si et seulement si* α *et* β *sont dans la même orbite pour l'action homographique de* $GL_2(\mathbb{Z})$ *sur* $\mathbb{k} \setminus \mathbb{Q}$*.*

Sketch de la preuve.

Soit $\varphi : F(\mathfrak{g}_\beta) \to F(\mathfrak{g}_\alpha)$ un isomorphisme.

Isomorphisme valué

Théorème (Alev, Dumas, L.)

On suppose que $\operatorname{car} \mathbb{k} = 0$*. Les corps complétés* $F(\mathfrak{g}_\alpha)$ *et* $F(\mathfrak{g}_\beta)$ *sont isomorphes si et seulement si* α *et* β *sont dans la même orbite pour l'action homographique de* $GL_2(\mathbb{Z})$ *sur* $\mathbb{k} \setminus \mathbb{Q}$*.*

Sketch de la preuve.

Soit $\varphi : F(\mathfrak{g}_\beta) \to F(\mathfrak{g}_\alpha)$ un isomorphisme. On a $\operatorname{val}(\varphi(u')) = 1$ et $\operatorname{val}(\varphi(y')) = \operatorname{val}(\varphi(z')) = 0$,

Isomorphisme valué

Théorème (Alev, Dumas, L.)

On suppose que $\operatorname{car} \mathbb{k} = 0$. *Les corps complétés* $F(\mathfrak{g}_\alpha)$ *et* $F(\mathfrak{g}_\beta)$ *sont isomorphes si et seulement si* α *et* β *sont dans la même orbite pour l'action homographique de* $GL_2(\mathbb{Z})$ *sur* $\mathbb{k} \setminus \mathbb{Q}$.

Sketch de la preuve.

Soit $\varphi : F(\mathfrak{g}_\beta) \to F(\mathfrak{g}_\alpha)$ un isomorphisme. On a $\operatorname{val}(\varphi(u')) = 1$ et $\operatorname{val}(\varphi(y')) = \operatorname{val}(\varphi(z')) = 0$, donc dans $F(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathbb{k}(y, z)(\!(u; \delta_\alpha)\!)$:

$$
\begin{aligned}
\varphi(u') &= c_1 u + c_2 u^2 + \cdots, \quad c_i \in \mathbb{k}(y, z),\ c_1 \neq 0 \\
\varphi(y') &= y_0 + y_1 u + y_2 u^2 + \cdots, \quad y_i \in \mathbb{k}(y, z),\ y_0 \neq 0, \\
\varphi(z') &= z_0 + z_1 u + z_2 u^2 + \cdots, \quad z_i \in \mathbb{k}(y, z),\ z_0 \neq 0.
\end{aligned}
$$

Isomorphisme valué

Théorème (Alev, Dumas, L.)

On suppose que $\operatorname{car}\Bbbk = 0$*. Les corps complétés* $F(\mathfrak{g}_\alpha)$ *et* $F(\mathfrak{g}_\beta)$ *sont isomorphes si et seulement si* α *et* β *sont dans la même orbite pour l'action homographique de* $GL_2(\mathbb{Z})$ *sur* $\Bbbk \setminus \mathbb{Q}$*.*

Sketch de la preuve.

Soit $\varphi : F(\mathfrak{g}_\beta) \to F(\mathfrak{g}_\alpha)$ un isomorphisme. On a $\mathrm{val}(\varphi(u')) = 1$ et $\mathrm{val}(\varphi(y')) = \mathrm{val}(\varphi(z')) = 0$, donc dans $F(\mathfrak{g}_\alpha) = \Bbbk(y,z)(\!(u;\delta_\alpha)\!)$:

$$\begin{aligned}
\varphi(u') &= c_1 u + c_2 u^2 + \cdots, \quad c_i \in \Bbbk(y,z),\ c_1 \neq 0 \\
\varphi(y') &= y_0 + y_1 u + y_2 u^2 + \cdots, \quad y_i \in \Bbbk(y,z),\ y_0 \neq 0, \\
\varphi(z') &= z_0 + z_1 u + z_2 u^2 + \cdots, \quad z_i \in \Bbbk(y,z),\ z_0 \neq 0.
\end{aligned}$$

Les relations impliquent que $y_0 D_\alpha(z_0) = \beta z_0 D_\alpha(y_0)$ dans $\Bbbk(y,z)$.

Isomorphisme valué

Théorème (Alev, Dumas, L.)

On suppose que $\operatorname{car} \mathbb{k} = 0$*. Les corps complétés* $F(\mathfrak{g}_\alpha)$ *et* $F(\mathfrak{g}_\beta)$ *sont isomorphes si et seulement si* α *et* β *sont dans la même orbite pour l'action homographique de* $GL_2(\mathbb{Z})$ *sur* $\mathbb{k} \setminus \mathbb{Q}$*.*

Sketch de la preuve suite.

Isomorphisme valué

Théorème (Alev, Dumas, L.)

On suppose que $\operatorname{car} \mathbb{k} = 0$*. Les corps complétés* $F(\mathfrak{g}_\alpha)$ *et* $F(\mathfrak{g}_\beta)$ *sont isomorphes si et seulement si* α *et* β *sont dans la même orbite pour l'action homographique de* $GL_2(\mathbb{Z})$ *sur* $\mathbb{k} \setminus \mathbb{Q}$*.*

Sketch de la preuve suite.

On résout l'équation différentielle $y_0 D_\alpha(z_0) = \beta z_0 D_\alpha(y_0)$ en plongeant $\mathbb{k}(y, z)$ dans $L(y)$ où $L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{\mathbb{k}}(\!(z^{1/n})\!)$ est le corps algébriquement clos des séries de Puiseux en z sur $\overline{\mathbb{k}}$.

Isomorphisme valué

Théorème (Alev, Dumas, L.)

On suppose que $\operatorname{car} \mathbb{k} = 0$*. Les corps complétés* $F(\mathfrak{g}_\alpha)$ *et* $F(\mathfrak{g}_\beta)$ *sont isomorphes si et seulement si* α *et* β *sont dans la même orbite pour l'action homographique de* $GL_2(\mathbb{Z})$ *sur* $\mathbb{k} \setminus \mathbb{Q}$*.*

Sketch de la preuve suite.

On résout l'équation différentielle $y_0 D_\alpha(z_0) = \beta z_0 D_\alpha(y_0)$ en plongeant $\mathbb{k}(y, z)$ dans $L(y)$ où $L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{\mathbb{k}}(\!(z^{1/n})\!)$ est le corps algébriquement clos des séries de Puiseux en z sur $\overline{\mathbb{k}}$. Par décomposition en éléments simples dans $L(y)$ on prouve que $z_0 = a(z)y^q$ et $y_0 = b(z)y^r$ où $a, b \in \mathbb{k}(z)$ sont tels que

$$b\left(\frac{D_\alpha(a)}{a} + q\right) = a\beta\left(\frac{D_\alpha(b)}{b} + r\right).$$

Isomorphisme valué

Théorème (Alev, Dumas, L.)

On suppose que $\operatorname{car} \mathbb{k} = 0$. *Les corps complétés* $F(\mathfrak{g}_\alpha)$ *et* $F(\mathfrak{g}_\beta)$ *sont isomorphes si et seulement si* α *et* β *sont dans la même orbite pour l'action homographique de* $GL_2(\mathbb{Z})$ *sur* $\mathbb{k} \setminus \mathbb{Q}$.

Sketch de la preuve suite.

On résout l'équation différentielle $y_0 D_\alpha(z_0) = \beta z_0 D_\alpha(y_0)$ en plongeant $\mathbb{k}(y,z)$ dans $L(y)$ où $L = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathbb{k}}((z^{1/n}))$ est le corps algébriquement clos des séries de Puiseux en z sur $\overline{\mathbb{k}}$. Par décomposition en éléments simples dans $L(y)$ on prouve que $z_0 = a(z)y^q$ et $y_0 = b(z)y^r$ où $a, b \in \mathbb{k}(z)$ sont tels que

$$b\left(\frac{D_\alpha(a)}{a} + q\right) = a\beta\left(\frac{D_\alpha(b)}{b} + r\right).$$

On résout cette équation différentielle par décomposition en éléments simples dans $\overline{\mathbb{k}}(z)$ et on trouve $z_0 = \lambda z^n y^q$ et $y_0 = \mu z^m y^r$ où $\alpha n + q = \beta(\alpha m + r)$ comme désiré. $\square$

FIN