



Relaxation au sein d'un mélange de trois phases immiscibles

Modèle triphasique immiscible

Les équations du modèle triphasique immiscible sans transfert de masse présenté dans [3], sont pour $k \in \{1, 3\}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \mathbf{v}_i(\mathbf{W}) \cdot \nabla \alpha_k = S_k^a(\mathbf{W}) \\ \frac{\partial m_k}{\partial t} + \nabla \cdot (m_k \mathbf{U}_k) = S_k^m(\mathbf{W}) \\ \frac{\partial m_k \mathbf{U}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (m_k \mathbf{U}_k \otimes \mathbf{U}_k + \alpha_k p_k \mathcal{I}) + \sum_{l=1, l \neq k}^3 \Pi_{kl}(\mathbf{W}) \nabla \alpha_l = S_k^U(\mathbf{W}) \\ \frac{\partial \alpha_k E_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k E_k \mathbf{U}_k + \alpha_k p_k \mathbf{U}_k) - \sum_{l=1, l \neq k}^3 \Pi_{kl}(\mathbf{W}) \frac{\partial \alpha_l}{\partial t} = S_k^E(\mathbf{W}) \end{cases} \quad (1)$$

Avec :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad (2)$$

Ici, on fait le choix suivant :

$$V_i = U_1 \quad (3)$$

Ce qui implique [3]

$$\begin{cases} \Pi_{12} = \Pi_{21} = \Pi_{23} = P_2 \\ \Pi_{13} = \Pi_{31} = \Pi_{32} = P_3. \end{cases} \quad (4)$$

La variable d'état est définie comme :

$$\mathbf{W} = (\alpha_2, \alpha_3, m_1, m_1 U_1, \alpha_1 E_1, m_2, m_2 U_2, \alpha_2 E_2, m_3, m_3 U_3, \alpha_3 E_3) \quad (5)$$

On définit l'entropie de mélange comme :

$$\begin{cases} \eta = m_1 s_1(\rho_1, P_1) + m_2 s_2(\rho_2, P_2) + m_3 s_3(\rho_3, P_3) \\ \mathcal{F}_\eta = m_1 U_1 s_1(\rho_1, P_1) + m_2 U_2 s_2(\rho_2, P_2) + m_3 U_3 s_3(\rho_3, P_3) \end{cases} \quad (6)$$

Le changement de phase est omis. Les autres termes sources sont fermés en accord avec l'inégalité d'entropie de mélange :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, l \neq k : \\ S_k^m(\mathbf{W}) &= 0 \\ S_k^a &= \sum_{l=1, l \neq k}^3 K_{kl}(\mathbf{W})(P_k - P_l), \\ S_k^U &= \sum_{l=1, l \neq k}^3 d_{kl}(\mathbf{W})(U_l - U_k), \\ S_k^E &= \sum_{l=1, l \neq k}^3 q_{kl}(\mathbf{W})(T_l - T_k) + \sum_{l=1, l \neq k}^3 d_{kl} V_{kl}(U_l - U_k), \end{aligned} \quad (7)$$

Les coefficients $K_{kl}(\mathbf{W})$, $d_{kl}(\mathbf{W})$ et $q_{kl}(\mathbf{W})$ sont des fonctions positives pilotées par les temps de relaxation positifs respectifs τ_{kl}^P , τ_{kl}^U et τ_{kl}^T . Des fermetures pour ces temps sont proposés dans la littérature, comme dans [2] pour la pression ou dans [4] pour la vitesse ou la température.

Avec les fermetures (3), (4) et (7), le modèle a les propriétés suivantes :

- Le modèle est symétrisable hors de la zone de résonance.
- Les solutions régulières de (1) respectent l'inégalité d'entropie :

$$\partial_t(\eta(\mathbf{W})) + \nabla \cdot \mathcal{F}_\eta(\mathbf{W}) \leq 0 \quad (8)$$

Schéma numérique global :

Le schéma numérique global pour simuler (1) est le suivant :

- I : Calcul d'une solution approchée entre le temps $t^n \xrightarrow{\Delta t} t^*$ du sous système convectif :

$$\underline{\underline{A}} \partial_t(\mathbf{W}) + \partial_x(F(\mathbf{W})) + \underline{\underline{C}}(\mathbf{W}) \partial_x(\mathbf{W}) = 0 \quad (9)$$

avec un schéma **explicite** de type Rusanov [5] qui conditionne le pas de temps Δt par containte CFL.

- II : Evaluation **implicite** de l'évolution de la variable d'état entre le temps $t^* \xrightarrow{\Delta t} t^{n+1}$ avec un schéma Euler pour :

$$\underline{\underline{A}} \partial_t(\mathbf{W}) = S(\mathbf{W}) \quad (10)$$

Termes sources et processus de relaxation

On calcule une solution approchée du sous système associé à (10) :

- (i) Estimation de l'évolution de $\underline{\underline{U}} = (\Delta U_{12}, \Delta U_{13})$ entre $t^* \xrightarrow{\Delta t} t^{n+1^-}$:

$$\partial_t(\underline{\underline{U}}) = -\underline{\underline{R}}_{UU}(\mathbf{W}) \underline{\underline{U}} \quad (11)$$

Mise à jour de la variable d'état au temps t^{n+1^-} grâce à la conservation de la quantité de mouvement totale (cf [1] section 3.3.1.).

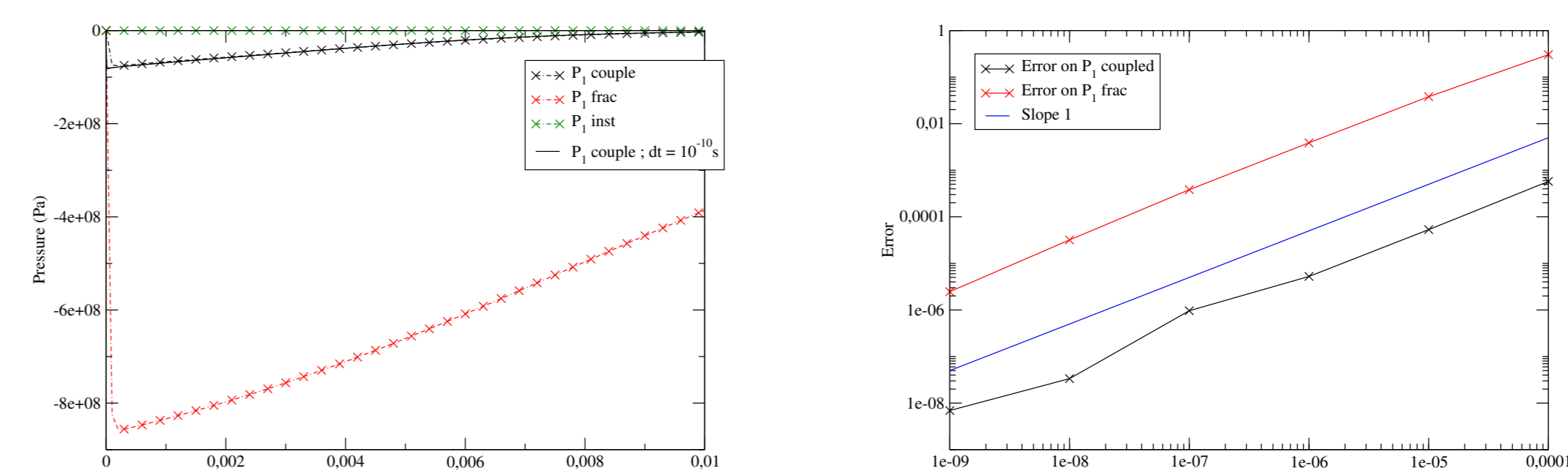
- (ii) Calcul de l'évolution de $\underline{\underline{\Delta}} = (\Delta P_{12}, \Delta P_{13}, \Delta T_{12}, \Delta T_{13})^t$ entre $t^{n+1^-} \xrightarrow{\Delta t} t^{n+1}$, solution de :

$$\partial_t(\underline{\underline{\Delta}}) = -\underline{\underline{R}}^{PT}(\mathbf{W}) \underline{\underline{\Delta}} \quad (12)$$

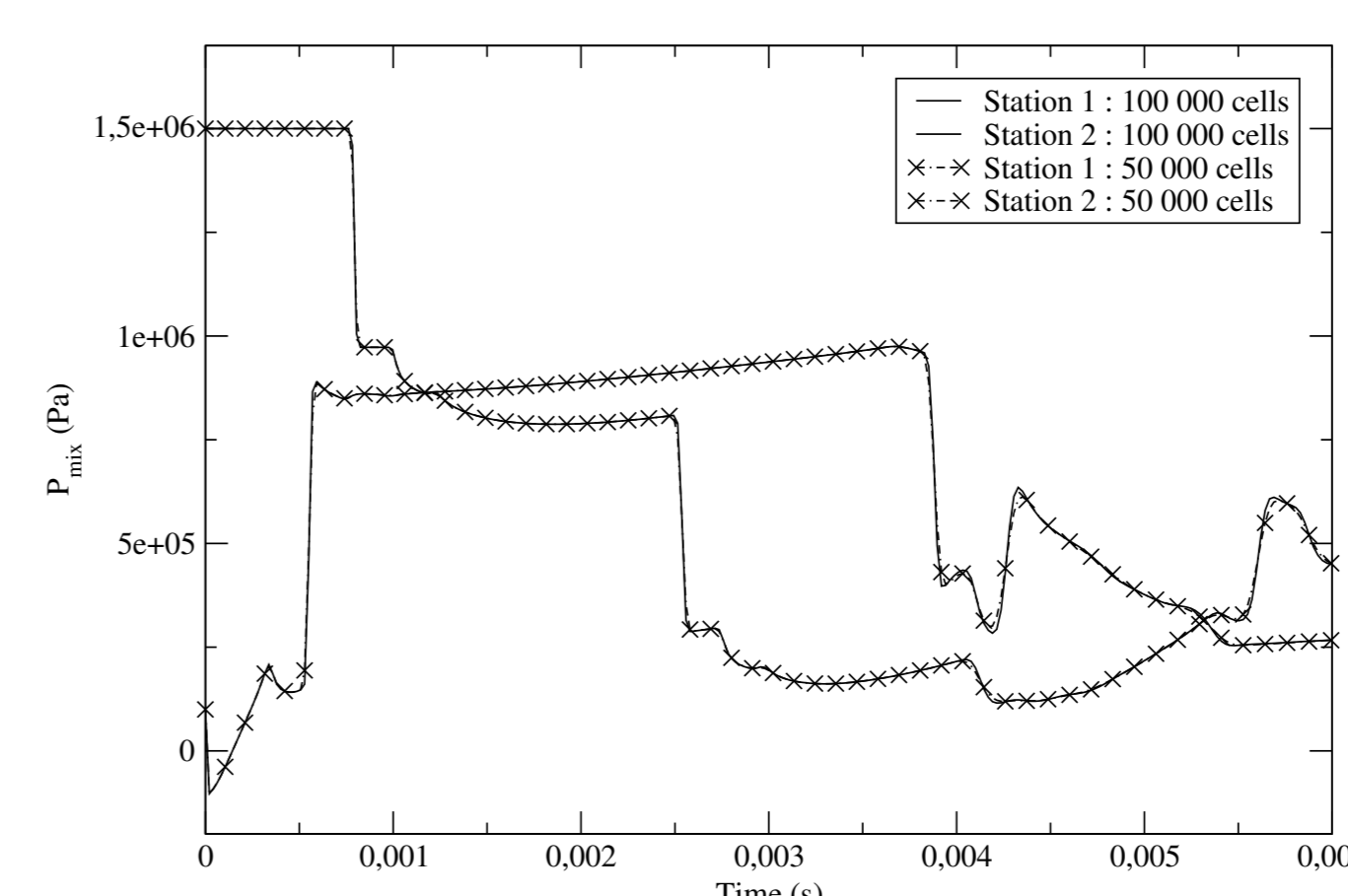
Mise à jour des grandeurs thermodynamiques grâce à la conservation de la somme des énergies internes et la contrainte d'immiscibilité (2).

Les matrices $\underline{\underline{R}}_{UU}(\mathbf{W})$ and $\underline{\underline{R}}^{PT}(\mathbf{W})$ sont obtenues par une réécriture du sous système associé à (10).

Résultats numériques



Comparaison entre le nouvel algorithme couplé et l'ancien à pas fractionnaire dans un cadre homogène. A gauche, comportement sur maillages grossier ($\Delta t = 10^{-4} s$) et à droite courbe de convergence.



Evolution de la pression totale $P_{mix} = \sum_{k=1}^3 \alpha_k P_k$ dans le cas d'une onde de choc impactant une zone de mélange triphasique immiscible avec un fort déséquilibre thermodynamique.

Références

- [1] H. Boukili and J.-M. Hérard. Simulation and preliminary validation of a three-phase flow model with energy. *Computers & Fluids*, 221:104868, May 2021.
- [2] S. Gavriluk. The structure of pressure relaxation terms: the one-velocity case. *EDF report H-183-2014-0276-EN*, 2014. Available upon request to: sergey.gavriluk@univ-amu.fr.
- [3] J.-M. Hérard. A three-phase flow model. *Mathematical and Computer Modelling*, 45(5):732–755, Mar. 2007.
- [4] M. Ishii. Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow. *NASA STI/Recon Technical Report A*, 75:29657, Jan. 1975. ADS Bibcode: 1975STIA...7529657I.
- [5] V. Rusanov. The calculation of the interaction of non-stationary shock waves and obstacles. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1(2):304–320, Jan. 1962.



INSTITUT
de MATHÉMATIQUES
de MARSEILLE

PARTNERS LOGOS RESERVED AREA