Titre: ≪Deux questions algébrico-combinatoires sur les fonctions Theta, issues de la théorie des équations aux q-différences≫

Résumé : Il s'agit ici de fonctions Theta ≪basiques≫, i.e. de base $q \in \mathbf{C}$ telle que $0 < |q| < 1$:

$$\theta_q(x) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{n(n-1)/2} x^n.$$

Avec elles on fabrique d'abord des q-caractères, c'est-à-dire, pour chaque $c \in \mathbf{C}^*$, une fonction méromorphe non triviale e_c sur $\mathbf{C}^*$ telle que $e_c(qx) = ce_c(x)$. Puis, avec ces derniers, de nombreuses q-constantes $\phi_{c,d} := e_c e_d / e_{cd}$, c'est-à-dire des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}^*$ telles que $\phi(qx) = \phi(x)$. On prouve que, quel que soit le choix des q-caractères e_c, le corps engendré par les $\phi_{c,d}$ est un corps de fonctions algébriques de genre 0 ou 1. Je conjecture, sans savoir le prouver, qu'il est nécessairement de genre 1.

Les fonctions θ_q permettent par ailleurs une description explicite presque complète du ≪groupe de Galois local des équations de pentes arbitraires≫ (bien entendu j'expliquerai ce que c'est). La description obtenue n'est tout-à-fait complète que si q est ≪bon≫ dans le sens suivant: toutes les puissances $(\theta_q(x))^m = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n^{(m)} x^n$, $m \geq 1$, ont tous leurs coefficients $a_n^{(m)}$ non nuls. Peut-on caractériser ces valeurs de q ? Et quel sens a cette étrange condition ? (Il y a des résultats partiels mais non concluants de Changgui Zhang et JS dans Ramanujan J. 57, No. 3, 1125-1167 (2022)).