# NOMBRES COMPLEXES, NOMBRES $p$-ADIQUES : À LA CROISÉE DES CHEMINS

*par*

Jérôme Poineau

Du point de vue arithmétique, l'ensemble des nombres $p$-adiques apparaît aussi naturel que celui des nombres réels ou complexes, mais leurs profondes différences topologiques s'opposent au développement d'une géométrie $p$-adique suivant les pas de la géométrie classique. À la fin des années 1980, Vladimir Berkovich a défini des espaces contenant les nombres $p$-adiques (ou les séries de Laurent, ou tout autre corps ultramétrique donné) et permis, dans une large mesure, de rétablir le parallélisme espéré entre routes archimédienne et non archimédienne.

Dans ce texte, nous présentons la construction de Berkovich, en nous concentrant sur le cas de l'espace le plus simple, mais déjà riche : la droite. Cela nous conduira à emprunter des détours spécifiquement ultramétriques, par la théorie très fertile des extensions de corps dans ce cadre, ou encore celle des points de Gauß, qui reflètent le comportement générique sur un disque.

Nous finirons en exposant une application à la dynamique des polynômes complexes en deux variables, due à Charles Favre et Mattias Jonsson. Plus précisément, nous étudierons les propriétés arithmétiques du taux d'attraction asympotique en un point super-singulier.

## 1. Corps ultramétriques

Avant de présenter la construction de Vladimir Berkovich, rappelons quelques exemples de corps valués ultramétriques qu'il est utile de garder en mémoire.

• Le corps des séries de Laurent complexes $\mathbf{C}(\!(t)\!)$.

Ses éléments sont les séries de la forme

$$f(t) = \sum_{i \geq i_0} a_i \, t^i,$$

où $i_0$ est un entier relatif qui dépend de $f$. Si la série $f$ n'est pas nulle, il existe un plus grand entier $i_0$ pour lequel la série peut s'écrire sous la forme précédente. On l'appele valuation $t$-adique de $f$ et on le note $v(f)$.

Soit $r \in ]0,1[$. On définit une valeur absolue ultramétrique $t$-adique $|\cdot|$ sur $\mathbf{C}(\!(t)\!)$ par $|0| = 0$ et

$$|f| = r^{v(f)} \text{ pour } f \neq 0.$$

Le corps $\mathbf{C}(\!(t)\!)$ est complet.

• Pour tout nombre premier $p$, le corps des nombres $p$-adiques $\mathbf{Q}_p$.

Soit $p$ un nombre premier. Tout nombre rationnel $a$ non nul peut s'écrire de façon unique sous la forme $\pm p^n \, \frac{u}{v}$, où $n$ est un entier relatif et $u$ et $v$ des entiers naturels non divisibles par $p$ et premiers entre eux. L'entier $n$ est appelé valuation $p$-adique de $a$ et noté $v_p(a)$.

On définit une valeur absolue ultramétrique $p$-adique $|\cdot|_p$ sur $\mathbf{Q}$ par $|0| = 0$ et

$$|a|_p = p^{-v_p(a)} \text{ pour } a \neq 0.$$

On note $\mathbf{Q}_p$ le complété de $\mathbf{Q}$ pour cette valeur absolue.

• Pour tout corps $K$, le corps trivialement valué $(K, |\cdot|_0)$.

Soit $K$ un corps. La valeur absolue triviale sur $K$ est définie par $|0| = 0$ et

$$|a|_0 = 1 \text{ pour } a \neq 0.$$

La topologie est discrète et le corps est complet.

Dans ces trois familles d'exemples, la valeur absolue est ultramétrique : elle vérifie l'inégalité triangulaire renforcée

$$|a + b| \leq \max(|a|, |b|).$$

Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué ultramétrique. La propriété ultramétrique possède des conséquences inhabituelles, par exemple le fait que les boules fermées de rayon strictement positif soient ouvertes. Cela pose inévitablement des problèmes de connexité et l'on démontre en effet que les composantes connexes de $k$ sont les points : l'espace est dit totalement discontinu.

Des problèmes de compacité peuvent également survenir. Pour les expliquer, introduisons des notations pour les disques ouverts et fermés. Pour $\alpha \in k$ et $r \in \mathbf{R}$, on pose

$$\mathring{D}_k(\alpha, r) := \{z \in k : |z - \alpha| < r\} \text{ et } \overline{D}_k(\alpha, r) := \{z \in k : |z - \alpha| \leq r\}.$$

Dans $\mathbf{Q}_p$, pour $p$ premier, les disques fermées sont compactes. Dans $\mathbf{C}(\!(t)\!)$, en revanche, tel n'est plus le cas. En effet, on peut écrire le disque unité fermée comme union disjointe d'une infinité de disques ouverts :

$$\overline{D}_{\mathbf{C}(\!(t)\!)}(0,1) = \mathbf{C}[\![t]\!] = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{C}} \mathring{D}_{\mathbf{C}(\!(t)\!)}(\alpha, 1).$$

Enfin, pour un corps trivialement valué $(K, |\cdot|_0)$, la topologie est discrète, et la compacité de $\overline{D}_K(0,1) = K$ équivaut à la finitude de $K$.

En général, on observe donc que les bonnes propriétés topologiques de $\mathbf{R}$ ou de $\mathbf{C}$, telles que compacité locale, connexité par arcs locale, contractibilité locale, etc., tombent en défaut dans le cadre ultramétrique.

## 2. La droite de Berkovich

Nous allons présenter une théorie, établie par Vladimir G. Berkovich à la fin des années 1980 et exposée dans [**Ber90**], qui permet de résoudre les problèmes mentionnés à la section 1, et de rétablir l'analogie entre les géométrie complexe et ultramétrique.

Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué ultramétrique complet. L'une des particularités de la théorie de Berkovich est qu'elle distingue deux incarnations de $k$ : l'une en tant que corps et l'autre en tant qu'espace topologique. L'espace topologique $k$ y est remplacé par un autre, noté $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$, qui contient $k$, mais également beaucoup d'autres points, et jouit des bonnes propriétés familières (connexité par arcs locale et globale, compacité locale, etc.). Le corps $k$ reste inchangé, et ses éléments sont vus comme des fonctions constantes sur $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$.

**2.1. Origines.** — Comme nous le verrons bientôt, la définition précise de la droite de Berkovich met l'accent, non pas sur les points que l'on souhaite trouver, ceux de $k$, mais sur les fonctions dont on souhaite disposer, en l'occurence, les polynômes en une variable à coefficients dans $k$.

Cette idée, qui consiste, en quelque sorte, à deviner le bon espace à partir de la connaissance de ses fonctions n'est pas déraisonnable, comme l'indique le résultat suivant. Soit $X$ un espace métrique compact et $\mathcal{C}(X)$ l'anneau des

fonctions continues de $X$ dans $\mathbf{C}$. Notons $\Omega(\mathcal{C}(X))$ l'ensemble des caractères de $\mathcal{C}(X)$, c'est-à-dire des morphismes d'anneaux de $\mathcal{C}(X)$ dans $\mathbf{C}$. Remarquons qu'on peut associer un caractère de $\mathcal{C}(X)$ à tout point $x$ de $X$ par la formule

$$\varphi_x \colon f \in \mathcal{C}(X) \longmapsto f(x) \in \mathbf{C}.$$

***Théorème 2.1.*** — *L'application*

$$x \in X \longmapsto \varphi_x \in \Omega(\mathcal{C}(X))$$

*est bijective.* □

L'idée de construire un espace à partir des fonctions que l'on désire n'est pas nouvelle. On en trouve notamment une incarnation dans les travaux d'Israel Gelfand en analyse fonctionnelle. Rappelons-en les grandes lignes. Soit $(A, \|\cdot\|)$ une algèbre de Banach complexe unitaire et notons $\Omega(A)$ l'ensemble de ses caractères. On peut alors interpréter les éléments de $A$ comme des fonctions sur l'espace $\Omega_A$ en associant, à un élément $a$ de $A$, la fonction

$$\hat{a} \colon \varphi \in \Omega_A \longmapsto \varphi(a) \in \mathbf{C}.$$

En outre, si l'on munit $\Omega_A$ de la topologie la plus grossière rendant continues toutes les fonctions de la forme $\hat{a}$, on obtient un espace compact.

Des constructions similaires ont également été utilisées dans d'autres contextes, par exemple en géométrie algébrique, dans le cadre de la théorie des schémas d'Alexandre Grothendieck.

**2.2. Définition.** — Énonçons la définition de la droite de Berkovich $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$.

***Définition 2.2.*** — La droite de Berkovich, notée $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$, est l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $k[X]$ qui induisent la valeur absolue donnée sur $k$. En termes plus explicites, c'est l'ensemble des fonctions

$$|\cdot|_x \colon k[X] \longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

i) $\forall P, Q \in k[X]$, $|P+Q|_x \leq |P|_x + |Q|_x$ ;
ii) $\forall P, Q \in k[X]$, $|PQ|_x = |P|_x\,|Q|_x$ ;
iii) $\forall a \in k$, $|a|_x = |a|$.

On munit $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ de la topologie la plus grossière qui rende continues les fonctions de la forme

$$|\cdot|_x \in \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}} \longmapsto |P|_x \in \mathbf{R}_{\geq 0},$$

avec $P \in k[X]$. En termes plus concrets, les ouverts de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ s'obtiennent par intersections finies et des unions arbitraires d'ensembles de la forme

$$\{|\cdot|_x \in \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}} : r < |P|_x < s\},$$

avec $P \in k[X]$, $r, s \in \mathbf{R}$.

Par définition, les points de la droite de Berkovich sont des semi-normes sur $k[X]$. Pour aider l'intuition, nous les noterons volontiers comme des points classiques : $x, y, z, \ldots$ Lorsque nous aurons besoin de revenir à la définition, nous parlerons de la semi-norme associée au point, et la noterons alors $|\cdot|_x, |\cdot|_y, |\cdot|_z, \ldots$

Dans la suite de ce texte, nous allons tâcher de démystifier la définition de droite de Berkovich et d'expliquer les phénomènes concrets qu'elle reflète. Commençons par montrer que, comme on s'y attend, la droite de Berkovich $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ contient bien une copie de $k$.

Soit $\alpha \in k$. L'application

$$|\cdot|_\alpha \colon P \in k[X] \longmapsto |P(\alpha)| \in \mathbf{R}_{\geq 0}$$

est une semi-norme multiplicative sur $k[X]$. On notera encore $\alpha$ le point de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ associé.

***Lemme 2.3.*** — *L'application*

$$k \longrightarrow \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$$

*précédemment définie est injective. C'est un homéomorphisme sur son image, autrement dit, la topologie de $k$ est induite par celle de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$.*

*Démonstration.* — Les résultats découlent directement des définitions. □

L'exemple précédent peut se généraliser en partant non plus d'un élément de $k$, mais d'un élément d'une clôture algébrique de $k$. Nous nous contenterons de l'expliquer sur un exemple.

Considérons le corps des séries de Laurent $\mathbf{C}(\!(t)\!)$ muni de la valeur absolue $t$-adique $|\cdot|$ normalisée par $|t| = r$, avec $r \in ]0, 1[$. Ce corps se plonge dans le corps $\mathbf{C}(\!(\sqrt{t})\!)$ et la valeur absolue s'étend en posant $|\sqrt{t}| = r^{1/2}$. (Le corps $\mathbf{C}(\!(\sqrt{t})\!)$ est encore un corps de séries de Laurent, cette fois-ci pour la variable $\sqrt{t}$.)

Pour tout $\beta \in \mathbf{C}(\!(\sqrt{t})\!)$, l'application

$$|\cdot|_\beta \colon P \in \mathbf{C}(\!(t)\!)[X] \longmapsto |P(\beta)| \in \mathbf{R}_{\geq 0}$$

est une semi-norme multiplicative sur $\mathbf{C}(\!(t)\!)[X]$. Elle définit donc un point de $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}(\!(t)\!)}$.

Attention, l'application induite $\mathbf{C}(\!(\sqrt{t})\!) \to \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}(\!(t)\!)}$ n'est plus injective ! On vérifie, par exemple, que $|\cdot|_{\sqrt{t}} = |\cdot|_{-\sqrt{t}}$.

La définition de la droite de Berkovich peut également s'appliquer au corps $\mathbf{C}$ muni de la valeur absolue usuelle $|\cdot|_\infty$. Comme précédemment, on dispose d'une application injective $\mathbf{C} \to \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}}$ et le résultat qui suit, qui figure déjà chez Alexander Ostrowski (*cf.* **[Ost17]**), assure qu'elle est surjective. Dans ce cas, la construction de V. Berkovich ne fournit donc aucun nouveau point. Nous verrons que la situation diffère radicalement dans le cadre ultramétrique.

***Théorème 2.4.*** — *Soit $|\cdot|_x$ une semi-norme multiplicative sur $\mathbf{C}[X]$ qui induit la valeur absolue usuelle sur $\mathbf{C}$. Alors, il existe $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que*

$$|\cdot|_x = |\cdot|_\alpha \colon P \in \mathbf{C}[X] \longmapsto |P(\alpha)|_\infty.$$

*Démonstration.* — En utilisant l'inégalité triangulaire, on montre que la fonction

$$z \in \mathbf{C} \longmapsto |X - z|_x \in \mathbf{R}_{\geq 0}$$

est continue et tend vers l'infini quand $|z|_\infty$ tend vers l'infini. On en déduit qu'elle est bornée inférieurement et atteint son minimum $u$.

Supposons, par l'absurde, que $u > 0$.

Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que $|X - \alpha|_x = u$. Soit $y \in \mathbf{C}^*$ tel que $|y|_\infty < u$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et notons $\mu_n(\mathbf{C})$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité dans $\mathbf{C}$. On a

$$\begin{aligned} u^n + |y|_\infty^n &= |X - \alpha|_x^n + |y|_\infty^n \\ &\geq |(X - \alpha)^n - y^n|_x \\ &\geq \prod_{\zeta \in \mu_n(\mathbf{C})} |X - \alpha - \zeta y|_x \\ &\geq |X - \alpha - y|_x \, u^{n-1}. \end{aligned}$$

En divisant par $u^{n-1}$ et en faisant tendre $n$ vers l'infini, on en déduit que $|X - \alpha - y|_x \leq u$, d'où $|X - \alpha - y|_x = u$.

En partant de ce résultat, une récurrence immédiate montre que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a

$$|X - \alpha - my|_x = |X - \alpha|_x.$$

Or, $|my|_x = |my|_\infty$ tend vers l'infini quand $m$ tend vers l'infini, d'où une contradiction.

Nous venons de montrer que $|X-\alpha|_x = 0$.

Soit $P(X) \in \mathbf{C}[X]$. Le polynôme $P(X)-P(\alpha)$ étant divisible par $X-\alpha$, par multiplicativité de $|\cdot|_x$, on a $|P(X)-P(\alpha)|_x = 0$. Par l'inégalité triangulaire, on obtient alors

$$|P(X)|_x = |P(\alpha)|_x = |P(\alpha)|_\infty,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

**2.3. De nouveaux points.** — Hormis les points associés aux éléments de $k$ ou d'une clôture algébrique, la droite de Berkovich $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ contient encore bien d'autres points, de nature très différente. L'exemple le plus typique est donné par l'application

$$|\cdot|_G \colon P = \sum_i c_i X^i \in k[X] \longmapsto \max_i(|c_i|) \in \mathbf{R}_{\geq 0}.$$

***Lemme 2.5.*** — *L'application $|\cdot|_G$ est une valeur absolue (ultramétrique) sur $k[X]$ étendant la valeur absolue donnée sur $k$.*

*Démonstration.* — On vérifie directement les propriétés suivantes sur la définition :

i) $\forall P, Q \in k[X]$, $|P+Q|_G \leq \max(|P|_G, |Q|_G) \leq |P|_G + |Q|_G$ ;
ii) $\forall P, Q \in k[X]$, $|PQ|_G \leq |P|_G\,|Q|_G$ ;
iii) $\forall a \in k$, $|a|_G = |a|$ ;
iv) $\forall a \in k$, $\forall P \in k[X]$, $|aP|_G = |a|\,|P|_G$ ;
v) $\forall P \in k[X]$, $|P|_G = 0 \Leftrightarrow P = 0$.

Il reste à montrer la multiplicativité de $|\cdot|_G$.

Soient $P, Q \in k[X]$. Il existe $a, b \in k$ et $P_0, Q_0 \in k[X]$ avec $|P_0|_G = |Q_0|_G = 1$ tels que $P = aP_0$ et $Q = bQ_0$. D'après la propriété iv), il suffit de démontrer que $|P_0Q_0|_G = |P_0|_G\,|Q_0|_G$.

Remarquons que les polynômes $P_0$ et $Q_0$ appartiennent à $k^\circ[X]$. Considérons l'application de réduction $\mathrm{red}\colon k^\circ \to k^\circ/k^{\circ\circ} = \tilde{k}$. C'est un morphisme d'anneaux. Elle induit un morphisme d'anneaux $k^\circ[X] \to \tilde{k}[X]$, que nous noterons identiquement. Remarquons que, pour tout $R \in k^\circ[X]$, on a

$$|R|_G = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{red}(R) = 0.$$

En particulier, on a $\mathrm{red}(P_0) \neq 0$ et $\mathrm{red}(Q_0) \neq 0$. Puisque $\tilde{k}$ est un corps, l'anneau $\tilde{k}[X]$ est intègre, et on a donc

$$\mathrm{red}(P_0Q_0) = \mathrm{red}(P_0)\,\mathrm{red}(Q_0) \neq 0,$$

d'où $|P_0Q_0|_G = 1 = |P_0|_G\,|Q_0|_G$, comme désiré. □

***Définition 2.6.*** — On appelle *point de Gauß* le point de la droite de Berkovich $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ associé à la valeur absolue $|\cdot|_G$ sur $k[X]$. On le note $\eta_G$.

***Remarque 2.7.*** — Soit $R \in \mathbf{Z}[X]$. Rappelons qu'on définit le contenu $c(R)$ de $R$ comme le pgcd de ses coefficients. Il existe $R_0 \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $R = c(R)\,R_0$ et $c(R_0) = 1$.

Soit $p$ un nombre premier et supposons que $k = \mathbf{Q}_p$. Soit $R \in \mathbf{Z}[X]$. Si $c(R) = 1$, alors les coefficients de $R$ ne peuvent être tous divisibles par $p$ et l'on a donc $|R|_G = 1$. En général, en factorisant le contenu comme ci-dessus, on montre que

$$|R|_G = |c(R)|_G = |c(R)|_p.$$

La multiplicativité de $|\cdot|_G$ se traduit donc par le fait que, pour tous $P, Q \in \mathbf{Z}[X]$, on a

$$|c(PQ)|_p = |c(P)|_p\,|c(Q)|_p = |c(P)c(Q)|_p.$$

En particulier, les entiers $c(PQ)$ et $c(P)c(Q)$ sont divisibles par les mêmes puissances de $p$.

En appliquant le résultat précédent pour tous les nombres premiers, on en déduit que les entiers $c(PQ)$ et $c(P)c(Q)$ possèdent la même factorisation en produit de nombres premiers, et donc, par unicité, que

$$c(PQ) = c(P)c(Q).$$

On retrouve ainsi une version du lemme de Gauß.

La construction du point de Gauß peut se généraliser en ajoutant deux paramètres $\alpha \in k$ et $r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$. Considérons l'application

$$|\cdot|_{\alpha,r} \colon P = \sum_i c_i (X-\alpha)^i \in k[X] \longmapsto \max_i (|c_i| r^i) \in \mathbf{R}_{\geq 0}$$

(avec la convention $0^0 = 1$).

***Lemme 2.8.*** — *L'application $|\cdot|_{\alpha,r}$ est une semi-norme (ultramétrique) multiplicative sur $k[X]$ étendant la valeur absolue donnée sur $k$.*

*Si $r = 0$, on a $|\cdot|_{\alpha,0} = |\cdot|_\alpha$ (semi-norme associée au point $\alpha$).*

*Si $r > 0$, $|\cdot|_{\alpha,r}$ est une valeur absolue.*

*Démonstration.* — Comme pour $|\cdot|_G$, l'inégalité triangulaire, la sous-multiplicativité et le fait que $|\cdot|_{\alpha,r}$ étende $|\cdot|$ découlent directement des définitions, tout comme les commentaires finaux.

Il reste à démontrer que, pour tous $P, Q \in k[X]$, on a

$$|PQ|_{\alpha,r} \geq |P|_{\alpha,r}\,|Q|_{\alpha,r}.$$

Soient $P, Q \in k[X]$. Si $P$ ou $Q$ est nul, le résultat est évident et nous pouvons donc supposer que tel n'est pas le cas. Notons

$$P = \sum_i c_i (X-\alpha)^i,\ Q = \sum_j d_j (X-\alpha)^j \text{ et } PQ = \sum_\ell e_\ell (X-\alpha)^\ell.$$

Posons

$$i_0 := \min(\{i : |c_i| r^i = |P|_{\alpha,r}\}) \text{ et } j_0 := \min(\{j : |d_j| r^j = |Q|_{\alpha,r}\}).$$

Posons $\ell_0 := i_0 + j_0$. Considérons le coefficient de degré $\ell_0$ de $PQ$, autrement dit

$$e_{\ell_0} = \sum_{i+j=i_0+j_0} c_i d_j,$$

et calculons sa valeur absolue.

Soit $(i,j)$ tel que $i + j = \ell_0$.

• Supposons que $(i,j) = (i_0, j_0)$. Alors

$$|c_{i_0} d_{j_0}| = |P|_{\alpha,r} r^{-i_0} |Q|_{\alpha,r} r^{-j_0} = |P|_{\alpha,r} |Q|_{\alpha,r} r^{-\ell_0}.$$

• Supposons que $(i,j) \neq (i_0, j_0)$. Puisque $i + j = \ell_0 = i_0 + j_0$, on a soit $i < i_0$, auquel cas $|c_i| < |P|_{\alpha,r} r^{-i}$, soit $j < j_0$, auquel cas $|d_j| < |Q|_{\alpha,r} r^{-j}$. Par ailleurs, les égalités larges correspondantes sont toujours vérifiées, par définition de $|P|_{\alpha,r}$ et $|Q|_{\alpha,r}$. On en déduit que

$$|c_i d_j| < |P|_{\alpha,r} r^{-i} |Q|_{\alpha,r} r^{-j} = |P|_{\alpha,r} |Q|_{\alpha,r} r^{-\ell_0}.$$

Les propriétés de l'inégalité triangulaire ultramétrique assurent alors

$$|e_{\ell_0}| = |P|_{\alpha,r} |Q|_{\alpha,r} r^{-\ell_0},$$

d'où

$$|PQ|_{\alpha,r} \geq |e_{\ell_0}| r^{\ell_0} \geq |P|_{\alpha,r} |Q|_{\alpha,r}.$$

□

***Définition 2.9.*** — Pour $\alpha \in k$ et $r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, on appelle *point de Gauß de centre $\alpha$ et de rayon $r$* le point de la droite de Berkovich $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k$ associé à la semi-norme multiplicative $|\cdot|_{\alpha,r}$ sur $k[X]$. On le note $\eta_{\alpha,r}$.

À cause de l'inégalité ultramétrique, des couples $(\alpha, r)$ différents peuvent définir le même point de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$. On peut caractériser les cas d'égalité et, plus généralement, écrire des conditions explicites sous lesquelles les semi-normes associées sont comparables.

Remarquons que l'on dispose d'une relation d'ordre sur les semi-normes, vues en tant que fonctions sur $k[X]$. Nous transférons cette relation aux points de la droite de Berkovich. Précisément, pour $x, y \in \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$, on note $x \leq y$ si $|\cdot|_x \leq |\cdot|_y$, c'est-à-dire

$$\forall P \in k[X],\ |P|_x \leq |P|_y.$$

***Lemme 2.10.*** — *Soient $\alpha, \beta \in k$ et $r, s \in \mathbf{R}_{\geq 0}$. On a*

$$\eta_{\alpha,r} \leq \eta_{\beta,s} \iff r \leq s \text{ et } |\beta - \alpha| \leq s.$$

*En particulier, on a*

$$\eta_{\alpha,r} = \eta_{\beta,s} \iff r = s \text{ et } |\beta - \alpha| \leq s.$$

*Démonstration.* — Supposons que $\eta_{\alpha,r} \leq \eta_{\beta,s}$.

On a $|T - \beta|_{\beta,s} = s$ et

$$|T - \beta|_{\alpha,r} = |(\alpha - \beta) + T - \alpha|_{\alpha,r} = \max(|\alpha - \beta|, r),$$

d'où

$$s \geq \max(|\alpha - \beta|, r).$$

Réciproquement, supposons que $r \leq s$ et $|\beta - \alpha| \leq s$.

Soit $P \in k[X]$. Écrivons-le sous la forme $P = \sum_i c_i (T - \beta)^i$. D'après l'inégalité triangulaire ultramétrique, on a

$$|P|_{\alpha,r} \leq \max_i \left( |c_i|\, |T - \beta|_{\alpha,r}^i \right).$$

De plus, on a

$$|T - \beta|_{\alpha,r} = |(\alpha - \beta) + T - \alpha|_{\alpha,r} = \max(|\alpha - \beta|, r) \leq s.$$

En utilisant la multiplicativité de $|\cdot|_{\alpha,r}$, on obtient

$$|P|_{\alpha,r} \leq \max_i (|c_i| s^i) \leq |P|_{\beta,s}.$$

□

Les conditions qui apparaissent dans l'énoncé du lemme 2.10 coïncident avec celles qui traduisent l'inclusion ou l'égalité entre les disques fermés $\overline{D}(\alpha, r)$ et $\overline{D}(\beta, s)$ sur un corps ultramétrique. Autrement dit, plus qu'au couple $(\alpha, r)$, le point $\eta_{\alpha,r}$ est associé au disque $\overline{D}(\alpha, r)$. On peut y penser comme à une sorte

de « point générique » de ce disque. Le résultat qui suit confirme cette idée. Nous y reviendrons plus tard, *cf.* section 2.7.

***Lemme 2.11.*** — *Supposons que $\tilde{k}$ soit infini. Soient $\alpha \in k$ et $r \in |k^*|$. Alors, pour tout $P \in k[T]$, on a*

$$|P|_{\alpha,r} = \sup(\{|P(z)| : z \in \overline{D}(\alpha, r)\}).$$

*Démonstration.* — On se ramène au cas où $\alpha = 0$, $r = 1$, $|P|_G = 1$.

Comme dans la preuve du lemme 2.5, considérons l'application de réduction $\mathrm{red}\colon k^\circ[X] \to \tilde{k}[X]$. Par hypothèse, on a $\mathrm{red}(P) \neq 0$. Puisque $\tilde{k}$ est infini, il existe $u \in \tilde{k}$ tel que $\mathrm{red}(P)(u) \neq 0$. Soit $z \in k^\circ$ tel que $\mathrm{red}(z) = u$. On a

$$\mathrm{red}(P(z)) = \mathrm{red}(P)(\mathrm{red}(z)) \neq 0,$$

d'où $|P(z)| = 1$. □

***Remarque 2.12.*** — La situation du lemme 2.11, où la norme sup sur un disque fournit une valeur absolue sur $k[X]$ est très spécifique au cas ultramétrique. Le résultat analogue sur $\mathbf{C}$ muni de la valeur absolue usuelle est faux, comme on le voit sur l'exemple

$$\|z+1\|_{\overline{D}(0,1)} = \|z-1\|_{\overline{D}(0,1)} = \|z^2-1\|_{\overline{D}(0,1)} = 2.$$

Le lemme 2.10 nous permet de dessiner l'ensemble des points $\eta_{\alpha,r}$, avec $\alpha \in k$ et $r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$. Ils se présentent naturellement sous forme d'arbre, *cf.* figure 1. Remarquons que les points de branchement correspondent exactement aux plus petits disques contenant deux éléments distincts de $k$. Leur rayon doit donc être égal à la distance entre deux tels éléments, et donc appartenir à $|k^*|$.

**2.4. Classification des points.** — Nous avons expliqué comment définir des points de la droite de Berkovich $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ à partir de points de $k$ (ou d'extensions de $k$) ou de disques. En général, il existe encore d'autres types de points. Montrons-le sur un exemple.

Partons du corps des séries de Laurent

$$\mathbf{C}(\!(t)\!) := \Big\{ \sum_{\substack{i \in \mathbf{Z} \\ i \geq m}} a_i t^i : a_i \in \mathbf{C}, m \in \mathbf{Z} \Big\}.$$

Munissons-le de la valeur absolue $t$-adique $|\cdot|$ normalisée par $|t| = r$, pour un certain $r \in ]0,1[$.

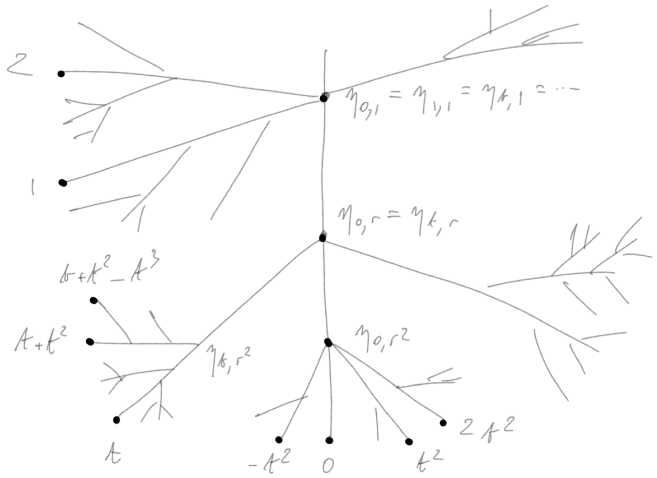


FIGURE 1. La droite de Berkovich sur $\mathbf{C}(\!(t)\!)$

Il admet comme clôture algébrique le corps des séries de Puiseux

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \mathbf{C}(\!(t^{1/n})\!) = \Big\{ \sum_{\substack{i\in\mathbf{Z}\\ i\geq m}} a_i t^{i/n} : a_i \in \mathbf{C}, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^* \Big\}.$$

La valeur absolue $|\cdot|$ s'y étend de façon unique.

Nous pouvons encore considérer le complété $\overline{\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \mathbf{C}(\!(t^{1/n})\!)}$ de ce corps, connu sous le nom de corps de Levi-Civita. Ses éléments peuvent être caractérisés comme les séries dont les troncations sont des troncations de séries de Puiseux. En d'autres termes, ce sont les séries de la forme

$$\sum_{q\in\mathbf{Q}} a_q t^q$$

qui ne possèdent qu'un nombre fini de coefficients d'indice inférieur à $N$ pour tout $N \in \mathbf{N}$. La valeur absolue $|\cdot|$ s'étend à $\overline{\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \mathbf{C}(\!(t^{1/n})\!)}$ de façon unique, en faisant un corps complet et algébriquement clos.

Les constructions précédentes sont classiques, mais nous pouvons encore poursuivre ! Pour ce faire, considérons l'ensemble $\mathbf{C}(\!(t^{\mathbf{Q}})\!)$ des séries de Hahn, c'est-à-dire des séries de la forme

$$f = \sum_{q\in\mathbf{Q}} a_q t^q$$

dont le support

$$\mathrm{Supp}(f) := \{q \in \mathbf{Q} : a_q \neq 0\}$$

est un ensemble bien ordonné : toute partie non vide possède un plus petit élément. L'addition, la multiplication, le passage à l'inverse (pour les éléments non nuls) sur les séries de Laurent (et de Puiseux) s'étendent naturellement à $\mathbf{C}(\!(t^{\mathbf{Q}})\!)$ et en font un corps. L'unique difficulté réside dans la démonstration du fait que la multiplication est bien définie. Le résultat suivant en fournit la clé.

***Lemme 2.13.*** — *Soient $f = \sum_{i\in\mathbf{Q}} a_i t^i$ et $g = \sum_{j\in\mathbf{Q}} b_j t^j$ des éléments de $\mathbf{C}(\!(t^{\mathbf{Q}})\!)$. Pour tout $q \in \mathbf{Q}$, l'ensemble*

$$\{i \in \mathbf{Q} : a_i \neq 0 \text{ et } b_{q-i} \neq 0\}$$

*est fini.*

La valeur absolue $|\cdot|$ s'étend encore de façon unique à $\mathbf{C}(\!(t^{\mathbf{Q}})\!)$. De façon explicite, pour $f = \sum_{q\in\mathbf{Q}} a_q t^q \in \mathbf{C}(\!(t^{\mathbf{Q}})\!) \setminus \{0\}$, on a

$$|f| = r^{\min(\mathrm{Supp}(f))}.$$

Cette quantité est bien définie, puisque le support de $f$ est bien ordonné. On vérifie que le corps $\mathbf{C}(\!(t^{\mathbf{Q}})\!)$ est complet et algébriquement clos.

En utilisant le corps $\mathbf{C}(\!(t^{\mathbf{Q}})\!)$, on peut facilement construire des points de $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}(\!(t)\!)}$ qui ne sont pas des points de Gauß. Par exemple, posons

$$\sigma := \sum_{n\geq 1} t^{1-\frac{1}{n}}$$

et considérons l'application

$$|\cdot|_\sigma \colon P \in \mathbf{C}(\!(t)\!)[X] \longmapsto |P(\sigma)| \in \mathbf{R}_{\geq 0}.$$

C'est une valeur absolue sur $\mathbf{C}(\!(t)\!)[X]$ et elle définit donc un point de $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}(\!(t)\!)}$. Dans $\mathbf{C}(\!(t^{\mathbf{Q}})\!)$, l'élément $\sigma$ appartient à l'intersection de disques

$$\bigcap_{m\geq 1} \overline{D}\Big(\sum_{n=1}^{m} t^{1-\frac{1}{n}}, r^{1-\frac{1}{m+1}}\Big),$$

mais, dans le corps des séries de Puiseux, ou son complété, cette intersection est vide. On obtient donc ainsi un nouveau point de $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}(\!(t)\!)}$.

La construction précédente peut se généraliser en partant d'une suite décroissante de points de Gauß. Pour une telle suite $\mathcal{E} = (\eta_{\alpha_n,r_n})_{n\in\mathbf{N}}$, posons

$$|\cdot|_{\mathcal{E}} \colon P \in k[T] \longmapsto \inf_{n\in\mathbf{N}}(|P|_{\alpha_n,r_n}) \in \mathbf{R}_{\geq 0}.$$

Puisque la suite de semi-normes $(|\cdot|_{\alpha_n,r_n})_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante, on a

$$\forall P \in k[X],\ \inf_{n\in\mathbf{N}}(|P|_{\alpha_n,r_n}) = \lim_{n\in\mathbf{N}}(|P|_{\alpha_n,r_n}).$$

On en déduit que l'inégalité triangulaire et la multiplicativité sont préservées. L'application $|\cdot|_{\mathcal{E}}$ est donc une semi-norme multiplicative sur $k[X]$. Notons $\eta_{\mathcal{E}}$ le point de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ associé.

***Proposition 2.14.*** — *Supposons que $k$ est algébriquement clos. Alors, tout point de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ peut être défini par une suite décroissante de points de Gauß.*

*Démonstration.* — Soit $x \in \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$. Pour tout $\alpha \in k$, posons $r_\alpha := |T-\alpha|_x$.

Soient $\alpha, \beta \in k$. Supposons que $r_\alpha \leq r_\beta$. On a

$$|\beta-\alpha| = |\beta-\alpha|_x \leq \max(|T-\beta|_x, |T-\alpha|_x) \leq r_\beta.$$

On en déduit que $\eta_{\alpha,r_\alpha} \leq \eta_{\beta,r_\beta}$.

Posons $r := \inf_{\alpha\in k}(r_\alpha)$.

• Supposons qu'il existe $\gamma \in k$ tel que $r = r_\gamma$.

Montrons que $x = \eta_{\gamma,r_\gamma}$. Puisque $k$ est algébriquement clos, que $|\cdot|_x$ et $|\cdot|_{\gamma,r_\gamma}$ sont multiplicatives et coïncident avec $|\cdot|$ sur $k$, il suffit de montrer que l'on a $|P|_x = |P|_{\gamma,r_\gamma}$ pour tout polynôme $P$ unitaire de degré 1.

Soit $\alpha \in k$. On a

$$|T-\alpha|_x \leq \max(|\gamma-\alpha|, |T-\gamma|_x) = \max(|\gamma-\alpha|, r_\gamma) = |T-\alpha|_{\gamma,r_\gamma}.$$

D'autre part, on a $r_\gamma \leq r_\alpha$, donc, d'après le résultat démontré au début de la preuve, $\eta_{\gamma,r_\gamma} \leq \eta_{\alpha,r_\alpha}$, et donc

$$|T-\alpha|_{\gamma,r_\gamma} \leq |T-\alpha|_{\alpha,r_\alpha} = r_\alpha = |T-\alpha|_x.$$

Nous avons montré que $x = \eta_{\gamma,r_\gamma}$, et $x$ peut donc s'exprimer comme limite d'une suite (constante) de points de Gauß.

• Supposons que, pour tout $\gamma \in k$, on a $r_\gamma > r$.

Soit $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $k$ telle que la suite $(r_{\gamma_n})_{n\in\mathbf{N}}$ soit décroissante et de limite $r$. Posons $\mathcal{E} := (\eta_{\gamma_n,r_{\gamma_n}})_{n\in\mathbf{N}}$. Le raisonnement du début de la preuve montre que c'est une suite décroissante de points de Gauß.

Montrons que $\eta_{\mathcal{E}} = x$. Comme précédemment, il suffit de montrer que l'on a $|P|_{\mathcal{E}} = |P|_x$ pour tout polynôme $P$ unitaire de degré 1.

Soit $\alpha \in k$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$|T-\alpha|_x \leq \max(|\gamma_n - \alpha|, |T-\gamma_n|_x) = \max(|\gamma_n - \alpha|, r_{\gamma_n}) = |T-\alpha|_{\gamma_n, r_{\gamma_n}}.$$

On en déduit que

$$|T-\alpha|_x \leq |T-\alpha|_{\mathcal{E}}.$$

D'autre part, par hypothèse, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $r_{\gamma_n} \leq r_\alpha$. D'après le résultat démontré au début de la preuve, on a alors $\eta_{\gamma_n, r_{\gamma_n}} \leq \eta_{\alpha, r_\alpha}$, d'où

$$|T-\alpha|_{\mathcal{E}} \leq |T-\alpha|_{\gamma_n, r_{\gamma_n}} \leq |T-\alpha|_{\alpha, r_\alpha} = r_\alpha = |T-\alpha|_x.$$

□

Supposons que $k$ est algébriquement clos. Dans ce cadre, V. Berkovich a introduit la terminologie suivante :

- un point de la forme $\eta_{\alpha,0} = \alpha$, avec $\alpha \in k$, est dit de type 1 ;
- un point de la forme $\eta_{\alpha,r}$, avec $\alpha \in k$ et $r \in |k^*|$, est dit de type 2 ;
- un point de la forme $\eta_{\alpha,r}$, avec $\alpha \in k$ et $r \in \mathbf{R}_{>0} \setminus |k^*|$, est dit de type 3 ;
- les autres points sont dits de type 4.

Ainsi qu'il apparaît dans la preuve de la proposition 2.14, les points de type 4 peuvent s'obtenir à partir de suites décroissantes de disques fermés d'intersection vide. Remarquons que l'existence de ces points est directement liée aux particularités topologiques des corps ultramétriques. En effet, sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, par compacité locale, toute suite décroissante de disques fermés contient un point dans son intersection.

Rappelons que nous avons représenté les points des trois premiers types sont la forme d'un arbre à la figure 1. La classification peut se retraduire en ces termes : les feuilles sont de type 1, les points de branchement de type 2 et les autres points de type 3.

Il reste à ajouter les points de type 4 à la figure. Leur définition à partir de suites décroissantes de disques fermés d'intersection vide montre qu'ils s'insèrent en tant que feuilles de l'arbre. En particulier, on dispose entre d'une structure d'arbre sur $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ tout entier.

La proposition 2.14 et la description explicite des points de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ qu'on en tire ne valent que lorsque le corps de base $k$ est algébriquement clos. Cependant, il arrive souvent que les conséquences qu'on en déduit restent valables en général. Tel est, par exemple, le cas pour la structure d'arbre de la droite de Berkovich.

L'outil principal pour démontrer ce type de résultats est l'extension des scalaires, qui permet de relier la droite de Berkovich sur $k$ à la droite de Berkovich sur une extension valuée $K$ (par exemple le complété d'une clôture algébrique de $k$). Remarquons que la restriction des semi-normes de $K[X]$ à $k[X]$ induit une application $\pi_{K/k} \colon \mathbf{A}_K^{1,\mathrm{an}} \to \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$.

***Proposition 2.15.*** — *Soit $K$ une extension valuée de $k$. L'application naturelle*

$$\pi_{K/k} \colon \mathbf{A}_K^{1,\mathrm{an}} \to \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$$

*est continue et surjective.* □

**2.5. Topologie.** — Intéressons-nous maintenant plus précisément à la topologie de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$. Commençons par montrer que les intervalles que nous avons tracés sur la figure 1 correspondent bien à des intervalles réels.

***Lemme 2.16.*** — *Soit $\alpha \in k$. L'application*

$$r \in \mathbf{R}_{\geq 0} \longmapsto \eta_{\alpha,r} \in \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$$

*induit un homéomorphisme sur son image.*

*Démonstration.* — Notons $\varphi$ l'application de l'énoncé. Pour montrer que $\varphi$ est continue, par définition de la topologie, il suffit de montrer que, pour tout $P \in k[T]$, l'application

$$r \in \mathbf{R}_{\geq 0} \longmapsto |P|_{\alpha,r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}$$

est continue. Cela découle de la définition de $|\cdot|_{\alpha,r}$.

Considérons la fonction

$$x \in \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}} \longmapsto |T-\alpha|_x \in \mathbf{R}_{\geq 0}.$$

Elle est continue par définition de la topologie de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ et sa restriction à $\mathrm{Im}(\varphi)$ définit un inverse de $\varphi$. Le résultat s'ensuit. □

Démontrons maintenant le premier résultat topologique fondamental sur la droite de Berkovich : elle est connexe par arcs. Ce résultat est d'autant plus frappant que, rappelons-le, le corps $k$ lui-même est totalement discontinu !

***Proposition 2.17.*** — *La droite de Berkovich $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ est connexe par arcs.*

*Démonstration.* — D'après la proposition 2.15, il suffit de démontrer le résultat pour $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_K$, où $K$ est une extension valuée de $k$. On peut donc supposer que $k$ est algébriquement clos (en choisissant pour $K$ le complété d'une clôture algébrique de $k$).

Soient $x, y \in \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k$. Supposons que $x$ et $y$ sont de type 1, 2 ou 3. On peut alors écrire $x = \eta_{\alpha,r}$ et $y = \eta_{\beta,s}$ avec $\alpha, \beta \in k$ et $r, s \in \mathbf{R}_{\geq 0}$. Posons $t := \max(r, s)$. Le lemme 2.16 permet de construire un chemin de $x$ à $\eta_{\alpha,t}$ et un chemin de $y$ à $\eta_{\beta,t}$. Or, d'après le lemme 2.10, on a $\eta_{\alpha,t} = \eta_{\beta,t}$, ce qui permet de construire un chemin entre $x$ et $y$.

□

On peut obtenir un résultat plus précis par le même genre d'arguments, combinés avec un contrôle plus précis de l'application d'extension des scalaires vue à la proposition 2.15.

***Proposition 2.18.*** — *La droite de Berkovich $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k$ possède une structure d'arbre : deux points distincts sont reliés par un unique chemin injectif.* □

Intéressons-nous maintenant aux propriétés de compacité de la droite de Berkovich. Rappelons que, en général, le corps $k$ n'est pas localement compact.

Introduisons une notation pour les disques fermés au sens de Berkovich. Pour $r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, posons

$$\mathbf{D}^1_k(r) := \{x \in \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k : |X|_x \leq r\}.$$

***Proposition 2.19.*** — *La droite de Berkovich $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k$ est séparée, union dénombrable de compacts et localement compacte.*

*Pour tout $r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, le disque fermé $\mathbf{D}^1_k(r)$ est compact.*

*Démonstration.* — Commençons par la propriété de séparation. Soient $x, y \in \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k$ avec $x \neq y$. Il existe alors $P \in k[X]$ tel que $|P|_x \neq |P|_y$. Quitte à échanger $x$ et $y$, on peut supposer que $|P|_x < |P|_y$. Soit $r \in ]|P|_x, |P|_y[$. Posons

$$U_x := \{z \in \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k : |P|_x < r\} \text{ et } U_y := \{z \in \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k : |P|_y > r\}.$$

Ce sont deux ouverts disjoints de $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k$ qui contiennent respectivement $x$ et $y$. On en déduit que la droite $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k$ est séparée.

Montrons maintenant que les disques fermés sont compacts. Soit $r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$.

Remarquons que, pour tout $x \in \mathbf{D}_k^1(r)$ et tout $P = \sum_i c_i T^i \in k[X]$, on a

$$|P|_x \leq \max_i(|c_i||T_x|^i) \leq \max_i(|c_i| r^i) = |P|_{0,r}.$$

Considérons l'ensemble $E := \prod_{P \in k[T]} [0, |P|_{0,r}]$ muni de la topologie produit. Notons $F$ le sous-ensemble de $E$ formé des éléments $(z_P)_{P \in k[X]}$ satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \forall P, Q \in k[X],\ z_{P+Q} \leq \max(z_P, z_Q); \\ \forall P, Q \in k[X],\ z_{PQ} = z_P\, z_Q; \\ \forall a \in k,\ z_a = |a|. \end{cases}$$

Considérons l'application

$$v \colon x \in \mathbf{D}_k^1(r) \longmapsto (|P|_x)_{P \in k[T]} \in \prod_{P \in k[T]} \mathbf{R}_{\geq 0}.$$

D'après la remarque ci-dessus, elle prend ses valeurs dans $E$, et même dans $F$. Il découle de la définition de semi-norme multiplicative que $v$ induit une bijection entre $\mathbf{D}_k^1(r)$ et $F$. Par définition de la topologie sur $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$, c'est un homéomorphisme.

Or, d'après le théorème de Tychonoff, $E$ est compact. Puisque $F$ est fermé dans $E$, il est également compact, et on en déduit que $\mathbf{D}_k^1(r)$ est compact.

Pour montrer que la droite de Berkovich est union dénombrable de compacts, il suffit maintenant d'écrire

$$\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{D}_k^1(n).$$

Montrons finalement que $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ est localement compacte. Soit $x \in \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ et soit $U$ un voisinage de $x$ dans $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$. Par définition de la topologie, il existe $u \in \mathbf{N}$, $P_1, \ldots, P_u \in k[X]$, $r_1, \ldots, r_u, s_1, \ldots, s_u \in \mathbf{R}$ tels que

$$V_x := \bigcap_{1 \leq i \leq u} \{z \in \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}} : r_i < |P_i|_z < s_i\}$$

soit un voisinage de $x$ contenu dans $U$.

Remarquons que, pour tout $i \in [\![1, u]\!]$, on a $r_i < |P_i|_x < s_i$. Pour tout $i \in [\![1, u]\!]$, choisissons $r_i', s_i' \in \mathbf{R}$ tels que

$$r_i < r_i' < |P_i|_x < s_i' < s_i.$$

Alors,

$$V_x' := \bigcap_{1 \leq i \leq u} \{z \in \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}} : r_i' \leq |P_i|_z \leq s_i'\}$$

est encore un voisinage de $x$ contenu dans $U$.

Posons $t := |T|_x + 1$ et considérons $W_x := V'_x \cap \mathbf{D}^1_k(t)$. C'est encore un voisinage de $x$ contenu dans $U$. Puisque $\mathbf{D}^1_k(t)$ est compact et $V'_x$ est fermé, $W_x$ est compact. □

La preuve précédente, basée sur le thèorème de Tychonoff, est efficace, mais peu éclairante. Afin d'acquérir une meilleure intuition de la compacité locale, nous allons décrire des bases de voisinages du point de Gauß, *cf.* figure 2 pour une représentation graphique.

***Lemme 2.20.*** — *Supposons que $k$ est algébriquement clos. Alors l'ensemble des parties de la forme*

$$\{x \in \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k : r < |X|_x < s\} \cap \bigcap_{1\leq i\leq m} \{x \in \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k : |X - \alpha_i|_x > t\},$$

*avec $m \in \mathbf{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in k^\circ \setminus k^{\circ\circ}$, $r, t \in ]0, 1[$, $s \in ]1, +\infty[$, constitue une base de voisinages ouverts de $\eta_G$ dans $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k$.*

*Démonstration.* — Commençons par remarquer que, par définition de $\eta_G$ et de la topologie de $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k$, les parties de l'énoncé sont des bien voisinages de $\eta_G$ dans $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k$. Il reste à montrer qu'elle forment une base de voisinage.

Par définition de la topologie, on obtient un système fondamental de voisinages de $\eta_G$ en considérant les intersections finies d'ensembles de la forme

$$O_{P,u,v} := \{x \in \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k : u < |P|_x < v\}, \text{ avec } P \in k[X],\ u, v \in \mathbf{R},$$

qui contiennent $\eta_G$.

Montrons que tout ensemble $O_{P,u,v}$ qui contient $\eta_G$ contient également un ensemble comme dans l'énoncé. Cela entraînera le résultat, puisque les ensembles de l'énoncé sont stables par intersection.

Soient $P \in k[X]$ et $u, v \in \mathbf{R}$ tels que $O_{P,u,v}$ contienne $\eta_G$. Notons $\alpha^-_1, \ldots, \alpha^-_{m^-}$ (resp. $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, resp. $\alpha^+_1, \ldots, \alpha^+_{m^+}$) les racines de $P$ de valeur absolue strictement inférieure à 1 (resp. égale à 1, resp. strictement supérieure à 1), comptées avec multiplicité. Il existe $c \in k$ tel que

$$P(X) = c \prod_{i^-=1}^{m^-} (X - \alpha^-_{i^-}) \prod_{i=1}^{m} (X - \alpha_i) \prod_{i^+=1}^{m^+} (X - \alpha^+_{i^+}).$$

Puisque $O_{P,u,v}$ contient $\eta_G$, on a

$$|P|_G = |c| \prod_{i^+=1}^{m^+} |\alpha^+_{i^+}| \in ]u, v[.$$

Posons $r := \max_{1\leq i^-\leq m^-}(|\alpha_{i^-}|)$. Soit $x \in \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ tel que $|X|_x \in ]r,1[$. On a alors

$$|P|_x = |c| r^{m^-} \prod_{i^+=1}^{m^+} |\alpha_{i^+}^+|.$$

Quitte à augmenter $r$ (tout en gardant $r<1$), cette quantité appartient à $]u,v[$, et $x$ appartient donc à $O_{P,u,v}$.

De même, on montre qu'il existe $s \in ]1,+\infty[$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ vérifiant $|X|_x \in ]1,s[$, on ait $x \in O_{P,u,v}$.

Soit $t \in ]0,1[$. Soit $x \in \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ tel que $|X|_x = 1$ et, pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, $|X-\alpha_i|_x > t$. Remarquons que, pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, on a $|X-\alpha_i|_x \leq 1$, et donc

$$|c| t^m \prod_{i^+=1}^{m^+} |\alpha_{i^+}^+| < |P|_x \leq |c| \prod_{i^+=1}^{m^+} |\alpha_{i^+}^+|.$$

Quitte à augmenter $t$ (tout en gardant $t<1$), cette quantité appartient à $]u,v[$, et $x$ appartient donc à $O_{P,u,v}$.

En combinant les différents cas, nous avons montré que la partie

$$\{x \in \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}} : r < |X|_x < s\} \cap \bigcap_{1\leq i\leq m} \{x \in \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}} : |X-\alpha_i|_x > t\}$$

est contenue dans $O_{P,u,v}$.

□

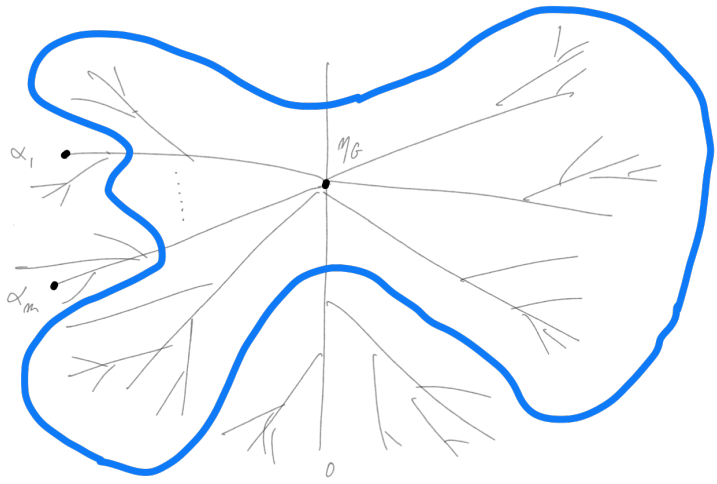


FIGURE 2. Un voisinage du point de Gauß

Revenant à la structure d'arbre de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$, le lemme 2.20 assure que tout voisinage du point de Gauß contient entièrement toutes les branches issues de ce point, à l'exception d'un nombre fini, *cf.* figure 2. On conçoit que de tels gros voisinages puissent engendrer une topologie localement compacte.

Profitons-en pour remarquer que, bien que $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ présente une structure d'arbre, sa topologie est strictement plus grossière que la topologie d'arbre (où les voisinages des points sont définis comme réunions de voisinages sur chaque branche).

**2.6. Variation des fonctions.** — Considérons la demi-droite de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ issue de 0 :

$$I_0 := \{\eta_{0,r} : r \geq 0\}.$$

Le but de cette section est d'étudier la variation de la valeur absolue d'un polynôme donné le long de $I_0$.

D'après le lemme 2.16, l'application $\eta_{0,r} \mapsto r$ envoie homéomorphiquement l'ensemble $I_0$ sur $[0, +\infty[$. Dans la suite, nous identifierons ces deux ensembles.

***Proposition 2.21.*** — *Soit $P \in k[X]$. Il existe $u \in \mathbf{N}$ et $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_u < r_{u+1} = +\infty$ tels que, pour tout $i \in [\![0, u]\!]$, on ait*

$$\forall r \in [r_i, r_{i+1}[,\ |P|_{0,r} = c_i\, r^{n_i},$$

*avec $c_i \in |k|$ et $n_i \in \mathbf{N}$. De plus, pour tout $i \in [\![0, u]\!]$, $n_i$ est le nombre de racines de $P$ (dans une clôture algébrique de $k$) de valeur absolue inférieure ou égale à $r_i$, comptées avec multiplicité.*

*Démonstration.* — Notons $r_1 < \cdots < r_u$ les valeurs absolues des racines non nulles de $P$. Posons $r_0 := 0$ et $r_{u+1} := +\infty$. Notons $d$ le degré de $P$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ ses racines, classées par ordre de valeur absolue croissant. Soit $i \in [\![0, u]\!]$. Posons

$$n_i := \max(\{j \in [\![0, d]\!] : |\alpha_j| \leq r_i\}).$$

Soit $r \in [r_i, r_{i+1}[$. Pour $j \in [\![1, d]\!]$, on a

$$|T - \alpha_j|_{0,r} = \max(|\alpha_j|, r) = \begin{cases} r & \text{si } j \leq n_i; \\ |\alpha_j| & \text{si } j > n_i. \end{cases}$$

Le résultat s'ensuit par multiplicativité de $|\cdot|_{0,r}$. □

***Remarque 2.22.*** — Lorsque $P$ n'est pas nul, les égalités de la proposition 2.21 peuvent s'écrire sous la forme

$$\log(|P|_{0,r}) = n_i \log(r) + \log(c_i).$$

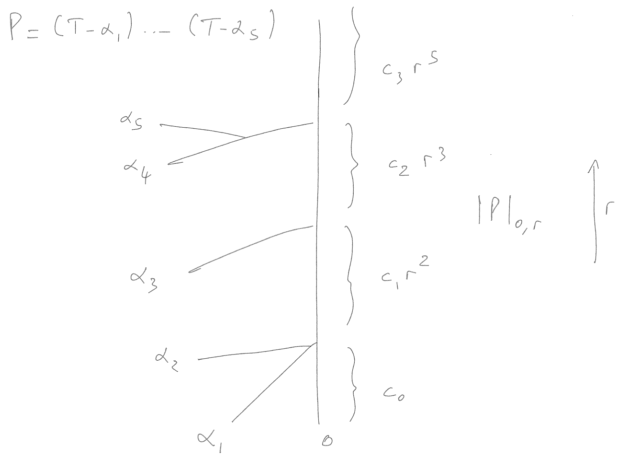


FIGURE 3. Variation de la valeur absolue d'un polynôme sur la branche issue de 0

Exprimée en coordonnées logarithmiques, la restriction de $|P|$ à $I_0$ est donc une fonction affine par morceaux. L'interprétation des $n_i$ montre qu'elle est convexe. En outre, les valeurs absolues des racines de $P$ correspondent aux abscisses des points de changement de pente, le nombre de racines ayant cette valeur absolue étant donnée par la différence des pentes.

La restriction de $|P|$ à $I_0$ contient donc les mêmes informations que le polygone de Newton de $P$, avec un échange entre celles portées par les abcisses et les pentes. Plus formellement, ces deux fonctions sont reliées entre elles par la transformation de Legendre.

**2.7. Limites de racines de l'unité.** — Dans cette section, nous allons étudier le comportement des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité lorsque $n$ croît, dans les cas archimédien et ultramétrique.

Dans le cas complexe, comme on s'y attend, les racines de l'unité se répartissent uniformément sur le cercle unité. Le théorème suivant donne un sens précis à cet assertion. C'est un cas particulier d'un théorème de Yuri Bilu, *cf.* [**Bil97**].

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\mu_n(\mathbf{C})$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité dans $\mathbf{C}$.

***Théorème 2.23.*** — *Pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathbf{C}, \mathbf{R})$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{z\in\mu_n(\mathbf{C})} f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})\, dt.$$

*Démonstration.* — Le résultat ne dépend que de la restriction à $f$ au cercle unité $\mathbf{U} := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$. Il suffit donc de démontrer le résultat pour $f \in \mathbf{C}(\mathbf{U}, \mathbf{R})$. D'après le théorème de Weierstraß dans sa version trigonométrique, les polynômes sont denses dans $\mathbf{C}(\mathbf{U}, \mathbf{R})$ pour la norme uniforme. Il suffit donc de démontrer le résultat pour les polynômes et même, par linéarité, pour les puissances (positives et négatives) de la variable $z$.

Soit $m \in \mathbf{Z}$. Si $m = 0$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{z\in\mu_n(\mathbf{C})} z^0 = 1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^0 \,\mathrm{d}t,$$

et le résultat est vrai.

Supposons que $m \neq 0$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Notons $d$ le pgcd de $n$ et $m$. En écrivant

$$\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^m = \left(e^{\frac{2i\pi}{n/d}}\right)^{m/d},$$

on montre que la famille $(z^m)_{z\in\mu_n(\mathbf{C})}$ contient exactement $d$ copies de la famille $(z^{m/d})_{z\in\mu_{n/d}(\mathbf{C})}$. Puisque $m/d$ et $n/d$ sont premiers entre eux, la famille $(z^{m/d})_{z\in\mu_{n/d}(\mathbf{C})}$ n'est autre que la famille $\mu_{n/d}(\mathbf{C})$ elle-même, à l'ordre près. Or la somme des éléments de $\mu_q(\mathbf{C})$ est nulle, dès que $q \geq 2$. On en déduit que, si $n > m$, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{z\in\mu_n(\mathbf{C})} z^m = 0.$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \Big[ \frac{1}{im} e^{imt} \Big]_0^{2\pi} = 0.$$

Le résultat s'ensuit. □

Cherchons maintenant à établir un analogue de ce résultat dans le cadre ultramétrique. Soit $p$ un nombre premier. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\mu_n(\mathbf{C}_p)$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité dans $\mathbf{C}_p$. Le résultat qui suit est un cas particulier d'un théorème d'Antoine Chambert-Loir, *cf.* **[CL06]**.

***Théorème 2.24.*** — *Pour tout $f \in \mathbf{C}(\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}_p}, \mathbf{R})$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{z\in\mu_n(\mathbf{C}_p)} f(z) = f(\eta_G).$$

*Démonstration.* — Soit $f \in \mathbf{C}(\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}_p}, \mathbf{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage $U$ de $\eta_G$ tel que, pour tout $x \in U$, on ait $|f(x) - f(\eta_G)| \leq \varepsilon$.

D'après ..., il existe $m \in \mathbf{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbf{C}_p$ avec $|\alpha_j| = 1$ pour tout $j$, $r, t \in ]0,1[$, $s \in ]1, +\infty[$ tels que

$$\{x \in \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}_p} : r < |X|_x < s\} \cap \bigcap_{1 \leq j \leq m} \{x \in \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}_p} : |X - \alpha_j|_x > t\}$$

soit un voisinage de $\eta_G$ contenu dans $U$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $j \in [\![1, m]\!]$. Nous allons chercher à évaluer $|z - \alpha_j|$ pour $z \in \mu_n(\mathbf{C}_p)$. Les éléments $z - \alpha_j$, avec $z \in \mu_n(\mathbf{C}_p)$, sont les racines du polynôme $P_j := (X + \alpha_j)^n - 1$.

Notons $P_j := \sum_{i=0}^n c_i X^i$. Par définition, le polygone de Newton de $P_j$ est l'enveloppe convexe inférieure des points $A_i := (i, v_p(c_i))$, pour $i \in [\![0, n]\!]$. Puisque $P_j \in \mathbf{C}_p^\circ[X]$, ce polygone se situe dans le premier quadrant. Considérons ces points d'abcisses 1 et $n$, c'est-à-dire les points

$$A_1 = (1, v_p(c_1)) = (1, v_p(n)) \text{ et } A_n = (n, v_p(c_n)) = (n, 0).$$

La partie du polygone de Newton comprise entre les abscisses 1 et $n$ se situe donc sous le segment $[A_1, A_n]$, et au-dessus de l'axe des abscisses.

Notons $N \geq 1$ le plus grand entier tel que, au-dessus du segment $[1, N]$, toutes les pentes du polygone de Newton soient inférieures à $\log_p(t)$. On a alors $N \leq v_p(n)/\log(t)$, *cf.* figure 4.

Par la théorie du polygone de Newton, on en déduit que $P_j$ possède au plus $v_p(n)/\log(t) + 1$ racines $\beta$ telles que $|\beta - \alpha_j| \leq t$.

En regroupant les informations obtenues pour les différents $j$, on déduit que

$$\sharp\big(\mu_n(\mathbf{C}_p) \cap U^c\big) \leq m\Big(\frac{v_p(n)}{\log_p(t)} + 1\Big),$$

où l'on a noté $U^c$ le complémentaire de $U$ dans $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}_p}$.

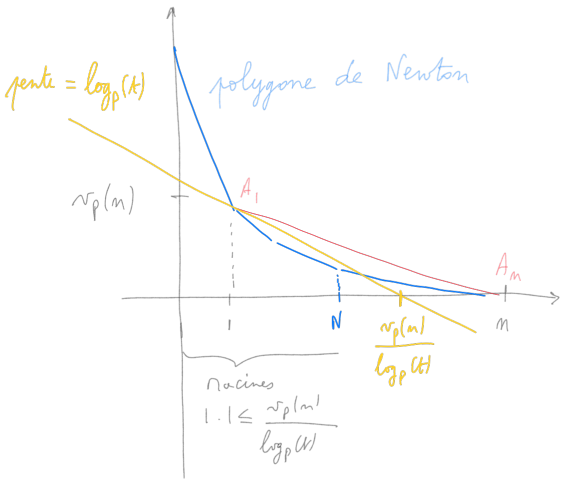


FIGURE 4. Le polygone de Newton de $P_j$

Puisque $\mathbf{D}^1_{\mathbf{C}_p}(1)$ est compact, la fonction continue $|f|$ y est majorée par une constante $M \in \mathbf{R}_{\geq 0}$. On a alors

$$\begin{aligned}
& \Big|\Big(\frac{1}{n}\sum_{z\in\mu_n(\mathbf{C}_p)} f(z)\Big) - f(\eta_G)\Big| \\
= \; & \Big|\frac{1}{n}\sum_{z\in\mu_n(\mathbf{C}_p)} (f(z) - f(\eta_G))\Big| \\
\leq \; & \frac{1}{n}\sum_{z\in\mu_n(\mathbf{C}_p)\cap U^c} |f(z) - f(\eta_G))| + \frac{1}{n}\sum_{z\in\mu_n(\mathbf{C}_p)\cap U} |f(z) - f(\eta_G))| \\
\leq \; & \frac{m}{n}\Big(\frac{v_p(n)}{\log_p(t)} + 1\Big)2M + \varepsilon.
\end{aligned}$$

On en déduit le résultat voulu, en utilisant le fait que $v_p(n)/n$ tend vers 0, lorsque $n$ tend vers l'infini. □

La similitude entre les théorèmes 2.23 et 2.24 vient encore renforcer l'idée que le point de Gauß de la droite de Berkovich incarne une sorte de point générique du disque unité.

## 3. Dimension supérieure

Comme on peut s'y attendre, la théorie des espaces Berkovich ne se limite pas au cas la droite, mais permet de définir des espaces de toute dimension. Pour définir les espaces affines, on reprend la simplement définition de la droite avec un anneau de polynômes en plusieurs variables.

***Définition 3.1.*** — Soit $n \in \mathbf{N}$. L'espace de Berkovich de dimension $n$, noté $\mathbf{A}_k^{n,\mathrm{an}}$, est l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $k[X_1, \ldots, X_n]$ qui induisent la valeur absolue donnée sur $k$.

On le munit de la topologie la plus grossière qui rende continues les fonctions de la forme

$$|\cdot|_x \in \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}} \longmapsto |P|_x \in \mathbf{R}_{\geq 0},$$

avec $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$.

Contrairement au cas de la droite de Berkovich, en général, on ne dispose pas de description explicite des points des espaces affines de dimension supérieure à 2, même lorsque le corps de base est algébriquement clos. Le cas du bidisque constitue cependant une exception intéressante et nous commencerons par traiter ce cas. La description obtenue sera utile pour les applications dynamiques présentées à la fin du texte. Nous ajouterons ensuite quelques mots sur le cas général.

**3.1. Bidisque ouvert en valuation triviale.** — Dans ce numéro, nous étudions un espace bien particulier : le bidisque ouvert sur le corps $\mathbf{C}$ muni de la valeur absolue triviale $|\cdot|_0$.

C'est une partie du plan de Berkovich $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{2,\mathrm{an}}$. Par habitude, nous modifions la définition 3.1 et notons les variables $X$ et $Y$ plutôt que $X_1$ et $X_2$. Le bidisque ouvert est alors défini par

$$\mathring{\mathbf{D}}_{\mathbf{C}}^2 := \{x \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{2,\mathrm{an}} : |X|_x < 1 \text{ et } |Y|_x < 1\}.$$

Remarquons que, puisque nous avons muni $\mathbf{C}$ de la valeur absolue triviale, le bidisque ouvert classique

$$\mathring{D}_{\mathbf{C}}^2 := \{(a, b) \in \mathbf{C}^2 : |a|_0 < 1 \text{ et } |b|_0 < 1\}$$

contient un seul point, à savoir $(0, 0)$. On peut penser au bidisque de Berkovich $\mathring{\mathbf{D}}_{\mathbf{C}}^2$ comme contenant l'information infinitésimale au voisinage de ce point.

Décrivons maintenant $\mathring{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{C}}$. Il contient, bien sûr, l'analogue du point $(0,0)$, sous la forme de la semi-norme multiplicative définie par

$$P \in \mathbf{C}[X,Y] \longmapsto |P(0,0)| \in \mathbf{R}_{\geq 0}.$$

Nous noterons encore $(0,0)$ le point de $\mathring{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{C}}$ correspondant.

Pour $r \in ]0,1[$, posons

$$\mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}} := \{x \in \mathbf{A}^{2,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}} : \max(|X|_x, |Y|_x) = r\}.$$

On a alors

$$\mathring{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{C}} = \{(0,0)\} \cup \bigcup_{0<r<1} \mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}}.$$

Mentionnons maintenant un phénomène spécifique aux corps trivialement valués. Soit $u \in \mathbf{R}_{>0}$. Pour toute semi-norme multiplicative $|\cdot|$ sur $\mathbf{C}[X,Y]$, $|\cdot|^u$ est encore une semi-norme multiplicative sur $\mathbf{C}[X,Y]$. En outre, si $|\cdot|$ induit $|\cdot|_0$ sur $\mathbf{C}$, alors il en va de même pour $|\cdot|^u$, puisque $|\cdot|_0^u = |\cdot|_0$. Nous pouvons donc ainsi définir une application

$$\lambda_u \colon |\cdot|_x \in \mathbf{A}^{2,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}} \longmapsto |\cdot|_x^u \in \mathbf{A}^{2,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}}.$$

Par définition de la topologie, $\lambda_u$ est continue, et même un homéomorphisme, d'inverse $\lambda_{1/u}$. Remarquons également que $\lambda_u(\mathring{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{C}}) = \mathring{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{C}}$ et que,

$$\forall r \in ]0,1[,\ \lambda_u(\mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}}) = \mathbf{D}^{2,r^u}_{\mathbf{C}}.$$

Ainsi, pour décrire $\mathring{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{C}}$, il nous suffit de décrire $\mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}}$.

***Proposition 3.2.*** — *Soit $r \in ]0,1[$. Munissons $\mathbf{C}(\!(X)\!)$ de la valeur absolue $X$-adique normalisée par $|X| = r$ et considérons le disque $\mathbf{D}^1_{\mathbf{C}(\!(X)\!)}(r)$ en la variable $Y$. On a un homéomorphisme canonique*

$$\mathbf{D}^1_{\mathbf{C}(\!(X)\!)}(r) \xrightarrow{\sim} \{x \in \mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}} : |X|_x = r \text{ et } |Y|_x \leq r\}.$$

*De même, munissons $\mathbf{C}(\!(Y)\!)$ de la valeur absolue $Y$-adique normalisée par $|Y| = r$ et considérons le disque $\mathbf{D}^1_{\mathbf{C}(\!(Y)\!)}(r)$ en la variable $X$. On a un homéomorphisme canonique*

$$\mathbf{D}^1_{\mathbf{C}(\!(Y)\!)}(r) \xrightarrow{\sim} \{x \in \mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}} : |X|_x \leq r \text{ et } |Y|_x = r\}.$$

*Démonstration.* — Nous ne démontrerons que le premier homéomorphismes, le second s'en déduisant en échangeant les rôles de $X$ et $Y$.

Soit $z \in \mathbf{D}^1_{\mathbf{C}(\!(X)\!)}(r)$. Il lui correspond une semi-norme multiplicative $|\cdot|_z$ sur $\mathbf{C}(\!(X)\!)[Y]$. En restreignant à $\mathbf{C}[X,Y]$, on obtient une semi-norme multiplicative $|\cdot|_{z'}$ sur $\mathbf{C}[X,Y]$ qui satisfait

$$|X|_{z'} = |X|_z = r \text{ et } |Y|_{z'} = |Y|_z \leq r.$$

Ce raisonnement permet de définir l'application

$$j_X \colon \mathbf{D}^1_{\mathbf{C}(\!(X)\!)}(r) \xrightarrow{\sim} \{x \in \mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}} : |X|_x = r \text{ et } |Y|_x \leq r\}$$

de l'énoncé. Par définition des topologies, elle est continue.

Soit $x \in \mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}}$ tel que $|X|_x = r$ et $|Y|_x \leq r$. Considérons la semi-norme multiplicative associée

$$|\cdot|_x \colon \mathbf{C}[X,Y] \to \mathbf{R}_{\geq 0}.$$

Considérons la norme de Gauß $|\cdot|_{0,r}$ sur $\mathbf{C}(\!(X)\!)[Y]$. Notons identiquement sa restriction à $\mathbf{C}[X,Y]$. Puisque $|X|_x = r$ et $|Y|_x \leq r$, on a $|\cdot|_x \leq |\cdot|_{0,r}$ sur $\mathbf{C}[X,Y]$. Par conséquent, la semi-norme $|\cdot|_x$ est continue lorqu'on munit $\mathbf{C}[X,Y]$ de $|\cdot|_{0,r}$.

Puisque $|X|_x \neq 0$, la semi-norme multiplicative $|\cdot|_x$ s'étend à $\mathbf{C}[X,X^{-1},Y]$, et cette extension continue. Par conséquent, $|\cdot|_x$ s'étend en une semi-norme multiplicative sur le complété de $\mathbf{C}[X,X^{-1},Y]$ pour $|\cdot|_{0,r}$, et ce dernier contient $\mathbf{C}(\!(X)\!)[Y]$.

On vérifie que l'application $\{x \in \mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}} : |X|_x = r \text{ et } |Y|_x \leq r\} \to \mathbf{D}^1_{\mathbf{C}(\!(X)\!)}(r)$ que nous venons de définir est l'inverse de $j_X$.

Il reste à montrer que la bijection continue $j_X$ est un homéomorphisme. Cela découle de la compacité de $\mathbf{D}^1_{\mathbf{C}(\!(X)\!)}(r)$, *cf.* proposition 2.19. □

Dans la suite de ce texte, nous identifierons les espaces reliés par les homéomorphismes ci-dessus. En particulier, pour tout $r \in ]0,1[$, on a

$$\mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}} = \mathbf{D}^1_{\mathbf{C}(\!(X)\!)}(r) \cup \mathbf{D}^1_{\mathbf{C}(\!(Y)\!)}(r).$$

Cette description est particulièrement utile en ce qu'elle permet de ramener l'étude de de $\mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}}$ (et donc celle du bidisque $\mathring{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{C}}$) à celle de disques de dimension 1.

Par exemple, la proposition 2.18 permet d'obtenir le résultat suivant.

***Corollaire 3.3.*** — *Pour tout $r \in ]0,1[$, $\mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}}$ possède une structure d'arbre.* □

Pour $r \in ]0,1[$, notons $\zeta_r$ le point de $\mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}}$ associé à la semi-norme multiplicative

$$|\cdot|_{\zeta_r} \colon \sum_{i,j} a_{i,j} X^i Y^j \in \mathbf{C}[X,Y] \longmapsto \max_{i,j}(|a_{i,j}|\, r^{i+j}).$$

Ce point appartient aux deux disques $\mathbf{D}^1_{\mathbf{C}(\!(X)\!)}(r)$ et $\mathbf{D}^1_{\mathbf{C}(\!(Y)\!)}(r)$, et s'identifie à chaque fois au point de Gauß $\eta_{0,r}$.

***Corollaire 3.4.*** — *Soit $x$ un point de $\mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}}$ qui n'est pas une feuille. Alors, il existe $u_x \in ]0,1[$ tel que*

$$\forall P \in \mathbf{C}[X,Y],\ |P|_x \leq |P|_{\zeta_r} \leq |P|_x^{u_x}.$$

*Démonstration.* — D'après la proposition 3.2, il suffit de démontrer le résultat pour $\mathbf{D}^1_{\mathbf{C}(\!(X)\!)}(r)$ (avec variable $Y$) et $\mathbf{D}^1_{\mathbf{C}(\!(Y)\!)}(r)$ (avec variable $X$). En échangeant les variables, il suffit de traiter le premier cas. D'après la proposition 2.15, on peut remplacer le corps des séries de Laurent $\mathbf{C}(\!(X)\!)$ par une extension valuée $K$. En choisissant le complété du corps des séries de Puiseux, on se ramène au cas du disque $\mathbf{D}^1_K(r)$ (avec variable $Y$), avec $K$ algébriquement clos.

Puisque le point $x$ n'est pas une feuille, d'après la discussion qui suit la proposition 2.14, il est de type 2 ou 3. Par conséquent, il existe $\alpha \in K$ et $t \in \mathbf{R}_{>0}$ tels que $x = \eta_{\alpha,t}$. Puisque $x \in \mathbf{D}^1_K(r)$, on a $|\alpha| \leq r$ et $t \leq r$.

Soit $P \in \mathbf{C}[X,Y]$. Écrivons-le sous la forme $P = \sum_j A_j(X) Y^j$, avec, pour tout $j$, $A_j(X) \in \mathbf{C}[X] \subset K$. En particulier, pour tout $j$, on a $|A_j(X)| \leq 1$. On peut écrire

$$P = \sum_j A_j(X)(\alpha + (Y-\alpha))^j = \sum_j b_j (Y-\alpha)^j,$$

avec, pour tout $j$, $|b_j| \leq 1$.

Puisque $|\alpha| \leq r$, d'après le lemme 2.10, on a $\eta_{\alpha,r} = \eta_{0,r} = \zeta_r$, d'où

$$|P|_{\zeta_r} = \max_j(|b_j|\, r^j).$$

Par conséquent, on a

$$|P|_{\alpha,t} = \max_j(|b_j|\, t^j) \leq |P|_{\zeta_r}.$$

Il existe $u_x \in ]0,1[$ tel que $t^{u_x} = r$. Pour tout $j$, on a $|b_j| \leq 1$, donc $|b_j|^{u_x} \geq |b_j|$. On en déduit que

$$|P|^{u_x}_{\alpha,t} = \max_j(|b_j|^{u_x}\, (t^j)^{u_x}) \geq \max_j(|b_j|\, r^j) = |P|_{\zeta_r},$$

comme désiré. □

**3.2. Cas général.** — Même si on ne dispose pas, à l'heure actuelle, de description explicite des espaces affines de dimension quelconque, on peut s'en faire une idée à l'aide de fibrations.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Il découle directement des définitions qu'on a une application

$$\mathrm{pr}\colon \mathbf{A}_k^{n+1,\mathrm{an}} \longrightarrow \mathbf{A}_k^{n,\mathrm{an}},$$

dite de projection, obtenue en restreignant à $k[X_1, \ldots, X_n]$ les semi-normes sur $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$. Nous allons montrer que, pour tout $x \in \mathbf{A}_k^{n,\mathrm{an}}$, la fibre $\mathrm{pr}^{-1}(x)$ s'identifie à une droite de Berkovich définie sur une extension du corps $k$ (qui dépend du point $x$).

Introduisons les extensions en question. Soit $x \in \mathbf{A}_k^{n,\mathrm{an}}$. Posons

$$\mathfrak{p}_x := \{P \in k[X_1, \ldots, X_n] : |P|_x = 0\}.$$

Puisque $|\cdot|_x$ est multiplicative, $\mathfrak{p}_x$ est un idéal premier de $k[X_1, \ldots, X_n]$. Le quotient $A_x := k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{p}_x$ est donc un anneau intègre. Notons $F_x$ sont corps de fractions. Remarquons que la semi-norme multiplicative $|\cdot|_x$ induit une valeur absolue sur $A_x$ et $F_x$, que nous noterons identiquement. On note $\mathcal{H}(x)$ le complété de $F_x$ pour $|\cdot|_x$. Par construction, on a un morphisme d'anneaux

$$\mathrm{ev}_x\colon k[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow \mathcal{H}(x),$$

qui induit une isométrie sur $k$. On peut penser à ce morphisme comme à une évaluation au point $x$, en prenant garde au fait que la « valeur » ainsi définie se trouve dans un corps qui dépend lui-même de $x$ !

En raisonnant comme dans la preuve de la proposition 3.2, on obtient le résultat suivant.

***Proposition 3.5.*** — *Pour tout $x \in \mathbf{A}_k^{n,\mathrm{an}}$, on a un homéomorphisme canonique*

$$\mathbf{A}_{\mathcal{H}(x)}^{1,\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}^{-1}(x).$$

□

## 4. Application : dynamique polynomiale en dimension 2

Dans cette section, nous étudions le comportement d'un endomorphisme polynomial de $\mathbf{C}^2$ au voisinage d'un point fixe super-attractif. Le résultat que nous exposons est tiré de l'article [**FJ07**] de Charles Favre et Mattias Jonsson (voir également [**Jon15**] pour un survol complet).

Soit $f$ un endomorphisme polynomial de $\mathbf{C}^2$, c'est-à-dire une application de la forme

$$f\colon (x,y) \in \mathbf{C}^2 \longmapsto (f_1(x,y), f_2(x,y)) \in \mathbf{C}^2, \tag{EP}$$

avec $f_1, f_2 \in \mathbf{C}[X,Y]$. Nous souhaitons étudier son comportement au voisinage d'un point fixe attractif. Quitte à changer de coordonnées, nous pouvons supposer que ce point fixe est $(0,0)$. On a alors $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$.

En général, le comportement de $f$ au voisinage de $(0,0)$ est régi par la jacobienne de $f$ en $(0,0)$. Dans le cas générique, elle possède deux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2$ distinctes, et l'on peut alors, par un changement linéaire de coordonnées, écrire $f$ sous la forme particulièrement simple

$$(x', y') \in \mathbf{C}^2 \longmapsto (\lambda_1 x', \lambda_2 y') \in \mathbf{C}^2.$$

Dans la suite, nous nous intéressons au cas où le point fixe est super-attractif, ce qui signifie que la jacobienne en ce point est nulle.

**4.1. Taux d'attraction.** — Notons $\mathrm{End}(\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}})$ l'ensemble des endomorphismes polynomiaux de $\mathbf{C}^2$. Dans la suite, nous identifierons ces endomorphismes aux éléments de $\mathbf{C}[X,Y]^2$. Avec les notations de (EP), cela revient à identifier $f$ au couple $(f_1, f_2)$.

Pour $P = \sum_{i,j\geq 0} a_{i,j} X^i Y^j \in \mathbf{C}[X,Y]$, on pose

$$c(P) := \inf(\{i+j : a_{i,j} \neq 0\}),$$

avec la convention $c(0) = +\infty$. Pour $(P,Q) \in \mathbf{C}[X,Y]^2$, on pose

$$c(P,Q) = \min(c(P), c(Q)).$$

***Définition 4.1.*** — Pour $f \in \mathrm{End}(\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}})$ avec un point fixe en $(0,0)$, le nombre réel $c(f)$ est appelée taux d'attraction de $f$ en $(0,0)$.

Dans le cadre de la définition, la norme de l'image $\|f(x,y)\|$ a tendance à se comporter comme $\|(x,y)\|^{c(f)}$, ce qui explique la terminologie choisie.

***Lemme 4.2.*** — *Pour $P, Q, R \in \mathbf{C}[X,Y]$, on a*

$$c(R(P,Q)) \geq c(R)c(P,Q).$$

*Pour $f \in \mathrm{End}(\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}})$ et $n, m \in \mathbf{N}$, on a*

$$c(f^{n+m}) \geq c(f^n)c(f^m).$$

□

Il suit du lemme 4.2 que la suite $(c(f^n)^{1/n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge.

***Définition 4.3.*** — Pour $f \in \mathrm{End}(\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}})$ avec un point fixe en $(0,0)$, le nombre réel

$$c_\infty(f) := \lim_{n\to+\infty} c(f^n)^{1/n}$$

est appelé taux d'attraction asymptotique de $f$ en $(0,0)$.

***Exemple 4.4.*** — Considérons l'exemple $f(X,Y) = (Y, XY)$. On a

$$\begin{cases} f(X,Y) = (Y, XY) & c(f) = 1 \\ f^2(X,Y) = (XY, XY^2) & c(f^2) = 2 \\ f^3(X,Y) = (XY^2, X^2Y^3) & c(f^3) = 3 \\ f^4(X,Y) = (X^2Y^3, X^3Y^5) & c(f^4) = 5 \\ f^5(X,Y) = (X^3Y^5, X^5Y^8) & c(f^4) = 8 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \end{cases}$$

On reconnaît dans la suite $(c(f^n))_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de Fibonacci. On en déduit que

$$c_\infty(f) = \lim_{n\to+\infty} c(f^n)^{1/n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

**4.2. Action sur un espace de Berkovich.** — Soit $f = (f_1, f_2) \in \mathrm{End}(\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}})$. Dans cette section, nous allons montrer que $f$ induit un endomorphisme du plan de Berkovich $\mathbf{A}^{2,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}}$.

Remarquons tout d'abord que l'on peut naturellement définir, à partir de $f$, un endomorphisme $\Phi(f)$ de l'anneau $\mathbf{C}[X,Y]$. Il est défini par

$$\Phi(f)\colon R(X,Y) \in \mathbf{C}[X,Y] \longmapsto R(f_1(X,Y), f_2(X,Y)) \in \mathbf{C}[X,Y].$$

Rappelons qu'un point du plan de Berkovich $\mathbf{A}^{2,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}}$ est, par définition, une semi-norme multiplicative

$$|\cdot|_x\colon \mathbf{C}[X,Y] \longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}.$$

En la précomposant par $\Phi(f)$, on obtient encore une semi-norme multiplicative sur $\mathbf{C}[X,Y]$, et donc un point de $\mathbf{A}^{2,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}}$. Notons

$$f^{\mathrm{an}}\colon |\cdot|_x \in \mathbf{A}^{2,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}} \longmapsto |\cdot|_x \circ \Phi(f) \in \mathbf{A}^{2,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}}$$

l'application ainsi définie. Il découle directement de la définition de la topologie que $f^{\mathrm{an}}$ est continue.

***Remarque 4.5.*** — Comme dans le cas d'une variable, on peut naturellement plonger le plan $\mathbf{C}^2$ dans le plan de Berkovich $\mathbf{A}^{2,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}}$. Précisément, à tout élément

$(a,b)$ de $\mathbf{C}^2$, on associe le point de $\mathbf{A}^{2,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}}$ défini par

$$|\cdot|_{(a,b)} \colon P \in \mathbf{C}[X,Y] \longmapsto |P(a,b)| \in \mathbf{R}_{\geq 0}.$$

On vérifie que le plongement est compatible à l'action de $f$ :

$$\forall (a,b) \in \mathbf{C}^2,\ f^{\mathrm{an}}(|\cdot|_{(a,b)}) = |\cdot|_{f(a,b)}.$$

Revenons au cas qui nous intéresse, celui où $f$ possède un point fixe en $(0,0)$.

***Lemme 4.6.*** — *Supposons que $f$ possède un point fixe en $(0,0)$. Alors, on a $f^{\mathrm{an}}(\mathring{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{C}}) \subset \mathring{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{C}}$.*

*Démonstration.* — Notons $f = (f_1, f_2)$. L'hypothèse se traduit par le fait que $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$.

Rappelons que

$$\mathring{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{C}} = \{x \in \mathbf{A}^{2,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}} : |X|_x < 1 \text{ et } |Y|_x < 1\}.$$

Soit $x \in \mathring{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{C}}$. Pour tout $c \in \mathbf{C}$ et $i,j \in \mathbf{N}$ avec $(i,j) \neq (0,0)$, on a alors

$$|cX^iY^j|_x = |c|_0 |X|_x^i |Y|_x^j < 1.$$

Par définition de $f^{\mathrm{an}}$, on a

$$|X|_{f^{\mathrm{an}}(x)} = |f_1(X,Y)|_x \text{ et } |Y|_{f^{\mathrm{an}}(x)} = |f_2(X,Y)|_x.$$

Puisque $f_1$ et $f_2$ n'ont pas de terme constant, on a

$$|f_1(X,Y)|_x < 1 \text{ et } |f_2(X,Y)|_x < 1,$$

d'où $f^{\mathrm{an}}(x) \in \mathring{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{C}}$. □

Nous avons déjà remarqué que le bidisque ouvert $\mathring{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{C}}$ contient un seul point de $\mathbf{C}^2$, à savoir $(0,0)$. On peut penser à l'action de $f^{\mathrm{an}}$ sur $\mathring{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{C}}$ comme une version infinitésimale de l'action de $f$ au voisinage de $(0,0)$. Nous allons montrer qu'elle contient beaucoup d'information.

Commençons par remarquer que la quantité $c(f)$ se réécrit aisément à l'aide de $f^{\mathrm{an}}$. Pour $x \in \mathbf{A}^{2,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}}$, posons

$$M(x) := \max(|X|_x, |Y|_x) \in \mathbf{R}_{\geq 0}.$$

Pour $r \in ]0,1[$, rappelons la définition du point $\zeta_r \in \mathring{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{C}}$ donné à la fin de la section 3.1 :

$$|\cdot|_{\zeta_r} \colon \sum_{i,j} a_{i,j} X^i Y^j \in \mathbf{C}[X,Y] \longmapsto \max_{i,j}(|a_{i,j}|\, r^{i+j}).$$

***Lemme 4.7.*** — *Soit $r \in ]0,1[$. Pour tout $f \in \mathrm{End}(\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}})$, on a*

$$c(f) = \frac{\log(M(f^{\mathrm{an}}(\zeta_r)))}{\log(r)}.$$

*Démonstration.* — Écrivons $f = (f_1, f_2)$. On a

$$|X|_{f^{\mathrm{an}}(\zeta_r)} = |f_1|_{\zeta_r} \text{ et } |Y|_{f^{\mathrm{an}}(\zeta_r)} = |f_2|_{\zeta_r}.$$

Puisque $r \in ]0,1[$, on a également

$$|f_1|_{\zeta_r} = r^{c(f_1)} \text{ et } |f_2|_{\zeta_r} = r^{c(f_2)}.$$

Le résultat s'ensuit. □

Supposons que $f(0,0) = (0,0)$.Pour tirer parti au mieux de la structure de $\mathring{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{C}}$, il est également intéressant de comprendre l'action de $f^{\mathrm{an}}$ sur $\mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}}$, pour $r \in ]0,1[$. On ne peut pas espérer que ce sous-espace soit directement stable par $f^{\mathrm{an}}$, mais on peut s'y ramener, par une petite modification.

Soit $r \in ]0,1[$. Soit $z \in \mathring{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{C}}$ tel que $f^{\mathrm{an}}(z) \neq (0,0)$. On a alors $M(f^{\mathrm{an}}(z)) \in ]0,1[$. Posons

$$c(f,z) := \frac{\log(M(f^{\mathrm{an}}(z)))}{\log(r)} \in \mathbf{R}_{>0}.$$

On a $M(f^{\mathrm{an}}(z)) = r^{c(f,z)}$ et, par conséquent, $\lambda_{1/c(f,z)}(f^{\mathrm{an}}(z)) \in \mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}}$. Posons

$$\varphi(z) := \lambda_{1/c(f,z)}(f^{\mathrm{an}}(z)) \in \mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}}.$$

***Lemme 4.8.*** — *Soit $f \in \mathrm{End}(\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}})$ tel que $f(0,0) = 0$. Soit $z \in \mathring{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{C}}$ tel que $f^{\mathrm{an}}(z) \neq (0,0)$. Alors, pour tout $e \in \mathbf{R}_{>0}$, on a*

$$c(f, \lambda_e z) = e\, c(f,z).$$

*Soit $g \in \mathrm{End}(\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}})$ tel que $g(0,0) = 0$ et supposons que $g^{\mathrm{an}}(f^{\mathrm{an}}(z)) \neq (0,0)$. Alors, on a*

$$c(g \circ f, z) = c(g, f(z)).$$

*Supposons que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $(f^{\mathrm{an}})^n(z) \neq (0,0)$. Alors, on a*

$$\forall n \in \mathbf{N},\ c(f^n, z) = \prod_{m=0}^{n-1} c(f, \varphi^m(z)).$$

**4.3. Algébricité du taux d'attraction asymptotique.** — Dans cette section, nous montrons que $c_\infty(f)$ est un nombre algébrique de degré inférieur à 2.

Soit $f \in \mathrm{End}(\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}})$ tel que $f(0,0) = (0,0)$. Nous supposerons, de plus, que

$$(f^{\mathrm{an}})^{-1}((0,0)) = (0,0).$$

Soit $r \in ]0,1[$. Avec les notations de la fin de la section 4.2, on peut définir $c(f,z) \in \mathbf{R}_{>0}$ pour tout $z \in \mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}}$ et on a donc une application

$$\varphi \colon z \in \mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}} \longmapsto \lambda_{1/c(f,z)}(f^{\mathrm{an}}(z)) \in \mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}}.$$

On vérifie qu'elle est continue.

L'élément-clé de la preuve consiste à montrer que $\varphi$ admet un point fixe. C'est un résultat qui vaut en réalité pour toute application continue d'un arbre compact dans lui-même.

Fixons quelques notations. Soit $A$ un arbre. Pour tout sous-arbre non vide $B$ de $A$, on note $j_B \colon B \to A$ l'inclusion de $B$ dans $A$ et $r_B \colon A \to B$ la rétraction de $A$ sur $B$. Pour toute application $\varphi \colon A \to A$, on pose $\varphi_B := r_B \circ \varphi \circ j_B$. Ces applications sont représentées à la figure 5.

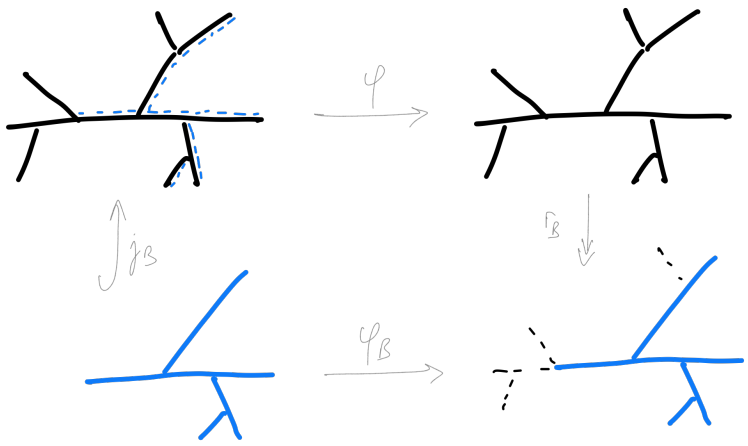


FIGURE 5. Application induite sur un sous-arbre

***Lemme 4.9.*** — *Toute fonction continue d'un arbre fini compact non vide dans lui-même possède un point fixe.*

*Démonstration.* — Démontrons le résultat par récurrence sur le nombre d'arêtes $n$ de l'arbre. Si $n = 0$, alors l'arbre est réduit à un point et le résultat est évident. Si $n = 1$, alors l'arbre est un segment et le résultat est bien connu.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et supposons avoir démontré le résultat pour tous les arbres compacts finis avec $n$ arêtes. Soit $A$ un arbre compact fini possédant $n + 1$ arêtes. Soit $\varphi\colon A \to A$ continue.

Soit $f$ une feuille de $A$ et $a = [f, s]$ l'unique arête de $A$ contenant $f$. Posons $A' := A \setminus ]s, f]$. C'est un sous-arbre de $A$ possédant $n$ arêtes.

Par hypothèse de récurrence, les applications continues $\varphi_{A'}$ et $\varphi_a$ possèdent des points fixes. Fixons un point fixe $z_{A'}$ de $\varphi_{A'}$ et un point fixe $z_a$ de $\varphi_a$.

• Supposons que $z_A \neq s$. Alors, $r_A^{-1}(z_A) = \{z_A\}$ et on en déduit que $z_A$ est point fixe de $\varphi$.

• Supposons que $z_a \neq s$. Alors, $r_a^{-1}(z_a) = \{z_a\}$ et on en déduit que $z_a$ est point fixe de $\varphi$.

• Supposons que $z_A = z_a = s$. Alors, on a $\varphi(s) \in r_A^{-1}(s) \cap r_a^{-1}(s) = \{s\}$, donc $s$ est point fixe de $\varphi$. □

***Lemme 4.10.*** — *Soient $A$ un arbre compact et $B$ un sous-arbre compact fini de $A$. Soit $\varphi\colon B \to A$ une application continue dont l'image contient $B$. Alors $\varphi$ possède un point fixe.*

*Démonstration.* — Supposons tout d'abord que l'arbre $A$ est fini. La démonstration est alors très similaire à celle du lemme 4.9. Elle s'effectue par récurrence sur le nombre d'arêtes $n$ de l'arbre $A$. Si $n = 0$, alors l'arbre est réduit à un point et le résultat est évident. Si $n = 1$, alors les arbres $B$ et $A$ s'identifient à des segments inclus l'un dans l'autre et le résultat découle du théorème des valeurs intermédiaires. L'étape de récurrence s'effectue exactement comme dans la preuve du lemme 4.9.

Revenons maintenant au cas d'un arbre $A$ compact quelconque. Notons $\mathcal{F}_B$ l'ensemble des sous-arbres compacts finis de $A$ qui contiennent $B$. Pour tout $C \in \mathcal{F}_B$, notons $F_C$ l'ensemble des points fixes de $r_C \circ \varphi$. C'est un ensemble fermé de $B$. Montrons que l'intersection $\bigcap_{C\in\mathcal{F}} F_C$ n'est pas vide.

Par compacité de $B$, il suffit de montrer que toutes les sous-intersections finies sont non vides. Soit $\mathcal{G}$ une partie finie de $\mathcal{F}_B$. Soit $D$ un sous-arbre compact fini de $A$ contenant tous les éléments de $\mathcal{G}$. Alors, l'intersection $\bigcap_{C\in\mathcal{G}} F_C$ contient $F_D$, et ce dernier n'est pas vide, d'après la première partie de la preuve.

Nous avons montré que l'intersection $\bigcap_{C\in\mathcal{F}} F_C$ n'est pas vide. On conclut en remarquant que tout point de cet ensemble est un point fixe de $\varphi$. □

***Lemme 4.11.*** — *Soit $A$ un arbre compact et soit $\varphi\colon A \to A$ une application continue. Supposons que $\varphi_B := r_B \circ \varphi \circ j_B$ possède deux point fixes $z$ et $z'$ distincts. Alors $\varphi$ possède un point fixe appartenant à $[z, z']$.*

*Démonstration.* — Par hypothèse, on a $r_B(\varphi(z)) = z$. En particulier, on a $[z, \varphi(z)] \cap B = \{z\}$. De même, on a $[z', \varphi(z')] \cap B = \{z'\}$.

On construit un chemin de $\varphi(z)$ à $\varphi(z')$ en concaténant $[\varphi(z), z]$, $[z, z']$ et $[z', \varphi(z')]$. Le raisonnement précédent et le fait que $z \neq z'$ assurent que ce chemin est injectif. Par unicité, ce n'est autre que $[\varphi(z), \varphi(z')]$.

Par continuité de $\varphi$, $\varphi([z, z'])$ est un sous-arbre compact de $A$ qui contient $\varphi(z)$ et $\varphi(z')$, donc $[\varphi(z), \varphi(z')]$ et $[z, z']$. On conclut en appliquant le lemme 4.10 à l'application $[z, z'] \to \varphi([z, z'])$ induite par $\varphi$. □

***Théorème 4.12.*** — *Toute fonction continue d'un arbre compact non vide dans lui-même possède un point fixe.*

*En outre, si aucun point interne n'est fixe, alors on peut trouver une feuille qui est un point fixe attractif.*

*Démonstration.* — Soit $A$ un arbre compact non vide. Soit $\varphi\colon A \to A$ une application continue.

Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-arbres compacts finis non vides de $A$. Soit $B \in \mathcal{F}$. D'après le lemme 4.9, $\varphi_B$ possède un point fixe. De plus, d'après le lemme 4.11, si $\varphi_B$ possède deux points fixes, alors $\varphi$ possède un point fixe, et le résultat est démontré. Nous pouvons donc supposer que $\varphi_B$ possède un unique point fixe. Notons-le $z_B$.

Soient $B, B' \in \mathcal{F}$ avec $B \subset B'$. Montrons que $r_B(z_{B'}) = z_B$. Supposons, tout d'abord, que $B'$ est obtenu à partir de $B$ en ajoutant une arête $a$. Notons $s$ l'unique point de $B$ appartenant à $a$. Pour tout $z \in B \setminus \{s\} = B' \setminus \{a\}$, on a $r_B^{-1}(z) = r_{B'}^{-1}(z) = \{z\}$. Par conséquent, un tel point est point fixe de $\varphi_B$ si, et seulement si, il est point fixe de $\varphi_{B'}$. On en déduit que, $z_B \neq s$ si, et seulement si, $z_{B'} \notin a$ et que, dans ce cas, $z_B = z_{B'} = r_B(z_{B'})$. Il reste à traiter le cas où $z_B = s$ et $z_{B'} \in a$. On a bien également $r_B(z_{B'}) = z_B$, comme attendu.

Le cas général, où $B'$ est obtenu à partir de $B$ en ajoutant un nombre quelconque d'arêtes, se déduit du cas où l'on en ajoute une seule par récurrence.

Montrons, à présent, que $\bigcap_{B\in\mathcal{F}} r_B^{-1}(z_B) \neq \emptyset$. Puisque $A$ est compact et que, pour tout $B \in \mathcal{F}$, $r_B^{-1}(z_B)$ est une partie fermée de $A$, il suffit de montrer que les sous-intersections finies ne sont pas vides.

Soit $\mathcal{G}$ une partie finie non vide de $\mathcal{F}$. Soit $C$ un arbre fini compact contenant tous les éléments de $\mathcal{G}$. D'après le raisonnement précédent, $\bigcap_{B\in\mathcal{G}} r_B^{-1}(z_B)$ contient $z_C$. En particulier, cette intersection n'est pas vide.

Nous avons montré que l'intersection $\bigcap_{B\in\mathcal{F}} r_B^{-1}(z_B)$ n'est pas vide. On vérifie qu'un point de cet ensemble est point fixe de $\varphi$, ce qui démontre la première partie du résultat.

Pour démontrer la seconde partie, supposons qu'aucun point interne de $A$ n'est fixe. Supposons, par l'absurde, qu'aucun point fixe n'est attractif. En enlevant un voisinage ouvert suffisamment petit de chacun de ses points, on obtient un sous-arbre non $A'$ vide de $A$ stable par $\varphi$. D'après la première partie du résultat, $A'$ contient un point fixe de $\varphi$, et on obtient une contradiction. □

***Remarque 4.13.*** — Nous avons été assez flou sur les propriétés topologiques d'arbre utilisées dans les preuves des lemmes 4.9, 4.10, 4.11 et du théorème 4.12. Hormis la compacité, nous n'avons besoin que du fait que les arêtes soient homéomorphes à des segments réels. Cela découle du lemme 2.16.

***Remarque 4.14.*** — D'après les propositions 2.18 et 2.19, en dimension 1, les disques de Berkovich fermés sont des arbres compacts. D'après le théorème 4.12, toute application continue d'un tel disque dans lui-même est compact. Ce résultat est à comparer au théorème du point fixe de Brouwer qui, dans une forme simple, assure que toute application continue d'un disque fermé dans lui-même admet un point fixe.

D'après le théorème 4.12, l'application $\varphi$ possède un point fixe $z_0$. Nous allons maintenant tirer des conséquences de l'existence de ce point fixe, en commençant par montrer que $c(f, z_0)$ est algébrique de degré au plus 2. L'argument met en jeu les valeurs possibles prises par la semi-norme associée à $z_0$.

Soit $z \in \mathring{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{C}}$. Il correspond à une semi-norme multiplicative

$$|\cdot|_z \colon \mathbf{C}[X,Y] \longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}.$$

On note $V_z$ l'image de cette application et $V_z^* := V_z \setminus \{0\}$.

***Lemme 4.15.*** — *Soit $z \in \mathbf{D}^{2,r}_{\mathbf{C}}$. Alors, il existe $s \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que*

$$r^{\mathbf{N}} \subset V_z^* \subset r^{\mathbf{Q}} s^{\mathbf{N}}.$$

*Démonstration.* — Quitte à échanger $X$ et $Y$, on peut supposer que $|X|_z = r$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|X^n|_z = r^n$, donc $r^{\mathbf{N}} \subset V_z^*$.

Si $V_z^* \subset r^{\mathbf{Q}}$, le résultat est démontré. Supposons donc que tel n'est pas le cas.

D'après la proposition 3.2, on peut identifier $z$ à un point de $\mathbf{D}^1_{\mathbf{C}(\!(X)\!)}(r)$ avec variable $Y$, où $\mathbf{C}(\!(X)\!)$ est muni de la valeur absolue $X$-adique normalisée par $|X| = r$. Notons $K$ le corps de Levi-Civita en la variable $Y$ (*cf.* section 2.4). Il est complet, algébriquement clos et on a $|K^*| = r^{\mathbf{Q}}$. D'après la proposition 2.15, il existe $z' \in \mathbf{D}^1_K(r)$ dont l'image dans $\mathbf{D}^1_{\mathbf{C}(\!(X)\!)}(r)$ est $z$. Par construction, $V_z^*$ est contenu dans l'image de $K[Y]$ par $|\cdot|_{z'}$.

Par hypothèse, il existe $R \in K[Y]$ tel que $|R|_{z'} \notin r^{\mathbf{Q}}$. Puisque $K$ est algébriquement clos, on peut écrire $R$ comme produit de facteurs de degré 1, et la propriété précédente vaut encore pour l'un de ces facteurs. Nous venons de montrer qu'il existe $\alpha \in K$ tel que $s := |Y - \alpha|_{z'} \notin r^{\mathbf{Q}}$.

Soit $P \in K[Y]$. On peut l'écrire sous la forme $\sum_{i \geq 0} a_i (Y - \alpha)^i$, avec $a_i \in K$ pour tout $i$. Puisque $s \notin |K^*| = r^{\mathbf{Q}}$, toutes les quantités

$$|a_i (Y - \alpha)^i|_{z'} = |a_i| s^i$$

sont différentes dès qu'elles ne sont pas nulles. Le cas d'égalité de l'inégalité ultramétrique s'applique donc, et l'on obtient

$$|P|_{z'} = \max_{i \geq 0} (|a_i| s^i) \in r^{\mathbf{Q}} s^{\mathbf{N}}.$$

Le résultat s'ensuit. □

***Proposition 4.16.*** — *Le nombre réel $c(f, z_0)$ est un nombre algébrique de degré inférieur à 2 : il existe $R \in \mathbf{Q}[X] \setminus \{0\}$ avec $\deg(R) \leq 2$ tel que $R(c(f, z_0)) = 0$.*

*Démonstration.* — Par définition de $f(z_0)$, on a $V^*_{f(z_0)} \subset V^*_{z_0}$. D'autre part, puisque $z_0$ est point fixe de $\varphi$, on a $|\cdot|_{f(z_0)} = |\cdot|_{z_0}^{c(f,z_0)}$.

D'après le lemme 4.15, il existe $s \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que

$$r^{\mathbf{N}} \subset V^*_{z_0} \subset r^{\mathbf{Q}} s^{\mathbf{N}}.$$

Soit $P \in \mathbf{C}[X, Y]$ tel que $|P|_{z_0} = r$. On a

$$r^{c(f,z_0)} = |P|_{z_0}^{c(f,z_0)} = |P|_{f(z_0)} \subset V^*_{z_0}.$$

Distinguons maintenant deux cas.

• Supposons que $V_{z_0}^* \subset r^{\mathbf{Q}}$.
On a alors $r^{c(f,z_0)} \in r^{\mathbf{Q}}$, d'où $c(f,z_0) \in \mathbf{Q}$.

• Supposons que $V_{z_0}^* \not\subset r^{\mathbf{Q}}$.
Alors, il existe $a_1, b_1 \in \mathbf{Q}$ tels que $r^{c(f,z_0)} = r^{a_1} s^{b_1}$.

D'autre part, il existe $Q \in \mathbf{C}[X,Y]$ et $q \in \mathbf{Q}$ et $n \in \mathbf{N}^*$ tels que $|Q|_{z_0} = r^q s^n$. Quitte à remplacer $Q$ par une puissance, on peut supposer que $q \in \mathbf{Z}$ et, quitte à multiplier par des puissances de $X$ ou $Y$, que $q = 0$. En répétant le raisonnement précédent, on montre qu'il existe $a_2, b_2 \in \mathbf{Q}$ tels que $s^{nc(f,z_0)} = r^{a_2} s^{b_2}$.

En passant au logarithme, on obtient le système

$$\begin{cases} c(f,z_0)\log(r) & = a_1 \log(r) + \frac{b_1}{n} n \log(s) \ ; \\ c(f,z_0)\, n \log(s) & = a_2 \log(r) + \frac{b_2}{n} n \log(s). \end{cases}$$

Par conséquent, $c(f,z_0)$ est valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & b_1/n \\ a_2 & b_2/n \end{pmatrix}$. Le résultat s'ensuit.

□

Pour conclure, il reste à relier $c(f,z_0)$ et $c(f)$.

***Théorème 4.17.*** — *Le nombre réel $c_\infty(f)$ est algébrique de degré inférieur à 2.*

*Démonstration.* — Soit $x$ un point de $\mathbf{D}_{\mathbf{C}}^{2,r}$ qui n'est pas une feuille. D'après le corollaire 3.4, il existe $u \in ]0,1[$ tel que

$$|\cdot|_z \leq |\cdot|_{\zeta_r} \leq |\cdot|_z^u,$$

en tant que fonctions sur $\mathbf{C}[X,Y]$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\frac{\log(M(f^n(z)))}{r} \leq \frac{\log(M(f^n(\zeta_r)))}{\log(r)} \leq \frac{u\,\log(M(f^n(z)))}{r},$$

d'où, d'après le lemme 4.7,

$$c(f^n,z) \leq c(f^n) \leq u\, c(f^n,z).$$

On en déduit que

$$c_\infty(f) = \lim_{n\to+\infty} c(f^n,z)^{1/n}.$$

Distinguons maintenant deux cas.

• Supposons qu'il existe un point fixe de $\varphi$ qui n'est pas une feuille de $\mathbf{D}_{\mathbf{C}}^{2,r}$.

Alors, on peut supposer que $z_0$ n'est pas une feuille de $\mathbf{D}_{\mathbf{C}}^{2,r}$. D'après le raisonnement précédent et le lemme 4.8, on a

$$c_\infty(f) = \lim_{n\to+\infty} c(f^n, z_0)^{1/n} = c(f, z_0).$$

On conclut alors par la proposition 4.16.

• Supposons que tous les point fixes de $\varphi$ sont des feuilles de $\mathbf{D}_{\mathbf{C}}^{2,r}$.

Alors, d'après le théorème 4.12, on peut supposer que $z_0$ est un point fixe attractif. Soit $z_1 \in \mathbf{D}_{\mathbf{C}}^{2,r}$ qui n'est pas une feuille et tel que tel que $\lim_{n\to+\infty} \varphi^n(z_1) = z_0$.

D'après le lemme 4.8,

$$\forall n \in \mathbf{N},\ c(f^n, z_1) = \prod_{m=0}^{n-1} c(f, \varphi^m(z_1)).$$

Par continuité, la suite $(c(f, \varphi^m(z_1)))_{m\in\mathbf{N}}$ tend vers $c(f, z_0)$, donc, par le lemme de Cesàro,

$$\lim_{n\to+\infty} c(f^n, z_1)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \Big( \prod_{m=0}^{n-1} c(f, \varphi^m(z_1))\Big)^{1/n} = c(f, z_0).$$

Or, d'après le raisonnement du début de la preuve, on a $\lim_{n\to+\infty} c(f^n, z_1)^{1/n} = c_\infty(f)$. On conclut alors par la proposition 4.16, comme précédemment.

□

***Remarque 4.18.*** — Ch. Favre et M. Jonsson montrent en réalité la propriété plus fine que $c_\infty(f)$ est un entier algébrique : il existe $R \in \mathbf{Z}[X] \setminus \{0\}$ *unitaire* avec $\deg(R) \leq 2$ tel que $R(c_\infty(f)) = 0$. Il faut, pour l'obtenir, raffiner un peu les techniques utilisées, mais la stratégie globale reste identique.

## Références


[Ber90] Vladimir G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[Bil97] Yuri Bilu. Limit distribution of small points on algebraic tori. *Duke Math. J.*, 89(3) :465–476, 1997.

[CL06] Antoine Chambert-Loir. Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich. *J. Reine Angew. Math.*, 595 :215–235, 2006.

[FJ07] Charles Favre and Mattias Jonsson. Eigenvaluations. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 40(2) :309–349, 2007.

[Jon15] Mattias Jonsson. Dynamics on Berkovich spaces in low dimensions. In *Berkovich spaces and applications. Based on a workshop, Santiago de Chile, Chile, January 2008 and a summer school, Paris, France, June 2010*, pages 205–366. Cham : Springer, 2015.

[Ost17] A. Ostrowski. Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(x)\cdot\varphi(y) = \varphi(xy)$. *Acta Math.*, 41 :271–284, 1917.

---

*13 avril 2023*

Jérôme Poineau, Laboratoire de mathématiques Nicolas Oresme, Université de Caen, BP 5186, F-14032 Caen Cedex • *E-mail :* `jerome.poineau@unicaen.fr`