Inégalités pour des sous variétés Lagrangiennes

Luc VRANCKEN

Nous traitons les sous-variétés lagrangiennes idéales dans les espaces complexes à courbure sectionnelle holomorphe constante. Pour une variété quelconque Bang-Yen Chen a introduit autour de 1990 une famille de fonctions de courbure, paramétrée par k nombres entiers. Le vaste impact et la multitude d'applications de ces delta-courbures est illustrée dans le livre récent de Chen.

Ces invariants contiennent entre autre la courbure scalaire mais aussi d'autres invariants qui peuvent être construit à partir des courbures sectionelles. Un exemple est l'invariant $\delta(2)$ définit par

$$\delta(2)(p) = \tau(p) - \inf_{\pi \subset T_pM} K(\pi).$$

où τ est la courbure scalaire normalisée (moyenne des courbures sectionelles)

Comme, montre le cas classique des surfaces dans $\mathbb{R}^3$, où nous avons

$$H^2 \leq K,$$

avec égalité si et seulement si la surface est un sphère, ces invariants peuvent être utiliser pour trouver des informations sur l'immersion (si on exige l'égalité) où des conditions d'obstruction pour l'existence d'une immersion.

Récemment en collaboration avec Chen, Dillen et Van der Veken, nous avons terminé la longue recherche d'inégalités ponctuelles optimales pour des sous-variétés idéales Lagrangiennes, portant chacune sur une delta-courbure à la courbure moyenne:

$$\delta(n_1, \ldots, n_k) \leq a(n,k,n_1,\ldots,n_k)\|H\|^2 + b(n,k,n_1,\ldots,n_k)c.$$

Ici les fonctions $a(n,k,n_1,\ldots,n_k$ et $b(n,k,n_1,\ldots,n_k)$ sont des expressions connus. Comme la courbure moyenne mesure la tension de la sous-variété dans l'espace ambiant, les inégalités montrent qu'il y a une famille de limites inférieures de cette tension en fonction de la géométrie intrinsèque de la sous-variété Lagrangienne. Un problème naturel, à partir d'un point de vue purement théorique aussi bien que pour les applications, est de chercher des sous variétés lagrangiennes qui minimisent cette tension partout, c'est.-à-dire Lagrangiennes qui réalisent l'égalité dans une telle inégalité en chacun de leurs points. Ces sous-variétés sont appelés idéales. Les résultats partiels indiquent que, contrairement à ce que l'on pouvait attendre, la classe des sous variétés lagrangiennes idéales est assez grande.