Structure à puissances divisées sur les algèbres pre-Lie

Laboratoire
Paul Painlevé

Andrea Cesaro

Université Lille 1

Plan de l'exposé

- Les algèbres pre-Lie
  - Définition
  - Exemple
- Structures à puissances divisées
  - exemples de structures à puissances divisées,
  - opérades, ΛP et ΓP-algèbres.
- Les algèbres pre-Lie à puissances divisées
  - les structures de $\Lambda \mathit{pre}\text{-}\mathit{Lie}$ et $\Gamma \mathit{pre}\text{-}\mathit{Lie}$ -algèbres,
  - exemple.

Les algèbre pre-Lie

Définition

Soit k un corps; une algèbre pre-Lie V est un k-espace vectoriel muni d'un produit bilinéaire $\{-,-\} : V \otimes V \to V$ tel que:

$$\{\{a,b\},c\} - \{a,\{b,c\}\} = \{\{a,c\},b\} - \{a,\{c,b\}\}$$

pour tous $a,b,c \in V$.

Soit $(V,\{-,-\})$ une algèbre pre-Lie et pour tous $a,b \in V$ soit:

$$[a,b] := \{a,b\} - \{b,a\}$$

donc $(V,[-,-])$ est une algèbre de Lie.
Si on part par une (d)g-pre-Lie on obtient une (d)g-Lie.

Exemples

" Tous les problèmes de déformation sont controlés par une dg-Lie algèbre. "
Pour une algèbre associative A la dg-Lie algèbre est donnée par $C^{\bullet}_{HH}(A, A)$ les cochaînes de Hochschild avec coefficients en A. Les crochets de Lie $[-,-]$ sont donnès par une structure de dg-pre-Lie sur $C^{\bullet}_{HH}(A, A)$ introduit par Gerstenhaber.

$$\{f, g\}(v_1, \ldots, v_{n+m-1}) := \sum_i \pm f(v_1, \ldots, g(v_i, \ldots, v_{i+m}), \ldots, v_{n+m-1})$$

pour tous $f \in C^n_{HH}(A, A), g \in C^m_{HH}(A, A)$.

La même situation se retrouve dans le complexe de Chevalley-Eilenberg pour les algèbres Lie, le complexe de Harrison pour les algèbres commutatives.

Soit $\{P(n)\}_n$ une opérade $L(P) := \bigoplus_n P(n)$ et $L(P)_{Sym} := \bigoplus_n P(n)_{\Sigma_n}$ sont algèbres pre-Lie.

Pour plus de détails : "Pre-Lie deformation theory" V. Dotsenko, S. Shadrin, B. Vallette.

Algèbres en caractéristique positive

Soit L une algèbre Lie on dit qu'elle est une une algèbre de Lie p-restreinte si L est équipée d'une opération supplémentaire $-^{[p]} : L \to L$ telle que, pour tous $x, y \in L$, $\lambda \in k$:

$$(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p (x)^{[p]},$$
$$(x+y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{s_i(x,y)}{i},$$
$$ad(x^{[p]}) = (ad(x))^{[p]}.$$

Ce type des algèbres apparaît naturellement, par exemple l'algèbre de Lie d'un groupe algèbrique defini sur un corps de caractéristique positive p.

Soit R une algèbre commutative, sans unité. Elle est dit à puissances divisées si elle est équipée d'une famille d'opérations $\gamma_i : R \to R$ pour $i \in \mathbb{N}$ telle que, pour tous $x, y \in R$, $\lambda \in k$:

$$\gamma_n(x+y) = \sum_{i=0}^{n} \gamma_{n-i}(x)\gamma_i(y),$$
$$\gamma_i(\lambda x) = \lambda^i \gamma_i(x),$$
$$\gamma_1(x) = x,$$
$$\gamma_m(x)\gamma_n(x) = \binom{m+n}{n}\gamma_{m+n}(x),$$
$$\gamma_m(\gamma_n(x)) = \frac{mn!}{(n!)^m m!}\gamma_{mn}(x).$$

Ce type des algèbres apparaît naturellement en caractéristique positive p, par exemple pour avoir une version acyclic du complex de formes de De Rham. Il est naturel de se demander si ces exemples peuvent être généralisés.

Opérades

Définition

Soit $\{M(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de k-espaces vectoriels munis pour tous les $n \in \mathbb{N}$ d'une action du groupe symétrique Σ_n sur $M(n)$. On appelle ce type de structure un Σ-module et on note Mod_k^{Σ} sa catégorie. Elle est munie de un produit tensoriel symétrique $M \boxtimes N(n) = \bigoplus_{i+j=n} Ind_{\Sigma_i\times\Sigma_j}^{\Sigma_n} M(i) \otimes N(j)$.

On définit deux structures monoidales de composition sur Mod_k^{Σ}:

- $M\square_{\Sigma} N = \bigoplus_r M(r) \otimes_{\Sigma_r} N^{\boxtimes r}$,
- $M\square^{\Sigma} N = \bigoplus_r M(r) \otimes^{\Sigma_r} N^{\boxtimes r}$.

Définition

Une opérade est un monoïde dans la catégorie $(Mod_k^{\Sigma}, \square_{\Sigma}, id)$; sa catégorie est notée $Op(Mod_k)$.

Théorème (B.Fresse)

Si on se restreint à des Σ-module connexes (i.e. tel que $M(0) = N(0) = 0$) alors $M\square_{\Sigma}N \cong M\square^{\Sigma}N$.

Corollary

Si on se restreint à des Σ-module connexes, la catégorie des monoïdes en $(Mod_k^{\Sigma}, \square_{\Sigma}, id)$ correspont à la catégorie des monoïdes en $(Mod_k^{\Sigma}, \square^{\Sigma}, id)$.

Définition

On appelle les foncteurs $S : Mod_k^{\Sigma} \longrightarrow End(Mod_k)$, $S : M \mapsto (S(M) : V \mapsto S(M,V))$*:*

$$S(M)(V) = S(M,V) = \bigoplus_r M(r) \otimes_{\Sigma_r} V^{\otimes r},$$

et $\Gamma : Mod_k^{\Sigma} \longrightarrow End(Mod_k)$, $\Gamma : M \mapsto (\Gamma(M) : V \mapsto \Gamma(M,V))$*:*

$$\Gamma(M)(V) = \Gamma(M,V) = \bigoplus_r M(r) \otimes^{\Sigma_r} V^{\otimes r},$$

Schur et coSchur.

Le foncteur $S(-,-) : (Mod_k^{\Sigma}, \Box_{\Sigma}, id) \longrightarrow (End(Mod_k), \circ, id)$ est monoidale.

Si P est une opérade alors $S(P,-)$ est une monade.

Le foncteur $\Gamma(-,-) : (Mod_k^{\Sigma}, \Box^{\Sigma}, id) \longrightarrow (End(Mod_k), \circ, id)$ est monoidale.

Si P est une opérade, connexe, alors $\Gamma(P,-)$ est une monade.

Algèbres

Définition

Soit P une opérade ; on appelle P-algèbres les algèbres définies par la monade $S(P,-)$. On appelle ΓP-algèbres les algèbres définies par la monade $\Gamma(P,-)$.

Définition

La trace $tr : [x] \mapsto \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \sigma^* x$ definit un morphisme de monade.

Proposition

La trace a une factorisation epi-mono $S(P,V) \longrightarrow \Lambda(P,V) \longrightarrow \Gamma(P,V)$ tel que $\Lambda(P,-)$ est une monade.

Tous les ΓP-algèbres sont ΛP-algèbres et tous les ΛP-algèbres sont P-algèbres.

Remarque

En caractéristique zero la trace donne un isomorphisme de catégorie entre ΓP-algèbres, ΛP-algèbres et P-algèbres.

Soit k corps de caractéristique positive p.

- Soit $Com(n) = k$, les Com-algèbres sont les algèbres associatives, commutatives et les ΓCom-algèbres sont les algèbres à puissances divisées.
  Les ΛCom-algèbres sont les algèbres commutatives C telles que $x^p = 0$ pour tous les $x \in C$.
- Soit $Lie(n)$ l'opérade tel que les Lie-algèbres sont les algèbres Lie donc les ΓLie-algèbres sont les algèbres Lie p-restreintes.
  Les ΛLie-algèbres sont les algèbres de Lie dans le sens usuel.

Les algèbre pre-Lie à puissances divisées

Notre but est d'avoir une présentation des algèbres pre-Lie à puissances divisées comme nous l'avons dans le cas des algèbres commutative et de Lie.

Cette théorie nous donne une définition générale pour les algèbres à puissances divisées mais elle n'est pas constructive.

Nous décrivons ci-après une présentation pour Λ*pre-Lie* et Γ*pre-Lie*-algèbre.

Définition

On appelle p-pre-Lie-algèbres ou algèbres pre-Lie p-restreintes, les algèbres pre-Lie telles que:

$$\{\ldots\{\{y,\underbrace{x\},x\}\ldots x}_{p}\}=\{y,\{\ldots\{\underbrace{x,x\}\ldots x}_{p}\}.$$

Théorème (I. Dokas)

Les Γ pre-Lie-algèbres sont des p-pre-Lie-algèbres.

Théorème (C.)

La categorie des p-pre-Lie-algèbres coïncident avec la categorie des Λpre-Lie-algèbres.

Proposition

Soit P une opérade donc $\Gamma(P,-)$ est un analyseur de Lazard.

"Un analyseur de Lazard est une monade qui peut être décrite par une famille des fonctions $\{f_{r_1,\ldots,r_n}\}_{r_1,\ldots,r_n\in\mathbb{N}}$ polynomiales de degré $(r_1,\ldots,r_n)$."

$$f_{r_1,\ldots,\underbrace{0}_{i},\ldots,r_n}(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n) = f_{r_1,\ldots,\underbrace{\widehat{0}}_{i},\ldots,r_n}(v_1,\ldots,\widehat{v_i},\ldots,v_n), \tag{1}$$

$$f_{r_1,\ldots,r_i\ldots,r_n}(v_1,\ldots,\lambda v_i,\ldots,v_n) = \lambda^{r_i}(f_{r_1,\ldots,r_i\ldots,r_n}(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)), \tag{2}$$

Si $(i,j)^* f = f$

$$
\begin{aligned}
&f_{r_1,\ldots,r_i,\ldots,r_j,r_n}(v_1,\ldots,\underbrace{a}_{i},\ldots,\underbrace{a}_{j},\ldots,v_n) = \\
&\binom{r_i + r_j}{r_i}\tilde{f}_{r_1,\ldots,r_i+r_j,\ldots,r_n}(v_1,\ldots,\underbrace{a}_{i},\ldots,v_n),
\end{aligned} \tag{3}
$$

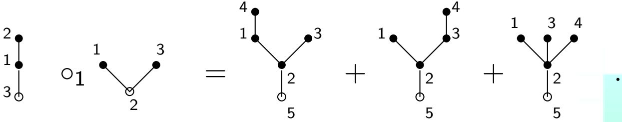
$$
\begin{aligned}
&f_{r_1,\ldots,r_i\ldots,r_n}(v_1,\ldots,\underbrace{a+b}_{i},\ldots,\ldots,v_n) = \\
&\sum_{s=0}^{r_i}\tilde{f}_{r_1,\ldots,\underbrace{s}_{i},r_i-s,\ldots,r_n}(v_1,\ldots,a,b,\ldots,v_n),
\end{aligned} \tag{4}
$$

$$
l_1(v) = v. \tag{5}
$$

Définition

Soit $\{RT(n)\}$ le Σ-module tel que $RT(n)$ est l'espace vectoriel engendré par les arbres avec une racine et n sommets étiquetés par les nombres $(1, \ldots, n)$, et l'action de Σ_n définie par permutation des étiquetages. Ce Σ-module forme une opérade:

$$\tau \circ_i \upsilon := \sum_{f : Out(\tau, i) \longrightarrow \{1, \ldots, n\}} \tau \circ_i^f \upsilon,$$



Théorème (F. Chapoton, M. Livernet)

Les operades pre-Lie et RT sont isomorphes.

Proposition

Soit P une opérade équipée d'une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{B}$ est clos par l'action de Σ_n. Soit V un espace vectoriel avec une base fixée $\mathcal{V}$ alors, il existe un isomorphisme $\mathcal{O} : S(P, V) \longrightarrow \Gamma(P, V)$ des espaces vectoriels gradués.

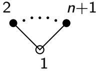
On a une formule explicite pour calculer le morphisme composition $\tilde{\mu} : \Gamma(\textit{pre-Lie}, \Gamma(\textit{pre-Lie}, V)) \longrightarrow \Gamma(\textit{pre-Lie}, V)$:

$$\tilde{\mu}(\mathcal{O}\, \upsilon(\mathcal{O}\, \mathtt{t}_1, \ldots, \mathcal{O}\, \mathtt{t}_n)) = \sum \frac{\chi(\mathtt{t})|\,\mathrm{Stab}(\mathtt{t})|}{|\,\mathrm{Stab}(\upsilon(\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_n))|\prod_i |\,\mathrm{Stab}(\mathtt{t}_i)|}\, \mathcal{O}\, \mathtt{t}$$

où $\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_n$ sont des éléments de la base de $S(\textit{pre-Lie}, V)$ et $\upsilon(\mathcal{O}\, \mathtt{t}_1, \ldots, \mathcal{O}\, \mathtt{t}_n)$ est un élément de la base de $S(\textit{pre-Lie}, \Gamma(\textit{pre-Lie}, V))$.

Définition

Soient F_n les arbres de la forme:



.

Théorème

Soit V un espace vectoriel avec une base fixée $\mathcal{V}$, x un élément de $\mathcal{V}$, et $\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_r$ des éléments de $\{\tau \otimes e_1 \otimes \ldots \otimes e_n | \, \tau$ est un n-arbre et $e_1, \ldots, e_n \in B\}$, la base canonique de $RT(n) \otimes V^{\otimes n}$. Alors

$$\tilde{\mu}(\mathcal{O}\, F_r(x, \mathcal{O}\,\mathtt{t}_1, \ldots, \mathcal{O}\,\mathtt{t}_r)) = \mathcal{O}(\mu(F_r[x, \mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_r])).$$

Théorème (C.)

Une Γ pre-Lie-algèbre est un espace vectoriel avec une famille de fonctions polynomiales $\{-;\underbrace{-,\dots,-}_{n}\}_{r_1,\dots,r_n}$ *de degré* $(1, r_1, \dots, r_n)$ *telles que les relations (1),(2),(3),(4), et (5) sont satisfaites et:*

$$\sigma^*\{x; y_1, \dots, y_n\}_{r^1,\dots,r^n} := \{x; y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n)}\}_{r^{\sigma(1)},\dots,r^{\sigma(n)}} =$$

$$\{x; y_1, \dots, y_n\}_{r^1,\dots,r^n}.$$

$$\{\{x; z_1, \ldots, z_n\}_{r^1,\ldots,r^m}; y_1, \ldots, y_n\}_{s^1,\ldots,s^n} =$$

$$\sum_{\substack{s^i=\beta^i+\sum\alpha^i_{\cdot,\cdot} \\ r^j=\sum\gamma^{j,\cdot}}} \frac{1}{\prod r^{\cdot}!} \{x; \{z_1; y_1, \ldots, y_n\}_{\alpha^1_{1,1}\ldots,\alpha^n_{1,1}},$$

$$\ldots, \{z_1; y_1, \ldots, y_n\}_{\alpha^1_{1,r^1},\ldots,\alpha^n_{1,r^1}},$$

$$\ldots, \{z_m; y_1, \ldots, y_n\}_{\alpha^1_{n,1},\ldots,\alpha^n_{n,1}}, \ldots, \{z_m; y_1, \ldots, y_n\}_{\alpha^1_{n,r^n},\ldots,\alpha^n_{n,r^m}},$$

$$y_1, \ldots, y_n\}_{1,\ldots 1,\beta^1,\ldots,\beta^n}.$$

Exemple

Proposition

Toutes les algèbres Brace sont des Γpre-Lie-algèbres.
Soit $(V, (\langle -; \underbrace{-, \dots, -}_{n} \rangle)_{n \geqslant 0})$ *une Brace-algèbre:*

$$\{x; y_1, \dots, y_n\}_{r_1, \dots, r_n} = \sum_{\sigma \in Sh(r_1, \dots, r_n)} \sigma^* \langle x; \underbrace{y_1, \dots, y_1}_{r_1}, \dots, \underbrace{y_n, \dots, y_n}_{r_n} \rangle.$$

Corollary

Soit P une opérade. L'espace vectoriel $L(P) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} P(n)$ est une Γpre-Lie-algèbre.