Les nombres premiers et la fonction ζ, l'approche analytique

Florian Daval

doctorant au laboratoire Painlevé

le 10 septembre 2015

Sommes indexées par les nombres premiers.

$$\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln p$$

On considère tout les nombres premiers p inférieur ou égal à x,
par exemple pour $x = 7\sqrt{3} = 12,124...$
$[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]$
et on fait la somme des $\ln p$
$\ln(2) + \ln(3) + \ln(5) + \ln(7) + \ln(11) = 7,7450...$

$$\psi(x) = \sum_{p^k \leqslant x} \ln p = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \Lambda(n)$$

Le même type de calcul que pour θ mais en considérant toutes les puissances (entières) de nombres premiers.

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1$$

Cette fonction compte combien il y a de nombres premiers entre 1 et x.

Un exemple de résultat sur une telle somme :

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \ln\Big(\ln(x) \Big) + \beta + R(x)$$

avec $|R(x)| \leqslant \dfrac{5}{\ln(x)}$

et $\beta = 0,261\ldots$ une constante.

Fonction zêta de Riemann :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

où les puissances complexes se calculent par

$$n^{s} = \exp\left(\ln n \times s\right)$$

$$n^{a+ib} = n^{a}\cos(b\ln n) + i\, n^{a}\sin(b\ln n)$$

$$\left|n^{-s}\right| = n^{-\Re(s)}$$

Formule d'Euler :

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + p^{-4s} + \ldots \text{(série géométrique)}$$

$$\begin{aligned} & (1 + 2^{-s} + 2^{-2s} + 2^{-3s} + 2^{-4s} + 2^{-5s} + 2^{-6s} + \ldots \\ \times & (1 + 3^{-s} + 3^{-2s} + 3^{-3s} + 3^{-4s} + 3^{-5s} + 3^{-6s} + \ldots \\ = & \; 1 + (2\times 3)^{-s} + (2^2\times 3)^{-s} + (2\times 3^2)^{-s} + (2^2\times 3^2)^{-s} + \ldots \end{aligned}$$

On arrive à :

$$\begin{aligned} &\prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-p^{-s}} \\ = &\prod_{p \text{ premier}} \left(1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + p^{-4s} + \dots\right) \\ = &\sum_{n \text{ entier}} n^{-s} \end{aligned}$$

Prolongement analytique à $\Re(s) > 0$.

$$n^{-s} = s \int_n^{\infty} y^{-(s+1)}\,\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \\
=&\sum_{n=1}^{\infty} s \int_n^{\infty} y^{-(s+1)}\,\mathrm{d}y \\
=&s \int_1^{\infty} \lfloor y \rfloor y^{-(s+1)}\,\mathrm{d}y \\
=&\frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \{y\} y^{-(s+1)}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

$$S(x) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} a_n$$

Obtenir des renseignements sur la somme S à partir du comportement analytique de la fonction de la variable complexe f.

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \ln(p) \sum_{k=1}^{\infty} p^{-ks} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

On introduit

$$\psi(t) = \sum_{p^k \leqslant t} \ln p = \sum_{1 \leqslant n \leqslant t} \Lambda(n)$$

et

$$\psi_1(x) = \int_0^x \psi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \Lambda(n)(x-n).$$

$y > 0$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma=2}\frac{y^{s+1}}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s = \begin{cases} 0 & \text{si } \; y \leqslant 1, \\ y-1 & \text{si } \; y > 1. \end{cases}$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma=2} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s \;\cdot$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma=2} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}} \;?$$

Pour tout $\sigma > 1$,

$$\int_0^x (\psi(y) - \lfloor y \rfloor)\,\mathrm{d}y = \frac{x^{\sigma+1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\sigma + it)x^{it}}{(\sigma + it)(\sigma+1 + it)}\,\mathrm{d}t$$

Par convergence dominée :

$$\int_0^x (\psi(y) - \lfloor y \rfloor)\,\mathrm{d}y = \frac{x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(1 + it)x^{it}}{(1 + it)(2 + it)}\,\mathrm{d}t$$

Et maintenant

$$J(x) = \frac{x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(1 + it)x^{it}}{(1 + it)(2 + it)}\,\mathrm{d}t$$

c'est la transformée de Fourier au point $X = -\ln(x)$ d'une fonction intégrable donc par le lemme de Riemann-Lebesgue $J(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$

Résultat analytique sur la fonction F important dans la preuve :

$$F(\sigma + it) \leqslant \frac{C}{(\ln(2 + |t|)^9}$$

Il montre que la fonction est intégrable (hypothèse dans Riemann-Lebesgue) et permet l'utilisation du théorème de convergence dominée.
Il provient d'estimation sur le module de la fonction ζ et de ses fonctions dérivées $\zeta^{(k)}$ dans certaines régions du plan complexe, par exemple

$$\zeta(\sigma + it) \geqslant C_1(\ln(|t|)^{-7} \qquad (|t| \geqslant 2, \sigma \geqslant 1 - \frac{C_2}{(\ln|t|)^9})$$

On a aussi utilisé que $F(1 + it)$ ne s'annule pas.

Ces résultats d'analyse nous donnent l'information sur un aspect des nombres premiers, ici cela donne un équivalent de la proportion de nombre premier dans l'intervalle $[1, N]$.

Le terme d'erreur.
Posons Θ la borne supérieure des parties réelles des zéros de la fonction ζ, alors le terme d'erreur $E(x) = \psi(x) - x$ est dominé par $x^{\Theta}(\ln(x))^2$:

$$|E(x)| = |\psi(x) - x| \leqslant A\, x^{\Theta}(\ln(x))^2$$

Donc l'erreur est contrôlée par la disposition des zéros de ζ.

L'hypothèse de Riemann affirme que les zéros du demi-plan $\Re(s) \geqslant 0$ sont tous situés sur la droite partie réelle de s égale $\frac{1}{2}$, autrement dit que $\Theta = \frac{1}{2}$ (les zéros de l'autre demi-plan sont entièrement connus).

Fonction de Möbius.

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si} \quad n = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}, \\ 0 & \text{s'il existe } p_i, \text{tel que } p_i^2 | n. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta(s)} &= \prod_p (1 - p^{-s}) \\ &= 1 - \sum_p p^{-s} + \sum_{p<q} (pq)^{-s} - \sum_{p<q<r} (pqr)^{-s} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \end{aligned}$$

$$M(x) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \mu(n)$$

L'hypothèse de Riemann est équivalente à ce que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait :

$$|M(x)| \leqslant x^{1/2+\varepsilon}$$

à partir d'un certain rang (dépendant de ε).
Le théorème des nombres premiers (prouvé en 1896) est lui équivalent au fait que

$$\frac{M(x)}{x} \to 0$$

quand $x \to \infty$. Ou de manière équivalente, au fait que la série (semi-convergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}$$

ait une limite et qu'elle soit nulle.

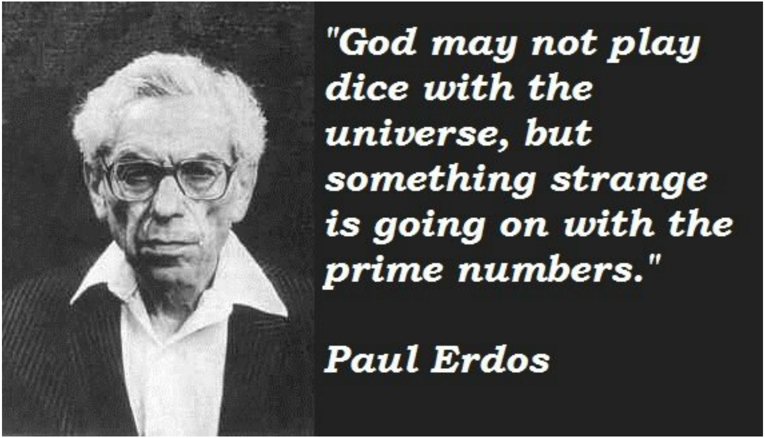
Convertir des informations entre

$$M(x) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \mu(n)$$

et

$$m(x) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n},$$

est une des parties de mon travail de thèse.


"God may not play dice with the universe, but something strange is going on with the prime numbers."
Paul Erdos