Champs aléatoires stables à accroissements stationnaires : comportement trajectoriel

Geoffrey Boutard

Laboratoire Paul Painlevé - Université Lille 1 - Sciences et Technologies

10 septembre 2015

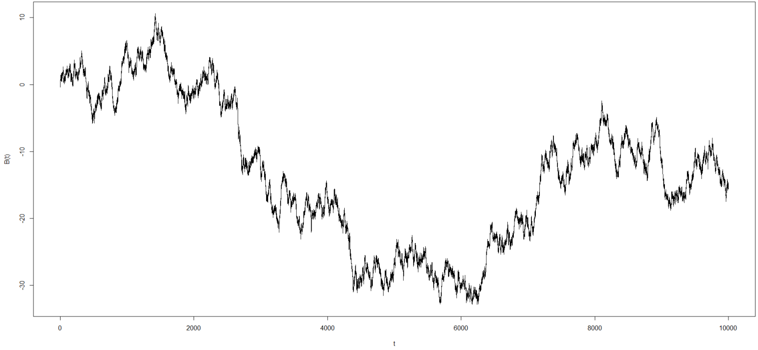


Figure: Simulation du MB

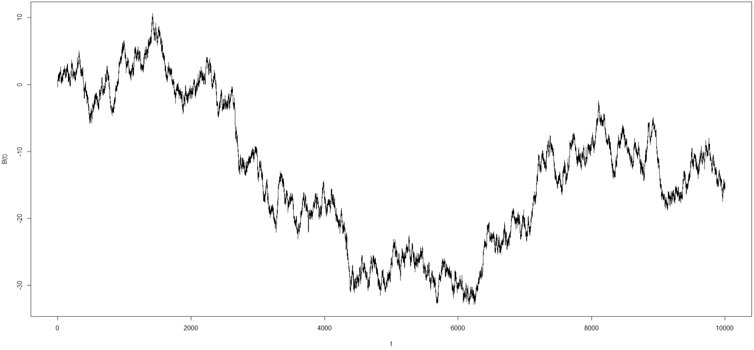


Figure: Simulation du MB

Fonction höldérienne

Soit I un pavé compact de $\mathbb{R}^d$, f une fonction à valeurs réelles définies sur I et $\gamma \in (0,1]$. On dit que f est γ-**höldérienne** s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall t, s \in I, \quad |f(t) - f(s)| \leq c\,|t-s|^{\gamma}. \tag{1}$$

Premier exemple : le Mouvement Brownien (MB)

- Le MB standard sur $[0, +\infty)$ est un processus stochastique $B = \{B(t) : t \in [0, +\infty)\}$ vérifiant
  1. B(0)=0,
  2. **Loi gaussienne** : Pour tout $t \in [0, +\infty)$, la variable aléatoire $B(t)$ est gaussienne, d'espérance 0 et de variance t,
  3. **Accroissements stationnaires** : Pour tout $0 \leq s \leq t < +\infty$, l'accroissement $B(t) - B(s)$ a la même loi que $B(t - s)$,
  4. **Accroissements indépendants** : Pour tout $0 \leq s \leq t < +\infty$, l'accroissement $B(t) - B(s)$ est indépendant du processus $\{B(u) : u \in [0, s]\}$,
  5. **Continuité trajectorielle** : Il existe un événement Ω_1 de probabilité 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega_1$, la trajectoire $t \mapsto B(t, \omega)$ est continue.

Régularité des trajectoires du MB

Théorème de Kolmogorov-Centsov

On fixe $T > 0$. Soit $X = \{X(t) : t \in [0, T]\}$ un processus gaussien continu centré. On suppose qu'il existe $\beta > 0$ et $C < +\infty$ tels que pour tout $t, s \in [0, T]$,

$$\mathbb{E}[|X(t) - X(s)|^2] \leq C\,|t - s|^{2\beta}\ . \tag{2}$$

Alors, pour tout $\gamma < \beta$ les trajectoires de X sont presque sûrement γ-höldériennes.

Régularité des trajectoires du MB

Théorème de Kolmogorov-Centsov

On fixe $T > 0$. Soit $X = \{X(t) : t \in [0, T]\}$ un processus gaussien continu centré. On suppose qu'il existe $\beta > 0$ et $C < +\infty$ tels que pour tout $t, s \in [0, T]$,

$$\mathbb{E}[|X(t) - X(s)|^2] \leq C\, |t - s|^{2\beta}\ . \tag{2}$$

Alors, pour tout $\gamma < \beta$ les trajectoires de X sont presque sûrement γ-höldériennes.

Application : les trajectoires de B sont presque sûrement γ-höldériennes pour tout $\gamma < 1/2$.

Remarque : on peut montrer que, presque sûrement, les trajectoires du MB ne sont pas γ-höldériennes pour tout $\gamma \geq 1/2$.

Construction du MB à partir des fonctions de Schauder

Il est possible de construire le MB sur [0,1] de la manière suivante : pour tout $t \in [0,1], \omega \in \Omega$, on pose

$$B(t,\omega) := \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \Phi_{j,k}(t)\varepsilon_{j,k}(\omega), \tag{3}$$

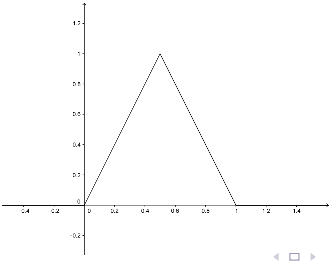
Construction du MB à partir des fonctions de Schauder

Il est possible de construire le MB sur [0,1] de la manière suivante : pour tout $t \in [0,1], \omega \in \Omega$, on pose

$$B(t,\omega) := \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \Phi_{j,k}(t)\varepsilon_{j,k}(\omega), \tag{3}$$

où

1. $(\varepsilon_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est une suite de v.a. gaussiennes centrées réduites i.i.d.
2. Pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, la fonction $\Phi_{j,k}(t)$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $\Phi_{j,k}(t) = 2^{-(j+1)/2}\Phi(2^j t - k)$, et Φ est la fonction triangulaire



Intérêt de cette décomposition

Cette décomposition permet d'obtenir le résultat suivant plus précis dans le cas où $\gamma = 1/2$.

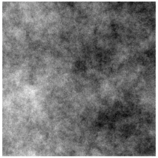
Soit $T > 0$. Il existe un événement Ω_2 de probabilité 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega_2$, on ait, pour tout $s, t \in [0, T]$,

$$|B(t,\omega) - B(s,\omega)| \leq C(\omega)\,|t-s|^{1/2}\left(\log\left(|t-s|^{-1}\right)\right)^{1/2}, \tag{4}$$

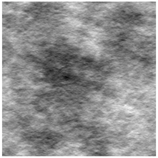
où la constant $C(\omega)$ ne dépend pas de t et s.

Un exemple en médecine

- But : Modéliser une image 2D par un champs aléatoire $X = \{X(t_1, t_2) : (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2\}$?



$H = 0.2$



$H_0 = 0.3$; $H_1 = 0.2$

- Applications : résistance de matériaux, détection de l'ostéoporose,...

Le Champs Brownien Fractionnaire (CBF)

- Le CBF sur $\mathbb{R}^d$ de paramètre de Hurst $H \in (0,1)$ peut-être défini de la manière suivante

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad B_H(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{it\cdot\xi} - 1}{|\xi|^{H+d/2}} \, \mathrm{d}\widehat{W}(\xi). \tag{5}$$

Le Champs Brownien Fractionnaire (CBF)

- Le CBF sur $\mathbb{R}^d$ de paramètre de Hurst $H \in (0,1)$ peut-être défini de la manière suivante

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad B_H(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{it\cdot\xi} - 1}{|\xi|^{H+d/2}} \,\mathrm{d}\widehat{W}(\xi). \tag{5}$$

- Pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R}^d)$, la variable aléatoire $\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\,\mathrm{d}\widehat{W}(\xi)$ est une var gaussienne centrée et de variance

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\,\mathrm{d}\widehat{W}(\xi)\right)^2\right] = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)^2\,\mathrm{d}\xi. \tag{6}$$

Vers le modèle général

- C'est un champs **gaussien** à accroissements stationnaires.

Peut-on se passer du caractère gaussien du champs ?

Vers le modèle général

- C'est un champs **gaussien** à accroissements stationnaires.

Peut-on se passer du caractère gaussien du champs ?

- Presque sûrement, les trajectoires du CBF sont γ-höldériennes pour tout $\gamma < H$.
  $\longrightarrow$ L'événement de probabilité 1 sur lequel ces propriétés sont vrais **dépend de** H.

Peut-on se passer de la dépendance en H dans l'événement de probabilité 1 ?

Vers le modèle général

- C'est un champs **gaussien** à accroissements stationnaires.

Peut-on se passer du caractère gaussien du champs ?

- Presque sûrement, les trajectoires du CBF sont γ-höldériennes pour tout $\gamma < H$.
  $\longrightarrow$ L'événement de probabilité 1 sur lequel ces propriétés sont vrais **dépend de** H.

Peut-on se passer de la dépendance en H dans l'événement de probabilité 1 ?

- Le CBF est **isotrope** : pour n'importe quelle rotation R de $\mathbb{R}^d$, les champs $\{B_H(R(t)) : t \in \mathbb{R}^d\}$ et $\{B_H(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ ont la même loi.
  $\longrightarrow$ La régularité du CBF dans toutes les directions est la même.

Peut-on se passer de l'isotropie du champs ?

Rappels sur les lois stables...

- Soit $\alpha \in (0,2]$. Une variable aléatoire réelle X est dite symétrique α-stable (SαS) de paramètre $\sigma > 0$, si sa fonction caractéristique vérifie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}[e^{i\theta X}] = e^{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha}. \tag{7}$$
Remarque : Lorsque $\alpha = 2$, on retrouve une v.a. gaussienne.
- Dans le cas $\alpha \in (0,2)$, la queue d'une va SαS X est lourde. En particulier,
$$\begin{cases} \mathbb{E}[|X|^\gamma] < +\infty & \text{si } \gamma < \alpha, \\ \mathbb{E}[|X|^\gamma] = +\infty & \text{si } \gamma \geq \alpha, \end{cases} \tag{8}$$

… et l'intégrale stable

On définit l'intégrale stochastique, notée $\int_{\mathbb{R}^d} (\,\cdot\,)\,\mathrm{d}\widetilde{M}_\alpha$, de la manière suivante.

Si $g \in L^\alpha(\mathbb{R}^d)$, alors la partie réelle $\mathcal{R}e\{\int_{\mathbb{R}^d} g(\xi)\,\mathrm{d}\widetilde{M}_\alpha(\xi)\}$ est une var SαS de paramètre $\sigma\Big(\mathcal{R}e\{\int_{\mathbb{R}^d} g(\xi)\,\mathrm{d}\widetilde{M}_\alpha(\xi)\}\Big)$ vérifiant,

$$\sigma\Big(\mathcal{R}e\Big\{\int_{\mathbb{R}^d} g(\xi)\,\mathrm{d}\widetilde{M}_\alpha(\xi)\Big\}\Big)^\alpha = \int_{\mathbb{R}^d} \big|g(\xi)\big|^\alpha\, d\xi. \quad (\text{"Propriété d'isométrie"})$$

Le modèle stable

Champs Brownien Fractionnaire	Modèle étudié
$B_H(t) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{it\cdot\xi} - 1) \frac{1}{\lvert\xi\rvert^{H+d/2}} \, \mathrm{d}\widehat{W}(\xi)$	$X(t) = \mathcal{R}e \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} (e^{it\cdot\xi} - 1) f(\xi) \, \mathrm{d}\widetilde{M}_\alpha(\xi) \right\}$
$\mathrm{d}\widehat{W}(\xi)$	$\mathrm{d}\widetilde{M}_\alpha(\xi)$
$\frac{1}{\lvert\xi\rvert^{H+d/2}}$	$f(\xi)$ (densité spectrale)
Avoir des résultats trajectoriels p.s. qui ne dépendent pas de H	Avoir des résultats trajectoriels p.s. qui ne dépendent pas de f

La densité spectrale f est dite *admissible* si elle vérifie les trois conditions suivantes :

$(\mathcal{H}_1)$ f possède des dérivées partielles d'ordre $p \in \{0, 1, 2\}^d$ continues sur $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^d$

La densité spectrale f est dite *admissible* si elle vérifie les trois conditions suivantes :

($\mathcal{H}_1$) f possède des dérivées partielles d'ordre $p \in \{0,1,2\}^d$ continues sur $\left(\mathbb{R} \setminus \{0\}\right)^d$

($\mathcal{H}_2$) Il existe $A > 0$, $c > 0$ et $a_1, \ldots, a_d \in (0, +\infty)^d$ tels que, pour tout $p \in \{0,1,2\}^d$, et $\|\xi\| \geq A$

$$\left|\partial^p f(\xi)\right| \leq c \prod_{l=1}^{d} (1 + |\xi_l|)^{-a_l - 1/\alpha - p_l}. \tag{9}$$

La densité spectrale f est dite *admissible* si elle vérifie les trois conditions suivantes :

($\mathcal{H}_1$) f possède des dérivées partielles d'ordre $p \in \left\{0,1,2\right\}^d$ continues sur $\left(\mathbb{R} \setminus \{0\}\right)^d$

($\mathcal{H}_2$) Il existe $A > 0$, $c > 0$ et $a_1, \dots, a_d \in (0,+\infty)^d$ tels que, pour tout $p \in \left\{0,1,2\right\}^d$, et $\|\xi\| \geq A$

$$\left|\partial^p f(\xi)\right| \leq c \prod_{l=1}^{d} (1 + |\xi_l|)^{-a_l - 1/\alpha - p_l}. \tag{9}$$

($\mathcal{H}_3$) Il existe $A' > 0$, $c' > 0$ et $a' \in (0,1)$ tels que pour chaque $p \in \left\{0,1,2\right\}^d$, et $0 < \|\xi\| \leq A'$,

$$\left|\partial^p f(\xi)\right| \leq c' \left\|\xi\right\|^{-a' - d/\alpha - (p_1 + p_2 + \cdots + p_d)}. \tag{10}$$

Exemple de densité spectrale admissible :

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \longmapsto \|\xi\|^{-(u+d/\alpha)} \times \prod_{l=1}^{d} \big(1 + |\xi_l|\big)^{-v_l}, \tag{11}$$

où $u \in (0,1)$ et $v_1, \ldots, v_d \in [0, +\infty)$ sont arbitraires et fixés.

Régularité trajectorielle (1)

Pour simplifier les notations, on considère les coefficients $a_1, \ldots, a_d$ non entiers et $\alpha \in [1, 2)$.

Cas où les a_l sont dans (0,1), un résultat de type "Hölder"

Soit $T \in (0, +\infty)$ et $\delta > 0$ arbitraire. Presque sûrement sur un événement ne dépendant pas de f, il existe une constante $C > 0$ vérifiant pour tout $t = (t_1, \ldots, t_d)$ et $s = (s_1, \ldots, s_d)$ dans $[-T, T]^d$,

$$|X(t) - X(s)| \leq C \sum_{l=1}^{d} |t_l - s_l|^{a_l} \left(\log\left(3 + |t_l - s_l|^{-1}\right)\right)^{1/2+1/\alpha+\delta} \tag{12}$$

Régularité trajectorielle (1)

Pour simplifier les notations, on considère les coefficients $a_1, \ldots, a_d$ non entiers et $\alpha \in [1, 2)$.

Cas où les a_l sont dans (0,1), un résultat de type "Hölder"

Soit $T \in (0, +\infty)$ et $\delta > 0$ arbitraire. Presque sûrement sur un événement ne dépendant pas de f, il existe une constante $C > 0$ vérifiant pour tout $t = (t_1, \ldots, t_d)$ et $s = (s_1, \ldots, s_d)$ dans $[-T, T]^d$,

$$|X(t) - X(s)| \leq C \sum_{l=1}^{d} |t_l - s_l|^{a_l} \left(\log\left(3 + |t_l - s_l|^{-1}\right)\right)^{1/2+1/\alpha+\delta} \tag{12}$$

Remarque : La régularité des trajectoires de X est contrôlée par la vitesse de décroissance de la densité spectrale f à l'infini.

$$|f(\xi)| \leq c \prod_{l=1}^{d} (1 + |\xi_l|)^{-a_l - 1/\alpha}. \tag{13}$$

Régularité trajectorielle (2)

On peut maintenant se poser la question de savoir ce qu'il se passe lorsque la densité spectrale décroît plus rapidement vers 0, c'est-à-dire lorsque les a_l peuvent être supérieurs à 1.

Régularité trajectorielle (2)

On peut maintenant se poser la question de savoir ce qu'il se passe lorsque la densité spectrale décroît plus rapidement vers 0, c'est-à-dire lorsque les a_l peuvent être supérieurs à 1.

Les trajectoires deviennent partiellement dérivables

Presque sûrement sur un événement ne dépendant pas de f, le champs X possède des trajectoires à dérivées partielles continues sur $\mathbb{R}^d$ de tout ordre $B = (b_1, \dots, b_d)$ tel que $b_l < a_l$ pour tout $l \in \{1, \dots, d\}$.

Remarque : Il est également possible dans ce cas de trouver un résultat de type Hölder en étudiant les accroissements d'ordre supérieur du champs.

Comportement asymptotique

Comportement trajectoriel asymptotique du champs

Presque sûrement, sur un événement de probabilité ne dépendant pas de f, il existe une constante $C > 0$ vérifiant pour tout $t \in \mathbb{R}^d$,

$$|X(t)| \leq C \|t\|^{a'} \left(\log\left(3 + \|t\|\right)\right)^{1/2}. \tag{14}$$

De plus, s'il existe $B = (b_1, \ldots, b_d) \neq 0$ tel que $b_l < a_l$ pour tout l, alors pour une constant $C' > 0$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}^d$,

$$\left|\partial^b X(t)\right| \leq C' \left(\log\left(3 + \|t\|\right)\right)^{1/2}.$$

Remarque : Le comportement asymptotique des trajectoires de X est contrôlé par la vitesse d'explosion de la densité spectrale f en 0.

Base d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R}^d)$

- La base d'ondelettes de Lemarié-Meyer de $L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{LM} = \{\psi_{j,k} : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$, est obtenue par dilatation et translation d'une ondelette mère $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$: autrement dit

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \;\; \psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k). \tag{15}$$

La fonction $\widehat{\psi}$ est à **support compact** et **s'annule dans un voisinage de l'origine**.

Base d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R}^d)$

- La base d'ondelettes de Lemarié-Meyer de $L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{LM} = \{\psi_{j,k} : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$, est obtenue par dilatation et translation d'une ondelette mère $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$: autrement dit

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \;\; \psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k). \tag{15}$$

  La fonction $\widehat{\psi}$ est à **support compact** et **s'annule dans un voisinage de l'origine**.

- Une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}^d)$ peut être obtenue comme produit tensoriel de $\mathcal{LM}$ avec lui-même: $\mathcal{LM}^{(d)} = \{\psi_{J,K}; \, (J,K) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d\}$, où

$$\forall (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d, \;\; \psi_{J,K}(t_1, \dots, t_d) = \psi_{j_1,k_1}(t_1) \dots \psi_{j_d,k_d}(t_d). \tag{16}$$

Représentation en ondelettes de X

1. Rappelons la définition du champs X : pour tout $t \in \mathbb{R}^d$,

$$X(t) := \mathcal{R}e \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{it\cdot\xi} - 1\right) f(\xi) \, \mathrm{d}\widetilde{M}_2(\xi) \right\}. \tag{17}$$

Représentation en ondelettes de X

1. Rappelons la définition du champs X : pour tout $t \in \mathbb{R}^d$,

$$X(t) := \mathcal{R}e\left\{\int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{it\cdot\xi} - 1\right) f(\xi)\, \mathrm{d}\widetilde{M}_2(\xi)\right\}. \tag{17}$$

2. A t fixé, la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$, $F_t : \xi \mapsto \left(e^{it\cdot\xi} - 1\right) f(\xi)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$, on la décompose dans la transformée de Fourier de la base $\mathcal{LM}^{(d)}$:

$$\left(e^{it\cdot\xi} - 1\right) f(\xi) = \sum_{(J,K)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d} \left(\Psi_J(2^J t - K) - \Psi_J(-K)\right) \overline{\widehat{\psi}_{J,K}(\xi)} \tag{18}$$

où

$$\Psi_J(x) = 2^{(j_1+\cdots+j_d)/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} f(2^J\xi)\widehat{\psi}(\xi_1)\ldots\widehat{\psi}(\xi_d)\mathrm{d}\xi. \tag{19}$$

Représentation en ondelettes de X

1. Rappelons la définition du champs X : pour tout $t \in \mathbb{R}^d$,

$$X(t) := \mathcal{R}e\left\{\int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{it\cdot\xi} - 1\right) f(\xi)\, \mathrm{d}\widetilde{M}_2(\xi)\right\}. \quad (17)$$

2. A t fixé, la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$, $F_t : \xi \mapsto \left(e^{it\cdot\xi} - 1\right) f(\xi)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$, on la décompose dans la transformée de Fourier de la base $\mathcal{LM}^{(d)}$:

$$\left(e^{it\cdot\xi} - 1\right) f(\xi) = \sum_{(J,K)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d} \left(\Psi_J(2^J t - K) - \Psi_J(-K)\right)\overline{\widehat{\psi}_{J,K}(\xi)} \quad (18)$$

où

$$\Psi_J(x) = 2^{(j_1+\cdots+j_d)/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} f(2^J\xi)\widehat{\psi}(\xi_1)\ldots\widehat{\psi}(\xi_d)\mathrm{d}\xi. \quad (19)$$

3. On utilise la propriété d'isométrie de $\mathrm{d}\widetilde{M}_2(\xi)$ pour échanger $\sum$ et $\int$.

Représentation en ondelettes de X

On obtient alors la représentation suivante de X : pour tout $t \in \mathbb{R}^d$,

$$X(t) = \sum_{(J,K) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d} \left(\Psi_J \left(2^J t - K \right) - \Psi_J \left(-K \right) \right) \varepsilon_{J,K}, \tag{20}$$

où

$$\Psi_J(x) = 2^{(j_1 + \dots + j_d)/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} f(2^J \xi) \widehat{\psi}(\xi_1) \dots \widehat{\psi}(\xi_d) \mathrm{d}\xi. \tag{21}$$

et

$$\varepsilon_{J,K} := \mathcal{R}e \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{\psi}_{J,K}(\xi)} \, \mathrm{d}\widetilde{M}_2(\xi) \right\}. \tag{22}$$

Représentation en ondelettes de X

On obtient alors la représentation suivante de X : pour tout $t \in \mathbb{R}^d$,

$$X(t) = \sum_{(J,K)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d} \big(\Psi_J\left(2^J t - K\right) - \Psi_J\left(-K\right)\big)\varepsilon_{J,K}, \tag{20}$$

où

$$\Psi_J(x) = 2^{(j_1+\cdots+j_d)/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} f(2^J\xi)\widehat{\psi}(\xi_1)\ldots\widehat{\psi}(\xi_d)\mathrm{d}\xi. \tag{21}$$

et

$$\varepsilon_{J,K} := \mathcal{R}e\left\{\int_{\mathbb{R}^d}\overline{\widehat{\psi}_{J,K}(\xi)}\,\mathrm{d}\widetilde{M}_2(\xi)\right\}. \tag{22}$$

L'un des principaux avantages de cette représentation en ondelettes est qu'elle isole tout l'aléa du champs X dans la suite de variables aléatoires $\varepsilon_{J,K}$ qui **ne dépend pas de la densité spectrale f.**

References

- A. Ayache, S. Jaffard. M.S. Taqqu. *Wavelet construction of Generalized Multifractal processes* (2007),
- A. Ayache, F. Roueff, Y. Xiao. *Linear fractional stable sheets: wavelet expansion and sample path properties*,
- A. Ayache, Y. Xiao. *Asymptotic properties and Hausdorff Dimensions of Fractional Brownian Sheets* (2005),
- A. Bonami, A. Estrade. *Anisotropic Analysis of Some Gausian Models* (2003),
- R. Jennane, R. Harba, E. Perrin, A. Bonami, A. Estrade. *Analyse de champs browniens fractionnaires anisotropes*,
- G. Samoradnitsky, M.S. Taqqu. *Stable Non-Gaussian Random Processes*,
- J.M. Steele. *Stochastic Calculus and Financial Applications*.

Merci de votre attention !