Algèbres à puissances divisées

Laboratoire
Paul Painlevé

Andrea Cesaro

Université Lille 1

10/09/2015

L'algèbre tensorielle.

LES ALGÈBRES ASSOCIATIVES

Définition

Une algèbre associative A est un $\mathbb{k}$-module muni d'un produit $\mu : A \otimes A \to A$ tel que

$$\mu(x, \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), z)$$

pour tous les $x, y, z \in A$ et une unité $u \in A$ tel que

$$\mu(x, u) = \mu(u, x) = x.$$

LES ALGÈBRES ASSOCIATIVES

Définition

Une algèbre associative A est un $\mathbb{k}$-module muni d'un produit $\mu : A \otimes A \to A$ tel que

$$\mu(x, \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), z)$$

pour tous les $x, y, z \in A$ et une unité $u \in A$ tel que

$$\mu(x, u) = \mu(u, x) = x.$$

Example

Soit V un $\mathbb{k}$-module. Le $\mathbb{k}$-module des endomorphismes $End(V)$ muni du produit $\circ : End(V) \otimes End(V) \to End(V)$ donné par la composition des morphismes, est une algèbre associative.

LES ALGÈBRES ASSOCIATIVES LIBRES

Définition

Soit V un $\mathbb{k}$-module. Une algèbre associative libre sur V est une algèbre associative A avec une fonction linéaire $V \to A$ qui résout le problème universel suivant :

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & B \\
& A \arrow[ur, dashed, "\exists!\phi"'] &
\end{tikzcd}$$

où B est une algèbre associative, f est une fonction linéaire et ϕ est un morphisme d'algèbres associatives.

L'ALGÈBRE TENSORIELLE

Définition

Soit V un $\mathbb{k}$-module. Le $\mathbb{k}$-module défini par :

$$T(V) := \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} V^{\otimes r}$$

est muni d'un produit associatif donné par la formule suivante :

$$\mu(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n, w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m.$$

Proposition

Soit V un $\Bbbk$-module. L'algèbre $T(V)$ est une algèbre associative libre sur V. Si $V = \Bbbk\{v_1, \ldots, v_n\}$ alors $T(V)$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes à n variables non-commutatives.

L'algèbre symétrique.

LES ALGÈBRES COMMUTATIVES

Définition

Une algèbre commutative C est une algèbre associative tel que :

$$\mu(x, y) = \mu(y, x)$$

pour tous les $x, y \in C$.

LES ALGÈBRES COMMUTATIVES LIBRES

Définition

Soit V un $\mathbb{k}$-module. Une algèbre commutative libre sur V est une algèbre associative A avec une fonction linéaire $V \to A$ qui résout le problème universel suivant :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & B \\ & A \arrow[ur, dashed, "\exists ! \phi"'] & \end{tikzcd}$$

où B est une algèbre commutative, f est une fonction linéaire et ϕ est un morphisme d'algèbres commutatives.

L'ALGÈBRE SYMÉTRIQUE

Définition

Soit V un $\mathbb{k}$-module. Le $\mathbb{k}$-module défini par :

$$S(V) := \frac{T(V)}{\langle \mu(x,y) - \mu(y,x) \rangle} = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} (V^{\otimes r})_{\Sigma_r}$$

est une algèbre commutative.

L'ALGÈBRE SYMÉTRIQUE

Définition

Soit V un $\mathbb{k}$-module. Le $\mathbb{k}$-module défini par :

$$S(V) := \frac{T(V)}{\langle \mu(x,y) - \mu(y,x) \rangle} = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} (V^{\otimes r})_{\Sigma_r}$$

est une algèbre commutative.

Example

Si $x, y \in V$ alors : $[x \otimes y] = xy = yx = [y \otimes x]$.

L'ALGÈBRE SYMÉTRIQUE

Définition

Soit V un $\Bbbk$-module. Le $\Bbbk$-module défini par :

$$S(V) := \frac{T(V)}{\langle \mu(x,y) - \mu(y,x) \rangle} = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} (V^{\otimes r})_{\Sigma_r}$$

est une algèbre commutative.

Example

Si $x, y \in V$ alors : $[x \otimes y] = xy = yx = [y \otimes x]$.

Proposition

L'algèbre $S(V)$ est une algèbre commutative libre sur V. Si $V = \Bbbk\{v_1, \ldots, v_n\}$ alors $S(V)$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes à n variables commutatives.

L'algèbre des invariants.

L'ALGÈBRE DES INVARIANTS

Définition

Soit V un $\mathbb{k}$-module. Le $\mathbb{k}$-module défini par :

$$\Gamma(V) := \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} (V^{\otimes r})^{\Sigma_r}$$

est une algèbre commutative.

L'ALGÈBRE DES INVARIANTS

Définition

Soit V un $\mathbb{k}$-module. Le $\mathbb{k}$-module défini par :

$$\Gamma(V) := \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} (V^{\otimes r})^{\Sigma_r}$$

est une algèbre commutative.

Example

Si $x, y \in V$ alors $x \otimes x$ et $x \otimes y + y \otimes x$ sont des éléments de l'algèbre $\Gamma(V)$, alors que $x \otimes y$ non.

$S(V)$ Vs. $\Gamma(V)$.

LE MORPHISME TRACE

Définition

Soit V un $\Bbbk$-module. Le morphisme d'algèbres commutatives

$$tr_V : S(V) \to \Gamma(V)$$

est défini comme suit :

$$tr_V(x_1 \cdots x_r) = \sum_{\sigma \in \Sigma_r} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(r)}.$$

LE MORPHISME TRACE

Définition

Soit V un $\mathbb{k}$-module. Le morphisme d'algèbres commutatives

$$tr_V : S(V) \to \Gamma(V)$$

est défini comme suit :

$$tr_V(x_1 \cdots x_r) = \sum_{\sigma \in \Sigma_r} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(r)}.$$

Example

Soit $x, y \in V$. On obtient :

$$tr_V(xy) = x \otimes y + y \otimes x.$$

$\mathbb{k} = \mathbb{Q}$

Proposition

Soit V un $\mathbb{Q}$-module. Le morphisme trace a une réciproque $tr_V^{-1} : \Gamma(V) \to S(V)$ défini comme suit, soit $\xi \in (V^r)^{\Sigma_r}$:

$$tr_V^{-1}(\xi) = \frac{1}{r!}[\xi].$$

$\mathbb{k} = \mathbb{Q}$

Proposition

Soit V un $\mathbb{Q}$-module. Le morphisme trace a une réciproque $tr_V^{-1} : \Gamma(V) \to S(V)$ défini comme suit, soit $\xi \in (V^r)^{\Sigma_r}$:

$$tr_V^{-1}(\xi) = \frac{1}{r!}[\xi].$$

Example

Soit $x, y \in V$. On obtient :

$$tr_V^{-1}(x \otimes y + y \otimes x) = \frac{1}{2}(xy + yx) = xy.$$

$$tr_V^{-1}(x \otimes x) = \frac{1}{2}xx.$$

$\Bbbk = \mathbb{Z}$

Proposition

Soit V un $\mathbb{Z}$-module. Le morphisme trace $tr_V : S(V) \to \Gamma(V)$ est injectif mais il n'est pas surjectif !

$\mathbb{k} = \mathbb{Z}$

Proposition

Soit V un $\mathbb{Z}$-module. Le morphisme trace $tr_V : S(V) \to \Gamma(V)$ est injectif mais il n'est pas surjectif !

Example

Soit $x \in V$. On obtient :

$$tr_V(xx) = 2(x \otimes x).$$

LE MORPHISME ORBITE

Définition

Soit $V = \mathbb{Z}\{v_1, \ldots, v_n\}$. *Le morphisme des* $\mathbb{Z}$*-modules*

$$Orb_V : S(V) \to \Gamma(V)$$

est défini comme suit, soit $\psi = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r}$ *:*

$$Orb_V([\psi]) = \sum_{\sigma \in \frac{\Sigma_r}{Stab(\psi)}} v_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(i_r)}.$$

LE MORPHISME ORBITE

Définition

Soit $V = \mathbb{Z}\{v_1, \dots, v_n\}$. Le morphisme des $\mathbb{Z}$-modules

$$Orb_V : S(V) \to \Gamma(V)$$

est défini comme suit, soit $\psi = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r}$:

$$Orb_V([\psi]) = \sum_{\sigma \in \frac{\Sigma_r}{Stab(\psi)}} v_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(i_r)}.$$

Proposition

Le morphisme Orb_V est un isomorphisme des $\mathbb{Z}$-modules.

Proposition

Le morphisme Orb_V *n'est pas un morphisme des algèbres commutatives.*

Proposition

Le morphisme Orb_V n'est pas un morphisme des algèbres commutatives.

Example

On obtient :

$$Orb_V(xx) = x \otimes x \neq 2(x \otimes x) = \mu(x, x).$$

Les algèbres à puissances divisées.

LES ALGÈBRE À PUISSANCES DIVISÉES

Définition

Soit R une algèbre commutative. Elle est dite à puissances divisées si elle est équipée d'une famille d'opérations $\gamma_i : R \to R$ pour $i \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $x, y \in R$ et $\lambda \in \mathbb{k}$:

$$\gamma_n(x+y) = \sum_{i=0}^{n} \gamma_{n-i}(x)\gamma_i(y), \qquad \gamma_i(\lambda x) = \lambda^i \gamma_i(x),$$

$$\gamma_m(\gamma_n(x)) = \frac{mn!}{(n!)^m m!}\gamma_{mn}(x), \qquad \gamma_1(x) = x,$$

$$\gamma_m(x)\gamma_n(x) = \binom{m+n}{n}\gamma_{m+n}(x).$$

Proposition

Soit V un $\mathbb{k}$-module. L'algèbre $\Gamma(V)$ est une algèbre à puissances divisées avec

$$\gamma_i(x) = \underbrace{x \otimes \cdots \otimes x}_{i}.$$

Proposition

Soit V un $\mathbb{k}$-module. L'algèbre $\Gamma(V)$ est une algèbre à puissances divisées avec

$$\gamma_i(x) = \underbrace{x \otimes \cdots \otimes x}_{i}.$$

Proposition

L'algèbre $\Gamma(V)$ est une algèbre à puissances divisées libre sur V.