μ_p-torseurs et descente de Cartier

Mohamed Rafik Mammeri

10 septembre 2015

Plan

Plan

Plan

Plan

La notion de faisceau

Un faisceau $\mathscr{F}$ sur un espace topologique X est une opération qui associe à tout ouvert U de X un ensemble (resp. un groupe, resp. un anneau...etc), noté $\mathscr{F}(U)$ ou $\Gamma(U, \mathscr{F})$, vérifiant certaines conditions de recollement.

La notion de faisceau

Un faisceau $\mathscr{F}$ sur un espace topologique X est une opération qui associe à tout ouvert U de X un ensemble (resp. un groupe, resp. un anneau...etc), noté $\mathscr{F}(U)$ ou $\Gamma(U, \mathscr{F})$, vérifiant certaines conditions de recollement.

Exemple

Soit X un espcace topologique (reps. une variété différentielle, resp. une variété complexe) et $\mathscr{O}_X$ le faisceau d'anneaux tel que pour tout ouvert U de X :

$$\mathscr{O}_X(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid \text{ f continue (resp. } \mathscr{C}^\infty\text{, resp. holomorphe) } \}$$

La notion de faisceau

Un faisceau $\mathscr{F}$ sur un espace topologique X est une opération qui associe à tout ouvert U de X un ensemble (resp. un groupe, resp. un anneau...etc), noté $\mathscr{F}(U)$ ou $\Gamma(U, \mathscr{F})$, vérifiant certaines conditions de recollement.

Exemple

Soit X un espcace topologique (reps. une variété différentielle, resp. une variété complexe) et $\mathscr{O}_X$ le faisceau d'anneaux tel que pour tout ouvert U de X :

$$\mathscr{O}_X(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid \text{ f continue (resp. } \mathscr{C}^\infty \text{, resp. holomorphe) } \}$$

Conditions de recollement : $\{f_i : U_i \to \mathbb{C}\}$ continues (resp. $\mathscr{C}^\infty$, resp. holomorphes) telles que $f_i = f_j$ sur $U_i \cap U_j$ alors il existe une unique fonction continue (resp. $\mathscr{C}^\infty$, resp. holomorphe) $f : \cup U_i \to \mathbb{C}$ telle que $f = f_i$ sur U_i pour tout i.

Introduction

Soit X une variété lisse sur un corps parfait de caractéristique $p > 0$.

Introduction

Soit X une variété lisse sur un corps parfait de caractéristique $p > 0$. On définit :

$$H^1_{fppf}(X, \mu_p) := \{ \text{ groupe des paires } (\mathcal{L}, \alpha) \text{ à isomorphisme près } \}$$

Introduction

Soit X une variété lisse sur un corps parfait de caractéristique $p > 0$.
On définit :

$$H^1_{fppf}(X, \mu_p) := \{ \text{ groupe des paires } (\mathcal{L}, \alpha) \text{ à isomorphisme près } \}$$

où $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible et $\alpha : \mathcal{L}^{\otimes p} \to \mathscr{O}_X$ est un isomorphisme.

Introduction

Soit X une variété lisse sur un corps parfait de caractéristique $p > 0$. On définit :

$$H^1_{fppf}(X, \mu_p) := \{ \text{ groupe des paires } (\mathcal{L}, \alpha) \text{ à isomorphisme près } \}$$

où $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible et $\alpha : \mathcal{L}^{\otimes p} \to \mathscr{O}_X$ est un isomorphisme.
On utilise la descente de Cartier pour montrer :

Introduction

Soit X une variété lisse sur un corps parfait de caractéristique $p > 0$.
On définit :

$$H^1_{fppf}(X, \mu_p) := \{ \text{ groupe des paires } (\mathcal{L}, \alpha) \text{ à isomorphisme près } \}$$

où $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible et $\alpha : \mathcal{L}^{\otimes p} \to \mathscr{O}_X$ est un isomorphisme.
On utilise la descente de Cartier pour montrer :

Théorème (Schmitt-Witt)

$$H^1_{fppf}(X, \mu_p) = \{\omega \in \Gamma(X, \Omega^1_X) \mid d\omega = 0 \ et \ C\omega = \omega\}$$

où C est l'opérateur de Cartier.

Introduction

Soit X une variété lisse sur un corps parfait de caractéristique $p > 0$.
On définit :

$$H^1_{fppf}(X, \mu_p) := \{ \text{ groupe des paires } (\mathcal{L}, \alpha) \text{ à isomorphisme près } \}$$

où $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible et $\alpha : \mathcal{L}^{\otimes p} \to \mathscr{O}_X$ est un isomorphisme.
On utilise la descente de Cartier pour montrer :

Théorème (Schmitt-Witt)

$$H^1_{fppf}(X, \mu_p) = \{\omega \in \Gamma(X, \Omega^1_X) \mid d\omega = 0 \text{ et } C\omega = \omega\}$$

où C est l'opérateur de Cartier.

La condition $C\omega = \omega$ est équivalente à ω localement logarithmique, i.e. ω est de la forme df/f localement.

Variétés algébriques

Soit k un corps algébriquement clos, $\mathbb{C}$ par exemple.

Variétés algébriques

Soit k un corps algébriquement clos, $\mathbb{C}$ par exemple.
Un ensemble algébrique est l'ensemble des zéros d'une famille de polynômes à coefficients dans k, si $I = (P_1, ..., P_k)$, où chaque $P_i \in k[x_1, ..., x_n]$, alors l'ensemble algébrique V associé à I est

$$V = \{(a_1, ..., a_n) \in k^n \mid P_i(a_1, ..., a_n) = 0, i = 1, ..., k\},$$

Variétés algébriques

Soit k un corps algébriquement clos, $\mathbb{C}$ par exemple.
Un ensemble algébrique est l'ensemble des zéros d'une famille de polynômes à coefficients dans k, si $I = (P_1, ..., P_k)$, où chaque $P_i \in k[x_1, ..., x_n]$, alors l'ensemble algébrique V associé à I est

$$V = \{(a_1, ..., a_n) \in k^n \mid P_i(a_1, ..., a_n) = 0, i = 1, ..., k\},$$

il est muni d'un faisceau structurel $\mathscr{O}_V$, analogue au faisceau des fonctions holomorphes sur une variété complexe, appelé faisceau des fonctions régulières.

Variétés algébriques

Soit k un corps algébriquement clos, $\mathbb{C}$ par exemple.
Un ensemble algébrique est l'ensemble des zéros d'une famille de polynômes à coefficients dans k, si $I = (P_1, ..., P_k)$, où chaque $P_i \in k[x_1, ..., x_n]$, alors l'ensemble algébrique V associé à I est

$$V = \{(a_1, ..., a_n) \in k^n \mid P_i(a_1, ..., a_n) = 0, i = 1, ..., k\},$$

il est muni d'un faisceau structurel $\mathscr{O}_V$, analogue au faisceau des fonctions holomorphes sur une variété complexe, appelé faisceau des fonctions régulières.

Définition

Une variété algébrique est un couple $(X, \mathscr{O}_X)$ tel que tout point possède un voisinage ouvert U tel que $(U, \mathscr{O}_X|_U)$ est isomorphe à $(V, \mathscr{O}_V)$ où V est un ensemble algébrique.

Théorie de la descente à travers un exemple

Il s'agit de faire descendre des "objets" le long d'une famille de morphismes.

Théorie de la descente à travers un exemple

Il s'agit de faire descendre des "objets" le long d'une famille de morphismes.
Soit X un espace topologique, $X = \cup U_i$ un recouvrement ouvert que l'on peut voir comme une famille d'immersions ouvertes $f_i : U_i \to X$.

Théorie de la descente à travers un exemple

Il s'agit de faire descendre des "objets" le long d'une famille de morphismes.
Soit X un espace topologique, $X = \cup U_i$ un recouvrement ouvert que l'on peut voir comme une famille d'immersions ouvertes $f_i : U_i \to X$. Une donnée de descente est alors une famille $(\mathscr{F}_i, \varphi_{ij})$ où,

Théorie de la descente à travers un exemple

Il s'agit de faire descendre des "objets" le long d'une famille de morphismes.
Soit X un espace topologique, $X = \cup U_i$ un recouvrement ouvert que l'on peut voir comme une famille d'immersions ouvertes $f_i : U_i \to X$. Une donnée de descente est alors une famille $(\mathscr{F}_i, \varphi_{ij})$ où, pour tout i, $\mathscr{F}_i$ un faisceau sur U_i, et les

$$\varphi_{ij} : \mathscr{F}_i\,|_{U_i \cap U_j} \longrightarrow \mathscr{F}_j\,|_{U_i \cap U_j}$$

Théorie de la descente à travers un exemple

Il s'agit de faire descendre des "objets" le long d'une famille de morphismes.
Soit X un espace topologique, $X = \cup U_i$ un recouvrement ouvert que l'on peut voir comme une famille d'immersions ouvertes $f_i : U_i \to X$. Une donnée de descente est alors une famille $(\mathscr{F}_i, \varphi_{ij})$ où, pour tout i, $\mathscr{F}_i$ un faisceau sur U_i, et les

$$\varphi_{ij} : \mathscr{F}_i\,|_{U_i \cap U_j} \longrightarrow \mathscr{F}_j\,|_{U_i \cap U_j}$$

sont des isomorphismes tels que pour tout i, j, k le diagramme suivant commute (condition de cocycle) :

Théorie de la descente à travers un exemple

Il s'agit de faire descendre des "objets" le long d'une famille de morphismes.
Soit X un espace topologique, $X = \cup U_i$ un recouvrement ouvert que l'on peut voir comme une famille d'immersions ouvertes $f_i : U_i \to X$. Une donnée de descente est alors une famille $(\mathscr{F}_i, \varphi_{ij})$ où, pour tout i, $\mathscr{F}_i$ un faisceau sur U_i, et les

$$\varphi_{ij} : \mathscr{F}_i\,|_{U_i \cap U_j} \longrightarrow \mathscr{F}_j\,|_{U_i \cap U_j}$$

sont des isomorphismes tels que pour tout i, j, k le diagramme suivant commute (condition de cocycle) :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}_i\,|_{U_i \cap U_j \cap U_k} \arrow[rr, "\varphi_{ik}"'] \arrow[dr, "\varphi_{ij}"'] & & \mathscr{F}_k\,|_{U_i \cap U_j \cap U_k} \\
& \mathscr{F}_j\,|_{U_i \cap U_j \cap U_k} \arrow[ur, "\varphi_{jk}"'] &
\end{tikzcd}$$

Frobenius relatif

Soit X une variété lisse sur une variété S associée à un corps parfait k de caractéristique $p > 0$.

Frobenius relatif

Soit X une variété lisse sur une variété S associée à un corps parfait k de caractéristique $p > 0$. Le Frobenius absolu de X est le morphisme $F_X : X \to X$ qui est l'identité sur l'espace topologique et tel que $F_X^\sharp : \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$ envoie g sur g^p.

Frobenius relatif

Soit X une variété lisse sur une variété S associée à un corps parfait k de caractéristique $p > 0$. Le Frobenius absolu de X est le morphisme $F_X : X \to X$ qui est l'identité sur l'espace topologique et tel que $F_X^\sharp : \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$ envoie g sur g^p.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d] \\ S \arrow[r, "F_S"] & S \end{tikzcd}$$

Frobenius relatif

Soit X une variété lisse sur une variété S associée à un corps parfait k de caractéristique $p > 0$. Le Frobenius absolu de X est le morphisme $F_X : X \to X$ qui est l'identité sur l'espace topologique et tel que $F_X^\sharp : \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$ envoie g sur g^p.

$$\begin{tikzcd} X^{(p)} \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"] & X \arrow[d] \\ S \arrow[r, "F_S"] & S \end{tikzcd}$$

Frobenius relatif

Soit X une variété lisse sur une variété S associée à un corps parfait k de caractéristique $p > 0$. Le Frobenius absolu de X est le morphisme $F_X : X \to X$ qui est l'identité sur l'espace topologique et tel que $F_X^\sharp : \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$ envoie g sur g^p.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "F_X"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X^{(p)} \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"] & X \arrow[d] \\
& S \arrow[r, "F_S"] & S
\end{tikzcd}
$$

Frobenius relatif

Soit X une variété lisse sur une variété S associée à un corps parfait k de caractéristique $p > 0$. Le Frobenius absolu de X est le morphisme $F_X : X \to X$ qui est l'identité sur l'espace topologique et tel que $F_X^\sharp : \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$ envoie g sur g^p.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "F_X"] \arrow[dr, dotted, "F"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X^{(p)} \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"] & X \arrow[d] \\
& S \arrow[r, "F_S"] & S
\end{tikzcd}
$$

Frobenius relatif

Soit X une variété lisse sur une variété S associée à un corps parfait k de caractéristique $p > 0$. Le Frobenius absolu de X est le morphisme $F_X : X \to X$ qui est l'identité sur l'espace topologique et tel que $F_X^\sharp : \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$ envoie g sur g^p.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "F_X"] \arrow[dr, dotted, "F"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
 & X^{(p)} \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"] & X \arrow[d] \\
 & S \arrow[r, "F_S"] & S
\end{tikzcd}
$$

Remarque

Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X, on a alors $F_X^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes p}$.

Descente de Cartier

La descente de Cartier se fait le long du Frobenius relatif

$$F : X \to X^{(p)}$$

Descente de Cartier

La descente de Cartier se fait le long du Frobenius relatif

$$F : X \to X^{(p)}$$

Théorème (Cartier)

Il existe une équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux quasi-cohérents $\mathscr{F}$ sur $X^{(p)}$ et la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur X munis d'une connexion intégrable de p-courbure nulle $(\mathscr{E}, \nabla)$.

Descente de Cartier

La descente de Cartier se fait le long du Frobenius relatif

$$F : X \to X^{(p)}$$

Théorème (Cartier)

Il existe une équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux quasi-cohérents $\mathscr{F}$ sur $X^{(p)}$ et la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur X munis d'une connexion intégrable de p-courbure nulle $(\mathscr{E}, \nabla)$.

Une S-connexion $(\mathscr{E}, \nabla)$ sur un faisceau quasi-cohérent $\mathscr{E}$ sur X est la donnée d'un morphisme de faisceaux abéliens

$$\nabla : \mathscr{E} \to \Omega_{X/S} \otimes \mathscr{E}$$

Descente de Cartier

La descente de Cartier se fait le long du Frobenius relatif

$$F : X \to X^{(p)}$$

Théorème (Cartier)

Il existe une équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux quasi-cohérents $\mathscr{F}$ sur $X^{(p)}$ et la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur X munis d'une connexion intégrable de p-courbure nulle $(\mathscr{E}, \nabla)$.

Une S-connexion $(\mathscr{E}, \nabla)$ sur un faisceau quasi-cohérent $\mathscr{E}$ sur X est la donnée d'un morphisme de faisceaux abéliens

$$\nabla : \mathscr{E} \to \Omega_{X/S} \otimes \mathscr{E}$$

tel que $\nabla(fe) = f\nabla(e) + df \otimes e$ pour toutes sections locales f et e de $\mathscr{O}_X$ et $\mathscr{E}$ respectivement.

Généralités sur les connexions

Le noyau d'une connexion ∇ sur $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^{\nabla}$, est appelé le faisceau des sections horizontales, pour tout ouvert U de X on a :

Généralités sur les connexions

Le noyau d'une connexion ∇ sur $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^{\nabla}$, est appelé le faisceau des sections horizontales, pour tout ouvert U de X on a :

$$\mathscr{E}^{\nabla}(U) = \{e \in \mathscr{E}(U) \mid \nabla(e) = 0\}.$$

Généralités sur les connexions

Le noyau d'une connexion ∇ sur $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^{\nabla}$, est appelé le faisceau des sections horizontales, pour tout ouvert U de X on a :

$$\mathscr{E}^{\nabla}(U) = \{e \in \mathscr{E}(U) \mid \nabla(e) = 0\}.$$

Exemple

Une connexion $\nabla : \mathscr{O}_X \to \Omega_{X/S}$ est entièrement déterminée par $\omega := \nabla(1)$, en effet pour toute section f du faisceau $\mathscr{O}_X$ on a

$$\nabla(f) = \nabla(f \cdot 1) = f \cdot \nabla(1) + df$$

Généralités sur les connexions

Le noyau d'une connexion ∇ sur $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^{\nabla}$, est appelé le faisceau des sections horizontales, pour tout ouvert U de X on a :

$$\mathscr{E}^{\nabla}(U) = \{e \in \mathscr{E}(U) \mid \nabla(e) = 0\}.$$

Exemple

Une connexion $\nabla : \mathscr{O}_X \to \Omega_{X/S}$ est entièrement déterminée par $\omega := \nabla(1)$, en effet pour toute section f du faisceau $\mathscr{O}_X$ on a

$$\nabla(f) = \nabla(f \cdot 1) = f \cdot \nabla(1) + df$$

Dans ce cas une section horizontale est une solution de "l'équation différentielle"

$$f\omega + df = 0.$$

Lien avec $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$

L'exemple précédent et le théorème de Cartier nous permet d'identifier :

$$\{\omega \in \Gamma(X, \Omega^1_X) \mid d\omega = 0 \text{ et } C\omega = \omega\}$$

Lien avec $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$

L'exemple précédent et le théorème de Cartier nous permet d'identifier :

$$\{\omega \in \Gamma(X, \Omega^1_X) \mid d\omega = 0 \text{ et } C\omega = \omega\}$$

à

$$\{(\mathscr{O}_X, \nabla) \mid \nabla \text{ intégrable de } p\text{-courbure nulle } \}$$

Lien avec $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$

L'exemple précédent et le théorème de Cartier nous permet d'identifier :

$$\{\omega \in \Gamma(X, \Omega^1_X) \mid d\omega = 0 \text{ et } C\omega = \omega\}$$

à

$$\{(\mathscr{O}_X, \nabla) \mid \nabla \text{ intégrable de } p\text{-courbure nulle }\}$$

en associant à chaque connexion $\nabla : \mathscr{O}_X \to \Omega_{X/S}$ la forme $\omega := \nabla(1)$ et,

Lien avec $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$

L'exemple précédent et le théorème de Cartier nous permet d'identifier :

$$\{\omega \in \Gamma(X, \Omega^1_X) \mid d\omega = 0 \text{ et } C\omega = \omega\}$$

à

$$\{(\mathscr{O}_X, \nabla) \mid \nabla \text{ intégrable de } p\text{-courbure nulle }\}$$

en associant à chaque connexion $\nabla : \mathscr{O}_X \to \Omega_{X/S}$ la forme $\omega := \nabla(1)$ et, à chaque $\omega \in \Gamma(X, \Omega^1_X)$,

Lien avec $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$

L'exemple précédent et le théorème de Cartier nous permet d'identifier :

$$\{\omega \in \Gamma(X, \Omega^1_X) \mid d\omega = 0 \text{ et } C\omega = \omega\}$$

à

$$\{(\mathscr{O}_X, \nabla) \mid \nabla \text{ intégrable de } p\text{-courbure nulle }\}$$

en associant à chaque connexion $\nabla : \mathscr{O}_X \to \Omega_{X/S}$ la forme $\omega := \nabla(1)$ et, à chaque $\omega \in \Gamma(X, \Omega^1_X)$, on associe une connexion ∇_ω sur $\mathscr{O}_X$ en posant

$$\nabla_\omega(1) := \omega.$$

Lien avec $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$

Il suffit maintenant de montrer :

$$
\begin{aligned}
H^1_{fppf}(X, \mu_p) &= \{ \text{ groupe des paires } (\mathcal{L}, \alpha) \text{ à isomorphisme près } \} \qquad (1) \\
&= \{ (\mathscr{O}_X, \nabla) \mid \nabla \text{ intégrable de } p\text{-courbure nulle } \} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Lien avec $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$

Il suffit maintenant de montrer :

$$\begin{aligned} H^1_{fppf}(X, \mu_p) &= \{ \text{ groupe des paires } (\mathcal{L}, \alpha) \text{ à isomorphisme près } \} && (1) \\ &= \{(\mathscr{O}_X, \nabla) \mid \nabla \text{ intégrable de } p\text{-courbure nulle } \} && (2) \end{aligned}$$

Soit ∇ une connexion sur $\mathscr{O}_X$,

Lien avec $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$

Il suffit maintenant de montrer :

$$\begin{aligned} H^1_{fppf}(X, \mu_p) &= \{ \text{ groupe des paires } (\mathcal{L}, \alpha) \text{ à isomorphisme près } \} \quad (1) \\ &= \{(\mathscr{O}_X, \nabla) \mid \nabla \text{ intégrable de } p\text{-courbure nulle } \} \quad (2) \end{aligned}$$

Soit ∇ une connexion sur $\mathscr{O}_X$, on lui associe le faisceau quasi-cohérent $\mathcal{L} := \mathscr{O}_X^{\nabla}$ des sections horizontales,

Lien avec $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$

Il suffit maintenant de montrer :

$$\begin{aligned} H^1_{fppf}(X, \mu_p) &= \{ \text{ groupe des paires } (\mathcal{L}, \alpha) \text{ à isomorphisme près } \} && (1) \\ &= \{ (\mathscr{O}_X, \nabla) \mid \nabla \text{ intégrable de } p\text{-courbure nulle } \} && (2) \end{aligned}$$

Soit ∇ une connexion sur $\mathscr{O}_X$, on lui associe le faisceau quasi-cohérent $\mathcal{L} := \mathscr{O}_X^{\nabla}$ des sections horizontales, que l'on peut voir grace au théorème de Cartier comme un faisceau inversible sur X muni d'un isomorphisme $\alpha : \mathcal{L}^{\otimes p} \simeq F^* \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$,

Lien avec $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$

Il suffit maintenant de montrer :

$$\begin{aligned} H^1_{fppf}(X, \mu_p) &= \{ \text{ groupe des paires } (\mathcal{L}, \alpha) \text{ à isomorphisme près } \} \quad (1) \\ &= \{ (\mathscr{O}_X, \nabla) \mid \nabla \text{ intégrable de } p\text{-courbure nulle } \} \quad (2) \end{aligned}$$

Soit ∇ une connexion sur $\mathscr{O}_X$, on lui associe le faisceau quasi-cohérent $\mathcal{L} := \mathscr{O}_X^{\nabla}$ des sections horizontales, que l'on peut voir grace au théorème de Cartier comme un faisceau inversible sur X muni d'un isomorphisme $\alpha : \mathcal{L}^{\otimes p} \simeq F^* \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$, on obtient donc un élément $(\mathcal{L}, \alpha)$ dans $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$.

Lien avec $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$

Il suffit maintenant de montrer :

$$\begin{aligned} H^1_{fppf}(X, \mu_p) &= \{ \text{ groupe des paires } (\mathcal{L}, \alpha) \text{ à isomorphisme près } \} && (1) \\ &= \{ (\mathscr{O}_X, \nabla) \mid \nabla \text{ intégrable de } p\text{-courbure nulle } \} && (2) \end{aligned}$$

Soit ∇ une connexion sur $\mathscr{O}_X$, on lui associe le faisceau quasi-cohérent $\mathcal{L} := \mathscr{O}_X^{\nabla}$ des sections horizontales, que l'on peut voir grace au théorème de Cartier comme un faisceau inversible sur X muni d'un isomorphisme $\alpha : \mathcal{L}^{\otimes p} \simeq F^* \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$, on obtient donc un élément $(\mathcal{L}, \alpha)$ dans $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$.
Dans le sens inverse, soit $(\mathcal{L}, \alpha)$ dans $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$,

Lien avec $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$

Il suffit maintenant de montrer :

$$\begin{aligned} H^1_{fppf}(X, \mu_p) &= \{ \text{ groupe des paires } (\mathcal{L}, \alpha) \text{ à isomorphisme près } \} &(1)\\ &= \{ (\mathscr{O}_X, \nabla) \mid \nabla \text{ intégrable de } p\text{-courbure nulle } \} &(2) \end{aligned}$$

Soit ∇ une connexion sur $\mathscr{O}_X$, on lui associe le faisceau quasi-cohérent $\mathcal{L} := \mathscr{O}_X^{\nabla}$ des sections horizontales, que l'on peut voir grace au théorème de Cartier comme un faisceau inversible sur X muni d'un isomorphisme $\alpha : \mathcal{L}^{\otimes p} \simeq F^* \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$, on obtient donc un élément $(\mathcal{L}, \alpha)$ dans $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$.
Dans le sens inverse, soit $(\mathcal{L}, \alpha)$ dans $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$, le faisceau $\mathcal{L}$ étant quasi-cohérent,

Lien avec $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$

Il suffit maintenant de montrer :

$$\begin{aligned} H^1_{fppf}(X, \mu_p) &= \{ \text{ groupe des paires } (\mathcal{L}, \alpha) \text{ à isomorphisme près } \} \quad (1) \\ &= \{ (\mathscr{O}_X, \nabla) \mid \nabla \text{ intégrable de } p\text{-courbure nulle } \} \quad (2) \end{aligned}$$

Soit ∇ une connexion sur $\mathscr{O}_X$, on lui associe le faisceau quasi-cohérent $\mathcal{L} := \mathscr{O}_X^{\nabla}$ des sections horizontales, que l'on peut voir grace au théorème de Cartier comme un faisceau inversible sur X muni d'un isomorphisme $\alpha : \mathcal{L}^{\otimes p} \simeq F^* \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$, on obtient donc un élément $(\mathcal{L}, \alpha)$ dans $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$.

Dans le sens inverse, soit $(\mathcal{L}, \alpha)$ dans $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$, le faisceau $\mathcal{L}$ étant quasi-cohérent, en utilisant le théorème de Cartier encore une fois on peut associer une unique connexion $\nabla_{\mathcal{L}}$ à $F^* \mathcal{L}$

Lien avec $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$

Il suffit maintenant de montrer :

$$\begin{aligned} H^1_{fppf}(X, \mu_p) &= \{ \text{ groupe des paires } (\mathcal{L}, \alpha) \text{ à isomorphisme près } \} \quad (1) \\ &= \{ (\mathscr{O}_X, \nabla) \mid \nabla \text{ intégrable de } p\text{-courbure nulle } \} \quad (2) \end{aligned}$$

Soit ∇ une connexion sur $\mathscr{O}_X$, on lui associe le faisceau quasi-cohérent $\mathcal{L} := \mathscr{O}_X^{\nabla}$ des sections horizontales, que l'on peut voir grace au théorème de Cartier comme un faisceau inversible sur X muni d'un isomorphisme $\alpha : \mathcal{L}^{\otimes p} \simeq F^* \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$, on obtient donc un élément $(\mathcal{L}, \alpha)$ dans $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$.
Dans le sens inverse, soit $(\mathcal{L}, \alpha)$ dans $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$, le faisceau $\mathcal{L}$ étant quasi-cohérent, en utilisant le théorème de Cartier encore une fois on peut associer une unique connexion $\nabla_{\mathcal{L}}$ à $F^* \mathcal{L}$ telle que $\mathcal{L} \simeq F^*(\mathcal{L})^{\nabla_{\mathcal{L}}}$.

Lien avec $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$

Il suffit maintenant de montrer :

$$\begin{aligned} H^1_{fppf}(X, \mu_p) &= \{ \text{ groupe des paires } (\mathcal{L}, \alpha) \text{ à isomorphisme près } \} \quad (1) \\ &= \{(\mathscr{O}_X, \nabla) \mid \nabla \text{ intégrable de } p\text{-courbure nulle } \} \quad (2) \end{aligned}$$

Soit ∇ une connexion sur $\mathscr{O}_X$, on lui associe le faisceau quasi-cohérent $\mathcal{L} := \mathscr{O}_X^{\nabla}$ des sections horizontales, que l'on peut voir grace au théorème de Cartier comme un faisceau inversible sur X muni d'un isomorphisme $\alpha : \mathcal{L}^{\otimes p} \simeq F^* \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$, on obtient donc un élément $(\mathcal{L}, \alpha)$ dans $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$.
Dans le sens inverse, soit $(\mathcal{L}, \alpha)$ dans $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$, le faisceau $\mathcal{L}$ étant quasi-cohérent, en utilisant le théorème de Cartier encore une fois on peut associer une unique connexion $\nabla_{\mathcal{L}}$ à $F^* \mathcal{L}$ telle que $\mathcal{L} \simeq F^*(\mathcal{L})^{\nabla_{\mathcal{L}}}$.
En utilisant maintenant l'isomorphisme α

Lien avec $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$

Il suffit maintenant de montrer :

$$\begin{aligned} H^1_{fppf}(X, \mu_p) &= \{ \text{ groupe des paires } (\mathcal{L}, \alpha) \text{ à isomorphisme près } \} \quad (1) \\ &= \{(\mathscr{O}_X, \nabla) \mid \nabla \text{ intégrable de } p\text{-courbure nulle } \} \quad (2) \end{aligned}$$

Soit ∇ une connexion sur $\mathscr{O}_X$, on lui associe le faisceau quasi-cohérent $\mathcal{L} := \mathscr{O}_X^{\nabla}$ des sections horizontales, que l'on peut voir grace au théorème de Cartier comme un faisceau inversible sur X muni d'un isomorphisme $\alpha : \mathcal{L}^{\otimes p} \simeq F^* \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$, on obtient donc un élément $(\mathcal{L}, \alpha)$ dans $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$.

Dans le sens inverse, soit $(\mathcal{L}, \alpha)$ dans $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$, le faisceau $\mathcal{L}$ étant quasi-cohérent, en utilisant le théorème de Cartier encore une fois on peut associer une unique connexion $\nabla_{\mathcal{L}}$ à $F^* \mathcal{L}$ telle que $\mathcal{L} \simeq F^*(\mathcal{L})^{\nabla_{\mathcal{L}}}$.

En utilisant maintenant l'isomorphisme α on obtient une connexion $\nabla_{(\mathcal{L},\alpha)}$ sur $\mathscr{O}_X$ donnée comme suit :

Lien avec $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$

Il suffit maintenant de montrer :

$$\begin{aligned} H^1_{fppf}(X,\mu_p) &= \{ \text{ groupe des paires } (\mathcal{L},\alpha) \text{ à isomorphisme près } \} && (1) \\ &= \{ (\mathscr{O}_X, \nabla) \mid \nabla \text{ intégrable de } p\text{-courbure nulle } \} && (2) \end{aligned}$$

Soit ∇ une connexion sur $\mathscr{O}_X$, on lui associe le faisceau quasi-cohérent $\mathcal{L} := \mathscr{O}_X^{\nabla}$ des sections horizontales, que l'on peut voir grace au théorème de Cartier comme un faisceau inversible sur X muni d'un isomorphisme $\alpha : \mathcal{L}^{\otimes p} \simeq F^* \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$, on obtient donc un élément $(\mathcal{L}, \alpha)$ dans $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$.

Dans le sens inverse, soit $(\mathcal{L}, \alpha)$ dans $H^1_{fppf}(X, \mu_p)$, le faisceau $\mathcal{L}$ étant quasi-cohérent, en utilisant le théorème de Cartier encore une fois on peut associer une unique connexion $\nabla_{\mathcal{L}}$ à $F^* \mathcal{L}$ telle que $\mathcal{L} \simeq F^*(\mathcal{L})^{\nabla_{\mathcal{L}}}$.

En utilisant maintenant l'isomorphisme α on obtient une connexion $\nabla_{(\mathcal{L},\alpha)}$ sur $\mathscr{O}_X$ donnée comme suit :

$$\mathscr{O}_X \xrightarrow{\alpha^{-1}} F^*(\mathcal{L}) \xrightarrow{\nabla_{\mathcal{L}}} F^*(\mathcal{L}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega_{X/S}\, \mathscr{O}_X \xrightarrow{\alpha \otimes 1} \mathscr{O}_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega_{X/S} \to \Omega_{X/S}.$$

Merci