Invariants cohomologiques de degré 3

Jean-Pierre Tignol

Université catholique de Louvain

Journée des Doctorants en Mathématiques

Artres, 10 septembre 2015

Plan

1. Invariants de formes quadratiques
2. Invariants de classes de Witt
3. Invariants de torseurs
4. Invariants de formes hermitiennes

Formes quadratiques : premiers invariants

corps $F \ni \frac{1}{2}$ $\qquad a_1X_1^2 + \cdots + a_nX_n^2 = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle.$

$$\langle 1, 1 \rangle \simeq \langle 2, 5 \rangle \qquad \text{sur } \mathbb{Q}\,?$$

discriminant : $\quad d\big(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\big) = a_1 \ldots a_n \cdot F^{\times 2} \in F^\times / F^{\times 2}.$

$$d\big(\langle 1, 1 \rangle\big) = 1 \cdot \mathbb{Q}^{\times 2} \neq 10 \cdot \mathbb{Q}^{\times 2} = d\big(\langle 2, 5 \rangle\big).$$

$$\langle 1, -3 \rangle \simeq \langle 3, -1 \rangle \qquad \text{sur } \mathbb{Q}\,?$$

Hasse : $\quad s\big(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\big) = \sum_{i<j} (a_i, a_j)_F \in \mathrm{Br}(F).$

$$s\big(\langle 1, -3 \rangle\big) = 0 \neq (3, -1)_{\mathbb{Q}} = s\big(\langle 3, -1 \rangle\big).$$

Suite de Kummer

F_s = clôture séparable $\qquad \mu_2 = \{\pm 1\} \subset F^\times$

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow F_s^\times \xrightarrow{2} F_s^\times \longrightarrow 1$$

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(F, F_s^\times) & \xrightarrow{2} & H^0(F, F_s^\times) & \xrightarrow{\delta} & H^1(F, \mu_2) & \longrightarrow & H^1(F, F_s^\times) \\ \| & & \| & & & & \| \\ F^\times & & F^\times & & & & 1 \end{array}$$

$$F^\times / F^{\times 2} = H^1(F, \mu_2)$$

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(F, F_s^\times) & \xrightarrow{\delta} & H^2(F, \mu_2) & \longrightarrow & H^2(F, F_s^\times) & \xrightarrow{2} & H^2(F, F_s^\times) \\ \| & & & & \| & & \| \\ 1 & & & & \mathrm{Br}(F) & & \mathrm{Br}(F) \end{array}$$

$$H^2(F, \mu_2) = {}_2\,\mathrm{Br}(F)$$

Cup produit

$$\mu_2 \otimes \mu_2 = \mu_2 \qquad\qquad (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

$$\cdot : H^i(F, \mu_2) \times H^j(F, \mu_2) \longrightarrow H^{i+j}(F, \mu_2)$$

$$H^*(F, \mu_2) = \bigoplus_k H^k(F, \mu_2) \text{ est une algèbre sur } \mathbb{F}_2.$$

Notation : $$(a) = a \cdot F^{\times 2} \in F^\times / F^{\times 2} = H^1(F, \mu_2)$$

Calcul

$$(a) \cdot (b) = (a, b)_F \in {}_2\mathrm{Br}(F) = H^2(F, \mu_2)$$

Invariants «de Stiefel–Whitney»

discriminant :

$d\big(\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\big) = (a_1 \ldots a_n) = (a_1) + \cdots + (a_n) \in F^\times/F^{\times 2} = H^1(F, \mu_2)$

Hasse :

$s\big(\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\big) = \sum_{i<j}(a_i, a_j)_F = \sum_{i<j}(a_i) \cdot (a_j) \in {}_2\operatorname{Br}(F) = H^2(F, \mu_2)$

Delzant (1962) :

$w_k\big(\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\big) = \sum_{i_1<\cdots<i_k}(a_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (a_{i_k}) \in H^k(F, \mu_2) \qquad (k \leq n)$

Exemple

Règles :

$$(1) = 0 \qquad (a)\cdot(a) = (a)\cdot(-1) \qquad (a)\cdot(b) = (b)\cdot(a)$$

$$\begin{aligned}
w_3\big(\langle 1, a_1, a_2, a_1a_2\rangle\big) &= (a_1)\cdot(a_2)\cdot(a_1a_2)\\
&= (a_1)\cdot(a_2)\cdot(a_1) + (a_1)\cdot(a_2)\cdot(a_2)\\
&= (a_1)\cdot(a_2)\cdot(-1) + (a_1)\cdot(a_2)\cdot(-1)\\
&= 0.\\
w_4\big(\langle 1, a_1, a_2, a_1a_2\rangle\big) &= 0.
\end{aligned}$$

Calcul

Si $-1 \in F^{\times 2}$,

$$w_k\big(\langle 1, a_1, a_2, a_1a_2\rangle\big) = w_k\big(\langle b, a_1b, a_2b, a_1a_2b\rangle\big) \qquad \text{pour tout } b,\ k.$$

Le module des invariants

$$\mathrm{Quad}_n(F) = \{\text{classes d'iso de formes quadratiques de dimension } n \text{ sur } F\}$$

$$\mathrm{Quad}_n \colon \mathrm{Corps}_{F_0} \to \mathrm{Ens} \qquad \text{covariant}$$

$$\mathrm{Inv}_{F_0}(\mathrm{Quad}_n, \mu_2) = \{\text{transformations naturelles } \mathrm{Quad}_n \to H^*(\ , \mu_2)\}$$

Théorème

$\mathrm{Inv}_{F_0}(\mathrm{Quad}_n, \mu_2)$ *est module libre de base* 1, w_1, $\dots$, w_n *sur* $H^*(F_0, \mu_2)$.

Démonstration.

$$H^1(\ , \mu_2) \times \cdots \times H^1(\ , \mu_2) \to \mathrm{Quad}_n \colon \quad ((a_1), \dots, (a_n)) \mapsto \langle a_1, \dots, a_n \rangle$$

$$\mathrm{Inv}_{F_0}(\mathrm{Quad}_n, \mu_2) \to \mathrm{Inv}_{F_0}(H^1(\ , \mu_2), \mu_2) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Inv}_{F_0}(H^1(\ , \mu_2), \mu_2)$$

$\mathrm{Inv}_{F_0}(H^1(\ , \mu_2), \mu_2)$ est libre de base 1, $id \colon H^1(\ , \mu_2) \hookrightarrow H^*(\ , \mu_2)$. $\square$

Invariants de classes de Witt

Idée : mesurer l'écart avec les formes hyperboliques $\langle 1, -1, \dots, 1, -1\rangle$.

$$\bigcup_n \mathrm{Quad}_n(F) \text{ est un monoïde pour } \perp$$

$$W(F) = \Big(\bigcup_n \mathrm{Quad}_n(F)\Big) \Big/ \{\text{formes hyperboliques}\}$$

est un anneau où $\langle a\rangle + \langle b\rangle = \langle a, b\rangle, \quad -\langle a\rangle = \langle -a\rangle \quad$ et $\quad \langle a\rangle \cdot \langle b\rangle = \langle ab\rangle$.

$e_0\big(\langle a_1, \dots, a_n\rangle\big) = n \bmod 2 \in H^0(F, \mu_2)$ définit un homomorphisme d'anneaux

$$e_0 \colon W(F) \to H^0(F, \mu_2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$$\ker e_0 =: I(F) = \{\text{classes de Witt de formes de dimension paire}\}$$

$e_1\big(\langle 1,-a\rangle\big) = (a) \in H^1(F,\mu_2)$ s'étend en un homomorphisme surjectif

$$e_1\colon I(F) \to H^1(F,\mu_2).$$

$$\langle a_1,\dots,a_{2n}\rangle = \langle 1,a_1\rangle - \langle 1,-a_2\rangle + \langle 1,a_3\rangle - \cdots - \langle 1,-a_{2n}\rangle$$

$$\begin{aligned} e_1\big(\langle a_1,\dots,a_{2n}\rangle\big) &= \big((-1)^n a_1\dots a_{2n}\big) \in H^1(F,\mu_2) \\ &= d\big(\langle a_1,\dots,a_{2n}\rangle\big) + n(-1). \end{aligned}$$

$$\ker e_1 = I^2(F) \quad \big(= \big(I(F)\big)^2\big)$$

$e_2\big(\langle 1,-a_1\rangle\cdot\langle 1,-a_2\rangle\big) = (a_1)\cdot(a_2)$ s'étend en homomorphisme

$$e_2\colon I^2(F) \to H^2(F,\mu_2).$$

$$e_2\big(\langle 1,-a_1\rangle\cdot\langle 1,-a_2\rangle\big) = s\big(\langle 1,-a_1\rangle\cdot\langle 1,-a_2\rangle\big) + (-1)\cdot(-1).$$

$$\ker e_2 \supset I^3(F)$$

Notation : $\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle = \langle 1, -a_1\rangle \cdot \ldots \cdot \langle 1, -a_n\rangle$ (n-forme de Pfister)

Théorème (Arason, 1975)

$e_3\big(\langle\langle a_1, a_2, a_3\rangle\rangle\big) = (a_1) \cdot (a_2) \cdot (a_3)$ s'étend en homomorphisme

$$e_3 \colon I^3(F) \to H^3(F, \mu_2) \quad \text{et} \quad \ker e_3 \supset I^4(F).$$

Théorème (Orlov–Vishik–Voevodsky, 2007)

Pour tout n, $e_n\big(\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle\big) = (a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n)$ s'étend en homomorphisme surjectif

$$e_n \colon I^n(F) \to H^n(F, \mu_2) \quad \text{et} \quad \ker e_n = I^{n+1}(F).$$

Tests d'hyperbolicité

$e_0(q) = 0$? Si non, q non hyperbolique.
Si oui, $q \in I(F)$ et on calcule $e_1(q)$.

$e_1(q) = 0$? Si non, q non hyperbolique.
Si oui, $q \in I^2(F)$ et on calcule $e_2(q)$.

$e_2(q) = 0$? Si non, q non hyperbolique.
Si oui, $q \in I^3(F)$ et on calcule $e_3(q)$.

etc.

Si $q \in \bigcap_n I^n(F)$, alors q est hyperbolique (Arason–Pfister, 1971).

En fait, q est hyperbolique si $\dim q < 2^n$ et $q \in I^n(F)$.

Calcul de e_3

Soit $q \in I^3(F)$.

- $\dim q < 8$: $e_3(q) = 0$.
- $\dim q = 8$: $q \simeq \langle b \rangle \langle\langle a_1, a_2, a_3 \rangle\rangle$, $e_3(q) = (a_1) \cdot (a_2) \cdot (a_3)$.
- $\dim q = 10$: $q \simeq \langle 1, -1 \rangle + \langle b \rangle \langle\langle a_1, a_2, a_3 \rangle\rangle$,
  $e_3(q) = (a_1) \cdot (a_2) \cdot (a_3)$.
- $\dim q = 12$: $q \simeq \langle\langle a \rangle\rangle \cdot q_0$ avec $q_0 \in I^2(F)$, $e_3(q) = (a) \cdot e_2(q_0)$.
- $\dim q > 14$: **?**

Cohomologie non abélienne

Principe

$$H^1(F, \mathrm{Aut}(S)) = \boxed{\text{classes d'isomorphisme d'objets sur } F \text{ isomorphes à } S \text{ sur une clôture séparable}}$$

Cas particulier : pour q_0 forme hyperbolique de dimension $2n$,

$$\mathrm{Aut}(q_0) = \mathbf{O}(q_0).$$

$$H^1(F, \mathbf{O}(q_0)) = \boxed{\text{classes d'isométrie de formes quadratiques de dimension } 2n \text{ sur } F} = \mathrm{Quad}_{2n}(F).$$

L'invariant e_1

$$1 \longrightarrow \mathbf{O}^+(q_0) \longrightarrow \mathbf{O}(q_0) \xrightarrow{dét} \mu_2 \longrightarrow 1$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{O}(q_0) \arrow[r, "dét"] & \mu_2 \arrow[r, "0"] & H^1\big(F, \mathbf{O}^+(q_0)\big) \arrow[r] & H^1\big(F, \mathbf{O}(q_0)\big) \arrow[r, "dét"] \arrow[d, equal] & H^1(F, \mu_2) \\
 & & & \mathrm{Quad}_{2n}(F) \arrow[ur, "e_1"'] &
\end{tikzcd}$$

$$H^1\big(F, \mathbf{O}^+(q_0)\big) = \boxed{\begin{array}{l}\text{classes d'isométrie de formes}\\ \text{quadratiques de dimension}\\ 2n \text{ dans } I^2(F)\end{array}} =: \mathrm{Quad}^+_{2n}(F)$$

L'invariant e_2

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(q_0) \xrightarrow{\chi} \mathbf{O}^+(q_0) \longrightarrow 1$$

$$\begin{tikzcd} H^1\big(F, \mathrm{Spin}(q_0)\big) \arrow[r, "\chi"] & H^1\big(F, \mathbf{O}^+(q_0)\big) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & H^2(F, \mu_2) \\ & \mathrm{Quad}_{2n}^{+}(F) \arrow[ur, "e_2"'] & \end{tikzcd}$$

$$H^1\big(F, \mathrm{Spin}(q_0)\big) \overset{\chi}{\twoheadrightarrow} \boxed{\begin{array}{l}\text{classes d'isométrie de formes} \\ \text{quadratiques de dimension} \\ 2n \text{ dans } I^3(F)\end{array}} =: \mathrm{Quad}_{2n}^{++}(F)$$

L'invariant e_3

Théorème (Rost)

Pour tout groupe algébrique linéaire simple, simplement connexe G, il existe un invariant canonique

$$R\colon H^1(F,G) \longrightarrow H^3\big(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)\big)$$

où $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2) = \varinjlim_n \mu_n^{\otimes 2}$.

Cas particulier : $G = \mathrm{Spin}(q_0)$, $\qquad R\colon H^1\big(F, \mathrm{Spin}(q_0)\big) \to H^3(F, \mu_2)$.

Pour $q \in \mathrm{Quad}_{2n}^{++}(F)$, $\quad \xi \in H^1\big(F, \mathrm{Spin}(q_0)\big)$ tel que $\chi(\xi) = q$,

$$e_3(q) = R(\xi).$$

Formes hermitiennes

D corps non commutatif

$$h\colon V \times V \to D \qquad\qquad h(y,x) = \overline{h(x,y)}$$

$$\mathbf{O}(h) = \{\text{isométries de } h\}$$

Pour h_0 hyperbolique de dimension $2n$

$$H^1\big(F, \mathbf{O}(h_0)\big) = \boxed{\text{classes d'isométrie de formes hermitiennes de dimension } 2n \text{ sur } D} =: \mathrm{Herm}_{2n}(D)$$

$$1 \longrightarrow \mathbf{O}^+(h_0) \longrightarrow \mathbf{O}(h_0) \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(h_0) \xrightarrow{\chi} \mathbf{O}^+(h_0) \longrightarrow 1$$

Les invariants e_1, e_2, e_3

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{O}(h_0) \arrow[r, "dét"] & \mu_2 \arrow[r] & H^1\big(F, \mathbf{O}^+(h_0)\big) \arrow[r] & H^1\big(F, \mathbf{O}(h_0)\big) \arrow[r, "dét"] \arrow[d, equal] & H^1(F, \mu_2) \\
 & & & \mathrm{Herm}_{2n}(D) \arrow[ur, "e_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$\eta_1,\ \eta_2 \longmapsto h \in \ker e_1$$

$$
\begin{tikzcd}
H^1\big(F, \mathrm{Spin}(h_0)\big) \arrow[r, "\chi"] & H^1\big(F, \mathbf{O}^+(h_0)\big) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, two heads] & H^2(F, \mu_2) \arrow[d, two heads] \\
 & \mathrm{Herm}^+_{2n}(D) \arrow[r, "e_2"] & \frac{H^2(F,\mu_2)}{\{0,D\}}
\end{tikzcd}
$$

$$\delta(\eta_1) - \delta(\eta_2) = D$$

Si $e_2(h) = 0$: disons $\delta(\eta_1) = 0$, $\quad \chi(\xi) = \eta_1$, alors on pose

$$e_3(h) = R(\xi) + F^\times \cdot D \in H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/F^\times \cdot D$$

$$f_3(h) = 2R(\xi) \in F^\times \cdot D \subset H^3(F, \mu_2)$$

Conclusions

- Les invariants faciles à calculer ne sont pas toujours utiles.
- Les invariants utiles ne sont pas toujours faciles à calculer.
- La construction de Rost permet de définir des invariants cohomologiques de degré 3 dans plusieurs situations nouvelles.