# Algèbres de Hopf combinatoires.

Cécile Mammez

Laboratoire Joseph Liouville - Calais
Université du Littoral Côte d'Opale

10 Septembre 2015

# Plan.

1. Algèbre de battages.
   - Espace vectoriel de mots gradué et connexe.
   - Produit de battage / Produit shuffle.
   - Coproduit de déconcaténation.
2. Algèbre des mots tassés **WMat** (G. H. E. Duchamp, N. Hoang-Nghia et A. Tanasa).
   - Construction de l'espace vectoriel.
   - Produit et coproduit.
   - Algèbre duale.
3. Algèbre des diagrammes de dissection (C. Dupont).
   - Construction de l'espace vectoriel.
   - Produit et coproduit.

- $X := \{x_1 < x_2 < \dots\}$ un alphabet infini, dénombrable et totalement ordonné.
- Un mot est une concaténation de lettres.
- $X_n :=$ {mots de longueur $n$}, $M := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Vect(X_n)$.

## Exemples

$$\begin{aligned} 1 &= (), \\ x_i \text{ pour } i \in \mathbb{N}^*, & \quad x_i x_j \text{ pour } (i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \dots \\ m_1 &= x_1 x_3 x_1 + x_2 x_1 x_9, \\ m_2 &= x_2 + x_7 x_4 + 2 x_1 x_1 x_1 - 3 x_7 x_2 x_2. \end{aligned}$$

- $X := \{x_1 < x_2 < \dots\}$ un alphabet infini, dénombrable et totalement ordonné.
- Un mot est une concaténation de lettres.
- $X_n :=$ {mots de longueur $n$}, $M := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Vect(X_n)$.

## Exemples

$$\begin{aligned} 1 &= (), \\ x_i \text{ pour } i \in \mathbb{N}^*, & \quad x_i x_j \text{ pour } (i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \dots \\ m_1 &= x_1x_3x_1 + x_2x_1x_9, \\ m_2 &= x_2 + x_7x_4 + 2x_1x_1x_1 - 3x_7x_2x_2. \end{aligned}$$

- $X := \{x_1 < x_2 < \dots\}$ un alphabet infini, dénombrable et totalement ordonné.
- Un mot est une concaténation de lettres.
- $X_n := \{\text{mots de longueur } n\}$, $M := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Vect(X_n)$.

**Exemples**

$$\begin{aligned}
1 &= (), \\
x_i \text{ pour } i \in \mathbb{N}^*, & \quad x_i x_j \text{ pour } (i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \dots \\
m_1 &= x_1x_3x_1 + x_2x_1x_9, \\
m_2 &= x_2 + x_7x_4 + 2x_1x_1x_1 - 3x_7x_2x_2.
\end{aligned}$$

- $X := \{x_1 < x_2 < \dots\}$ un alphabet infini, dénombrable et totalement ordonné.
- Un mot est une concaténation de lettres.
- $X_n := \{\text{mots de longueur } n\}$, $M := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Vect(X_n)$.

**Exemples**

$$\begin{aligned} 1 &= (), \\ x_i \text{ pour } i \in \mathbb{N}^*, & \quad x_i x_j \text{ pour } (i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \dots \\ m_1 &= x_1 x_3 x_1 + x_2 x_1 x_9, \\ m_2 &= x_2 + x_7 x_4 + 2 x_1 x_1 x_1 - 3 x_7 x_2 x_2. \end{aligned}$$

- $X := \{x_1 < x_2 < \dots\}$ un alphabet infini, dénombrable et totalement ordonné.
- Un mot est une concaténation de lettres.
- $X_n := \{\text{mots de longueur } n\}$, $M := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Vect(X_n)$.

## Exemples

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & (), \\ x_i \text{ pour } i \in \mathbb{N}^*, & & x_i x_j \text{ pour } (i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \dots \\ m_1 & = & x_1 x_3 x_1 + x_2 x_1 x_9, \\ m_2 & = & x_2 + x_7 x_4 + 2x_1 x_1 x_1 - 3x_7 x_2 x_2. \end{array}$$

- Produit associatif.
- Notation : $\shuffle$.
- Battage de deux paquets de cartes.

- Produit associatif.
- Notation : $\sqcup\!\sqcup$.
- Battage de deux paquets de cartes.

- Produit associatif.
- Notation : $\sqcup\!\sqcup$.
- Battage de deux paquets de cartes.

- Produit associatif.
- Notation : $\sqcup\!\sqcup$.
- Battage de deux paquets de cartes.

## Exemples

$$
\begin{aligned}
x_1 \sqcup\!\sqcup x_2 &= x_1x_2 + x_2x_1, \\
x_2 \sqcup\!\sqcup x_1 &= x_2x_1 + x_1x_2, \\
x_2 \sqcup\!\sqcup (x_1 \sqcup\!\sqcup x_3) &= x_2 \sqcup\!\sqcup (x_1x_3 + x_3x_1) \\
&= x_2x_1x_3 + x_1x_2x_3 + x_1x_3x_2 \\
&+ x_2x_3x_1 + x_3x_2x_1 + x_3x_1x_2, \\
(x_2 \sqcup\!\sqcup x_1) \sqcup\!\sqcup x_3 &= (x_2x_1 + x_1x_2) \sqcup\!\sqcup x_3 \\
&= x_2x_1x_3 + x_2x_3x_1 + x_3x_2x_1 \\
&+ x_1x_2x_3 + x_1x_3x_2 + x_3x_1x_2, \\
x_2x_1 \sqcup\!\sqcup x_4x_5 &= x_2x_1x_4x_5 + x_2x_4x_1x_5 + x_2x_4x_5x_1 \\
&+ x_4x_2x_1x_5 + x_4x_2x_5x_1 + x_4x_5x_2x_1.
\end{aligned}
$$

## Remarque.

Ce produit est commutatif.

## Exemples

$$
\begin{aligned}
x_1 \sqcup\!\sqcup x_2 &= x_1 x_2 + x_2 x_1, \\
x_2 \sqcup\!\sqcup x_1 &= x_2 x_1 + x_1 x_2, \\
x_2 \sqcup\!\sqcup (x_1 \sqcup\!\sqcup x_3) &= x_2 \sqcup\!\sqcup (x_1 x_3 + x_3 x_1) \\
&= x_2 x_1 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3 x_2 \\
&+ x_2 x_3 x_1 + x_3 x_2 x_1 + x_3 x_1 x_2, \\
(x_2 \sqcup\!\sqcup x_1) \sqcup\!\sqcup x_3 &= (x_2 x_1 + x_1 x_2) \sqcup\!\sqcup x_3 \\
&= x_2 x_1 x_3 + x_2 x_3 x_1 + x_3 x_2 x_1 \\
&+ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3 x_2 + x_3 x_1 x_2, \\
x_2 x_1 \sqcup\!\sqcup x_4 x_5 &= x_2 x_1 x_4 x_5 + x_2 x_4 x_1 x_5 + x_2 x_4 x_5 x_1 \\
&+ x_4 x_2 x_1 x_5 + x_4 x_2 x_5 x_1 + x_4 x_5 x_2 x_1 .
\end{aligned}
$$

## Remarque.

Ce produit est commutatif.

- Opération duale du produit.
- Notation : $\Delta$.
- Déconcaténation.

### Exemples

$$\begin{aligned}
\Delta(x_i) &= 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1, \text{ pour } i \geq 1,\\
\Delta(x_9x_9x_2x_3) &= 1 \otimes x_9x_9x_2x_3 + x_9 \otimes x_9x_2x_3 + x_9x_9 \otimes x_2x_3\\
&+ x_9x_9x_2 \otimes x_3 + x_9x_9x_2x_3 \otimes 1,\\
\Delta(x_1x_5 + x_3) &= \Delta(x_1x_5) + \Delta(x_3)\\
&= 1 \otimes x_1x_5 + x_1 \otimes x_5 + x_1x_5 \otimes 1\\
&+ 1 \otimes x_3 + x_3 \otimes 1.
\end{aligned}$$

### Notation.

$$\forall w \in M, \tilde{\Delta}(w) = \Delta(w) - 1 \otimes w - w \otimes 1.$$

- Opération duale du produit.
- Notation : $\Delta$.
- Déconcaténation.

**Exemples**

$$\begin{aligned}
\Delta(x_i) &= 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1, \text{ pour } i \geq 1,\\
\Delta(x_9x_9x_2x_3) &= 1 \otimes x_9x_9x_2x_3 + x_9 \otimes x_9x_2x_3 + x_9x_9 \otimes x_2x_3\\
&+ x_9x_9x_2 \otimes x_3 + x_9x_9x_2x_3 \otimes 1,\\
\Delta(x_1x_5 + x_3) &= \Delta(x_1x_5) + \Delta(x_3)\\
&= 1 \otimes x_1x_5 + x_1 \otimes x_5 + x_1x_5 \otimes 1\\
&+ 1 \otimes x_3 + x_3 \otimes 1.
\end{aligned}$$

**Notation.**

$$\forall w \in M, \tilde{\Delta}(w) = \Delta(w) - 1 \otimes w - w \otimes 1.$$

- Opération duale du produit.
- Notation : $\Delta$.
- Déconcaténation.

## Exemples

$$
\begin{aligned}
\Delta(x_i) &= 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1, \text{ pour } i \geq 1,\\
\Delta(x_9x_9x_2x_3) &= 1 \otimes x_9x_9x_2x_3 + x_9 \otimes x_9x_2x_3 + x_9x_9 \otimes x_2x_3\\
&+ x_9x_9x_2 \otimes x_3 + x_9x_9x_2x_3 \otimes 1,\\
\Delta(x_1x_5 + x_3) &= \Delta(x_1x_5) + \Delta(x_3)\\
&= 1 \otimes x_1x_5 + x_1 \otimes x_5 + x_1x_5 \otimes 1\\
&+ 1 \otimes x_3 + x_3 \otimes 1.
\end{aligned}
$$

## Notation.

$$\forall w \in M, \tilde{\Delta}(w) = \Delta(w) - 1 \otimes w - w \otimes 1.$$

- Opération duale du produit.
- Notation : $\Delta$.
- Déconcaténation.

**Exemples**

$$\begin{aligned}
\Delta(x_i) &= 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1, \text{ pour } i \geq 1,\\
\Delta(x_9x_9x_2x_3) &= 1 \otimes x_9x_9x_2x_3 + x_9 \otimes x_9x_2x_3 + x_9x_9 \otimes x_2x_3\\
&+ x_9x_9x_2 \otimes x_3 + x_9x_9x_2x_3 \otimes 1,\\
\Delta(x_1x_5 + x_3) &= \Delta(x_1x_5) + \Delta(x_3)\\
&= 1 \otimes x_1x_5 + x_1 \otimes x_5 + x_1x_5 \otimes 1\\
&+ 1 \otimes x_3 + x_3 \otimes 1.
\end{aligned}$$

**Notation.**

$$\forall w \in M, \tilde{\Delta}(w) = \Delta(w) - 1 \otimes w - w \otimes 1.$$

- Opération duale du produit.
- Notation : $\Delta$.
- Déconcaténation.

## Exemples

$$\begin{aligned}
\Delta(x_i) &= 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1, \text{ pour } i \geq 1, \\
\Delta(x_9x_9x_2x_3) &= 1 \otimes x_9x_9x_2x_3 + x_9 \otimes x_9x_2x_3 + x_9x_9 \otimes x_2x_3 \\
&+ x_9x_9x_2 \otimes x_3 + x_9x_9x_2x_3 \otimes 1, \\
\Delta(x_1x_5 + x_3) &= \Delta(x_1x_5) + \Delta(x_3) \\
&= 1 \otimes x_1x_5 + x_1 \otimes x_5 + x_1x_5 \otimes 1 \\
&+ 1 \otimes x_3 + x_3 \otimes 1.
\end{aligned}$$

## Notation.

$$\forall w \in M, \tilde{\Delta}(w) = \Delta(w) - 1 \otimes w - w \otimes 1.$$

## Propriété

Le coproduit est coassociatif (*Id* est la fonction identité) *ie*

$$(\Delta \otimes Id) \circ \Delta = (Id \otimes \Delta) \circ \Delta$$

## Exemple

$$\begin{aligned}
\underbrace{\Delta(x_1 x_2)}_{w} &= 1 \otimes x_1 x_2 + x_1 \otimes x_2 + x_1 x_2 \otimes 1, \\
(\Delta \otimes Id)(w) &= 1 \otimes 1 \otimes x_1 x_2 + 1 \otimes x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes 1 \otimes x_2 \\
&+ 1 \otimes x_1 x_2 \otimes 1 + x_1 \otimes x_2 \otimes 1 + x_1 x_2 \otimes 1 \otimes 1 \\
(Id \otimes \Delta)(w) &= 1 \otimes 1 \otimes x_1 x_2 + 1 \otimes x_1 \otimes x_2 + 1 \otimes x_1 x_2 \otimes 1 \\
&+ x_1 \otimes 1 \otimes x_2 + x_1 \otimes x_2 \otimes 1 + x_1 x_2 \otimes 1 \otimes 1.
\end{aligned}$$

## Propriété

Le coproduit est coassociatif (*Id* est la fonction identité) *ie*

$$(\Delta \otimes Id) \circ \Delta = (Id \otimes \Delta) \circ \Delta$$

## Exemple

$$\begin{aligned}
\underbrace{\Delta(x_1x_2)}_{w} &= 1 \otimes x_1x_2 + x_1 \otimes x_2 + x_1x_2 \otimes 1,\\
(\Delta \otimes Id)(w) &= 1 \otimes 1 \otimes x_1x_2 + 1 \otimes x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes 1 \otimes x_2\\
&+ 1 \otimes x_1x_2 \otimes 1 + x_1 \otimes x_2 \otimes 1 + x_1x_2 \otimes 1 \otimes 1\\
(Id \otimes \Delta)(w) &= 1 \otimes 1 \otimes x_1x_2 + 1 \otimes x_1 \otimes x_2 + 1 \otimes x_1x_2 \otimes 1\\
&+ x_1 \otimes 1 \otimes x_2 + x_1 \otimes x_2 \otimes 1 + x_1x_2 \otimes 1 \otimes 1.
\end{aligned}$$

## Propriété

Le coproduit est coassociatif (*Id* est la fonction identité) *ie*

$$(\Delta \otimes Id) \circ \Delta = (Id \otimes \Delta) \circ \Delta$$

## Exemple

$$\begin{aligned}
\underbrace{\Delta(x_1x_2)}_{w} &= 1 \otimes x_1x_2 + x_1 \otimes x_2 + x_1x_2 \otimes 1, \\
(\Delta \otimes Id)(w) &= 1 \otimes 1 \otimes x_1x_2 + 1 \otimes x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes 1 \otimes x_2 \\
&+ 1 \otimes x_1x_2 \otimes 1 + x_1 \otimes x_2 \otimes 1 + x_1x_2 \otimes 1 \otimes 1 \\
(Id \otimes \Delta)(w) &= 1 \otimes 1 \otimes x_1x_2 + 1 \otimes x_1 \otimes x_2 + 1 \otimes x_1x_2 \otimes 1 \\
&+ x_1 \otimes 1 \otimes x_2 + x_1 \otimes x_2 \otimes 1 + x_1x_2 \otimes 1 \otimes 1.
\end{aligned}$$

### Indispensable

Le coproduit doit être un morphisme d'algèbres $M \longrightarrow M \otimes M$ *ie*

$$\forall (v, w) \in M \times M, \Delta(v \sqcup\!\sqcup w) = \Delta(v) \sqcup\!\sqcup \Delta(w) \text{ et } \Delta(1) = 1 \otimes 1.$$

### Produit dans $M \otimes M$.

Soit $(v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2) \in (M \otimes M)^2$. On définit le produit de tenseurs par :

$$(v_1 \otimes v_2) \sqcup\!\sqcup (w_1 \otimes w_2) = (v_1 \sqcup\!\sqcup w_1) \otimes (v_2 \sqcup\!\sqcup w_2).$$

## Indispensable

Le coproduit doit être un morphisme d'algèbres $M \longrightarrow M \otimes M$ *ie*

$$\forall (v, w) \in M \times M, \Delta(v \sqcup\!\sqcup w) = \Delta(v) \sqcup\!\sqcup \Delta(w) \text{ et } \Delta(1) = 1 \otimes 1.$$

## Produit dans $M \otimes M$.

Soit $(v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2) \in (M \otimes M)^2$. On définit le produit de tenseurs par :

$$(v_1 \otimes v_2) \sqcup\!\sqcup (w_1 \otimes w_2) = (v_1 \sqcup\!\sqcup w_1) \otimes (v_2 \sqcup\!\sqcup w_2).$$

### Indispensable

Le coproduit doit être un morphisme d'algèbres $M \longrightarrow M \otimes M$ *ie*

$$\forall (v, w) \in M \times M, \Delta(v \sqcup\!\sqcup w) = \Delta(v) \sqcup\!\sqcup \Delta(w) \text{ et } \Delta(1) = 1 \otimes 1.$$

### Produit dans $M \otimes M$.

Soit $(v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2) \in (M \otimes M)^2$. On définit le produit de tenseurs par :

$$(v_1 \otimes v_2) \sqcup\!\sqcup (w_1 \otimes w_2) = (v_1 \sqcup\!\sqcup w_1) \otimes (v_2 \sqcup\!\sqcup w_2).$$

## Exemple.

$$
\begin{array}{rcl}
\Delta(x_5 \sqcup\!\sqcup x_1) & = & \Delta(x_5) \sqcup\!\sqcup \Delta(x_1) \\
& = & (1 \otimes x_5 + x_5 \otimes 1) \sqcup\!\sqcup (1 \otimes x_1 + x_1 \otimes 1) \\
& = & 1 \otimes (x_5 x_1 + x_1 x_5) + x_1 \otimes x_5 \\
& + & x_5 \otimes x_1 + (x_5 x_1 + x_1 x_5) \otimes 1 \\
& = & 1 \otimes x_5 x_1 + 1 \otimes x_1 x_5 + x_1 \otimes x_5 \\
& + & x_5 \otimes x_1 + x_5 x_1 \otimes 1 + x_1 x_5 \otimes 1
\end{array}
$$

- Introduite par : G. H. E. Duchamp, N. Hoang-Nghia et A. Tanasa.
- $X := \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots\}$ un alphabet infini, dénombrable et totalement ordonné.
- Un mot tassé w est une concaténation de lettres telles que :

$$x_i \text{ apparaît dans w } \implies \forall j \in \{1, \dots, i\}, x_j \text{ apparaît dans w.}$$

- $X_n^* := \{\text{mots tassés de longueur } n\}$,
  $\mathbf{WMat} := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Vect(X_n^*)$.

- Introduite par : G. H. E. Duchamp, N. Hoang-Nghia et A. Tanasa.
- $X := \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots\}$ un alphabet infini, dénombrable et totalement ordonné.
- Un mot tassé w est une concaténation de lettres telles que :

$$x_i \text{ apparaît dans w} \implies \forall j \in \{1, \dots, i\}, x_j \text{ apparaît dans w.}$$

- $X_n^* := \{\text{mots tassés de longueur } n\}$,
  **WMat** $:= \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Vect(X_n^*)$.

- Introduite par : G. H. E. Duchamp, N. Hoang-Nghia et A. Tanasa.
- $X := \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots\}$ un alphabet infini, dénombrable et totalement ordonné.
- Un mot tassé w est une concaténation de lettres telles que :

$$x_i \text{ apparaît dans w } \Longrightarrow \forall j \in \{1, \dots, i\}, x_j \text{ apparaît dans w.}$$

- $X_n^* := \{\text{mots tassés de longueur } n\}$,
**WMat** $:= \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Vect(X_n^*)$.

- Introduite par : G. H. E. Duchamp, N. Hoang-Nghia et A. Tanasa.
- $X := \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots\}$ un alphabet infini, dénombrable et totalement ordonné.
- Un mot tassé w est une concaténation de lettres telles que :

$$x_i \text{ apparaît dans w } \Longrightarrow \forall j \in \{1, \dots, i\}, x_j \text{ apparaît dans w.}$$

- $X_n^* := \{\text{mots tassés de longueur } n\}$, $\mathbf{WMat} := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Vect(X_n^*)$.

- Introduite par : G. H. E. Duchamp, N. Hoang-Nghia et A. Tanasa.
- $X := \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots\}$ un alphabet infini, dénombrable et totalement ordonné.
- Un mot tassé w est une concaténation de lettres telles que :

$$x_i \text{ apparaît dans w } \implies \forall j \in \{1, \dots, i\}, x_j \text{ apparaît dans w.}$$

- $X_n^* := \{\text{mots tassés de longueur } n\}$,
  **WMat** $:= \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Vect(X_n^*)$.

## Exemples

En degrés 1 et 2 :

$$x_0,\ x_1,\ x_0x_0,\ x_0x_1,\ x_1x_0,\ x_1x_1,\ x_1x_2,\ x_2x_1.$$

En degré 3 :

$$x_0x_0x_0,\ x_1x_0x_0,\ x_0x_1x_0,\ x_0x_0x_1,\ x_1x_1x_0,\ x_1x_0x_1,\ x_0x_1x_1,\ x_1x_1x_1,$$

$$x_0x_1x_2,\ x_0x_2x_1,\ x_1x_2x_0,\ x_2x_1x_0,\ x_1x_0x_2,\ x_2x_0x_1,\ x_1x_1x_2,\ x_1x_2x_1,$$

$$x_2x_1x_1,\ x_2x_2x_1,\ x_2x_1x_2,\ x_1x_2x_2,\ x_1x_2x_3,\ x_1x_3x_2,\ x_2x_1x_3,\ x_2x_3x_1,$$

$$x_3x_1x_2,\ x_3x_2x_1.$$

Quelques mots qui ne sont pas tassés :

$$x_2x_3,\ x_0x_4,\ x_3x_1x_3,\ldots$$

- Produit donné par la concaténation décalée.

$$x_2x_1x_0 * x_0x_1x_0x_3x_2 = x_2x_1x_0x_0x_3x_0x_5x_4$$

- Coproduit d'extraction-contraction.

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}(x_1x_2x_0) &= x_1 \otimes x_2x_0 + x_2 \otimes x_1x_0 + x_0 \otimes x_1x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_0 \otimes x_2 + x_2x_0 \otimes x_1 \\
&= x_1 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_1x_0 + x_0 \otimes x_1x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_0 \otimes x_1 + x_1x_0 \otimes x_1, \\
\tilde{\Delta}(x_1x_2x_1) &= x_1 \otimes x_2x_0 + x_2 \otimes x_1x_1 + x_1 \otimes x_0x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_2 + x_2x_1 \otimes x_0 \\
&= x_1 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_1x_1 + x_1 \otimes x_0x_1 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_1 + x_2x_1 \otimes x_0.
\end{aligned}$$

- Produit donné par la concaténation décalée.

$$x_2x_1x_0 * x_0x_1x_0x_3x_2 = x_2x_1x_0x_0x_3x_0x_5x_4$$

- Coproduit d'extraction-contraction.

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}(x_1x_2x_0) &= x_1 \otimes x_2x_0 + x_2 \otimes x_1x_0 + x_0 \otimes x_1x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_0 \otimes x_2 + x_2x_0 \otimes x_1 \\
&= x_1 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_1x_0 + x_0 \otimes x_1x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_0 \otimes x_1 + x_1x_0 \otimes x_1, \\
\tilde{\Delta}(x_1x_2x_1) &= x_1 \otimes x_2x_0 + x_2 \otimes x_1x_1 + x_1 \otimes x_0x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_2 + x_2x_1 \otimes x_0 \\
&= x_1 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_1x_1 + x_1 \otimes x_0x_1 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_1 + x_2x_1 \otimes x_0.
\end{aligned}$$

- Produit donné par la concaténation décalée.

$$x_2x_1x_0 * x_0x_1x_0x_3x_2 = x_2x_1x_0x_0x_3x_0x_5x_4$$

- Coproduit d'extraction-contraction.

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}(x_1x_2x_0) &= x_1 \otimes x_2x_0 + x_2 \otimes x_1x_0 + x_0 \otimes x_1x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_0 \otimes x_2 + x_2x_0 \otimes x_1 \\
&= x_1 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_1x_0 + x_0 \otimes x_1x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_0 \otimes x_1 + x_1x_0 \otimes x_1, \\
\tilde{\Delta}(x_1x_2x_1) &= x_1 \otimes x_2x_0 + x_2 \otimes x_1x_1 + x_1 \otimes x_0x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_2 + x_2x_1 \otimes x_0 \\
&= x_1 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_1x_1 + x_1 \otimes x_0x_1 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_1 + x_2x_1 \otimes x_0.
\end{aligned}$$

- Produit donné par la concaténation décalée.

$$x_2x_1x_0 * x_0x_1x_0x_3x_2 = x_2x_1x_0x_0x_3x_0x_5x_4$$

- Coproduit d'extraction-contraction.

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}(x_1x_2x_0) &= x_1 \otimes x_2x_0 + x_2 \otimes x_1x_0 + x_0 \otimes x_1x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_0 \otimes x_2 + x_2x_0 \otimes x_1 \\
&= x_1 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_1x_0 + x_0 \otimes x_1x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_0 \otimes x_1 + x_1x_0 \otimes x_1, \\
\tilde{\Delta}(x_1x_2x_1) &= x_1 \otimes x_2x_0 + x_2 \otimes x_1x_1 + x_1 \otimes x_0x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_2 + x_2x_1 \otimes x_0 \\
&= x_1 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_1x_1 + x_1 \otimes x_0x_1 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_1 + x_2x_1 \otimes x_0.
\end{aligned}$$

- Produit donné par la concaténation décalée.

$$x_2x_1x_0 * x_0x_1x_0x_3x_2 = x_2x_1x_0x_0x_3x_0x_5x_4$$

- Coproduit d'extraction-contraction.

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}(x_1x_2x_0) &= x_1 \otimes x_2x_0 + x_2 \otimes x_1x_0 + x_0 \otimes x_1x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_0 \otimes x_2 + x_2x_0 \otimes x_1 \\
&= x_1 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_1x_0 + x_0 \otimes x_1x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_0 \otimes x_1 + x_1x_0 \otimes x_1, \\
\tilde{\Delta}(x_1x_2x_1) &= x_1 \otimes x_2x_0 + x_2 \otimes x_1x_1 + x_1 \otimes x_0x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_2 + x_2x_1 \otimes x_0 \\
&= x_1 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_1x_1 + x_1 \otimes x_0x_1 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_1 + x_2x_1 \otimes x_0.
\end{aligned}$$

- Produit donné par la concaténation décalée.

$$x_2x_1x_0 * x_0x_1x_0x_3x_2 = x_2x_1x_0x_0x_3x_0x_5x_4$$

- Coproduit d'extraction-contraction.

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}(x_1x_2x_0) &= x_1 \otimes x_2x_0 + x_2 \otimes x_1x_0 + x_0 \otimes x_1x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_0 \otimes x_2 + x_2x_0 \otimes x_1 \\
&= x_1 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_1x_0 + x_0 \otimes x_1x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_0 \otimes x_1 + x_1x_0 \otimes x_1, \\
\tilde{\Delta}(x_1x_2x_1) &= x_1 \otimes x_2x_0 + x_2 \otimes x_1x_1 + x_1 \otimes x_0x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_2 + x_2x_1 \otimes x_0 \\
&= x_1 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_1x_1 + x_1 \otimes x_0x_1 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_1 + x_2x_1 \otimes x_0.
\end{aligned}$$

- Produit donné par la concaténation décalée.

$$x_2x_1x_0 * x_0x_1x_0x_3x_2 = x_2x_1x_0x_0x_3x_0x_5x_4$$

- Coproduit d'extraction-contraction.

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}(x_1x_2x_0) &= x_1 \otimes x_2x_0 + x_2 \otimes x_1x_0 + x_0 \otimes x_1x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_0 \otimes x_2 + x_2x_0 \otimes x_1 \\
&= x_1 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_1x_0 + x_0 \otimes x_1x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_0 \otimes x_1 + x_1x_0 \otimes x_1, \\
\tilde{\Delta}(x_1x_2x_1) &= x_1 \otimes x_2x_0 + x_2 \otimes x_1x_1 + x_1 \otimes x_0x_2 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_2 + x_2x_1 \otimes x_0 \\
&= x_1 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_1x_1 + x_1 \otimes x_0x_1 \\
&+ x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_1 + x_2x_1 \otimes x_0.
\end{aligned}$$

- Existence d'une algèbre de Hopf duale.
- Produit $\longleftrightarrow$ coproduit.
- Double battages. Soit $w \in$ **WMat** un mot tassé. On pose $Z_w := \mathbb{1}_w$. On a

$$\begin{aligned} Z_{x_1} Z_{x_1} &= Z_{x_1 \sqcup\!\sqcup x_2} + Z_{x_2 \sqcup\!\sqcup x_1} \\ &= 2Z_{x_1 x_2} + 2Z_{x_2 x_1}. \end{aligned}$$

- Existence d'une algèbre de Hopf duale.
- Produit $\longleftrightarrow$ coproduit.
- Double battages. Soit $w \in$ **WMat** un mot tassé. On pose $Z_w := \mathbb{1}_w$. On a

$$\begin{aligned} Z_{x_1} Z_{x_1} &= Z_{x_1 \sqcup\!\sqcup x_2} + Z_{x_2 \sqcup\!\sqcup x_1} \\ &= 2Z_{x_1 x_2} + 2Z_{x_2 x_1}. \end{aligned}$$

- Existence d'une algèbre de Hopf duale.
- Produit $\longleftrightarrow$ coproduit.
- Double battages. Soit $w \in$ **WMat** un mot tassé. On pose $Z_w := \mathbb{1}_w$. On a

$$\begin{aligned} Z_{x_1} Z_{x_1} &= Z_{x_1 \sqcup\!\sqcup x_2} + Z_{x_2 \sqcup\!\sqcup x_1} \\ &= 2Z_{x_1 x_2} + 2Z_{x_2 x_1}. \end{aligned}$$

- Existence d'une algèbre de Hopf duale.
- Produit $\longleftrightarrow$ coproduit.
- Double battages. Soit $w \in$ **WMat** un mot tassé. On pose $Z_w := \mathbb{1}_w$. On a

$$\begin{aligned} Z_{x_1} Z_{x_1} &= Z_{x_1 \sqcup\!\sqcup x_2} + Z_{x_2 \sqcup\!\sqcup x_1} \\ &= 2Z_{x_1 x_2} + 2Z_{x_2 x_1}. \end{aligned}$$

- Introduite par : C. Dupont.
- Espace vectoriel :

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Vect(D_n)$$

où

$$D_n = Vect\{ \text{ diagrammes de dissection de degré } n\}.$$

- Construction d'un diagramme de dissection.

- Introduite par : C. Dupont.
- Espace vectoriel :

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Vect(D_n)$$

où

$$D_n = Vect\{ \text{ diagrammes de dissection de degré } n\}.$$

- Construction d'un diagramme de dissection.

- Introduite par : C. Dupont.
- Espace vectoriel :

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Vect(D_n)$$

où

$$D_n = Vect\{\text{ diagrammes de dissection de degré } n\}.$$

- Construction d'un diagramme de dissection.

- Introduite par : C. Dupont.
- Espace vectoriel :

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Vect(D_n)$$

où

$$D_n = Vect\{ \text{ diagrammes de dissection de degré } n\}.$$

- Construction d'un diagramme de dissection.

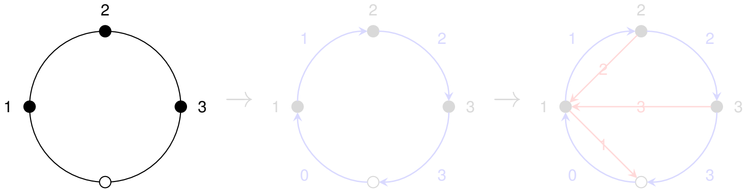
- Introduite par : C. Dupont.
- Espace vectoriel :

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Vect(D_n)$$

où

$$D_n = Vect\{\text{ diagrammes de dissection de degré } n\}.$$

- Construction d'un diagramme de dissection.



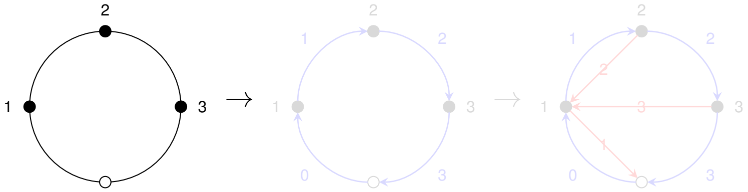
- Introduite par : C. Dupont.
- Espace vectoriel :

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Vect(D_n)$$

où

$$D_n = Vect\{\text{ diagrammes de dissection de degré } n\}.$$

- Construction d'un diagramme de dissection.



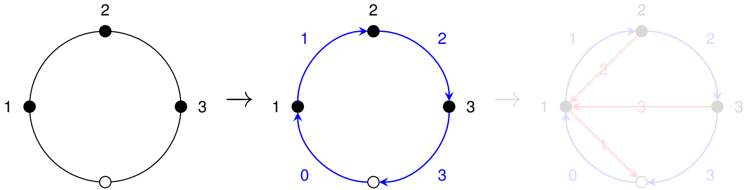
- Introduite par : C. Dupont.
- Espace vectoriel :

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Vect(D_n)$$

où

$$D_n = Vect\{\text{ diagrammes de dissection de degré } n\}.$$

- Construction d'un diagramme de dissection.



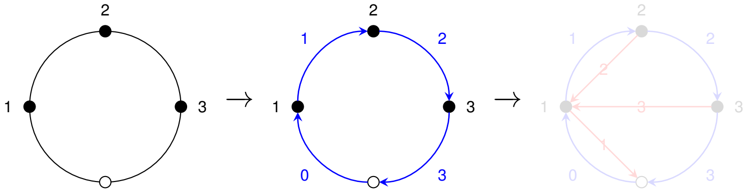
- Introduite par : C. Dupont.
- Espace vectoriel :

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Vect(D_n)$$

où

$$D_n = Vect\{\text{ diagrammes de dissection de degré } n\}.$$

- Construction d'un diagramme de dissection.



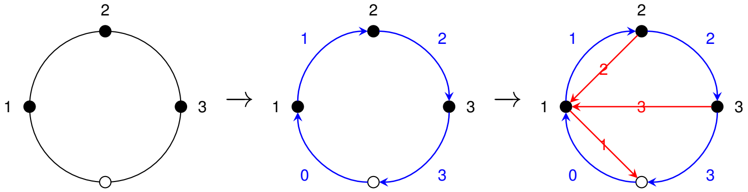
- Introduite par : C. Dupont.
- Espace vectoriel :

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Vect(D_n)$$

où

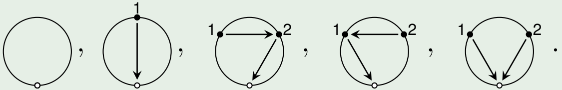
$$D_n = Vect\{ \text{ diagrammes de dissection de degré } n\}.$$

- Construction d'un diagramme de dissection.

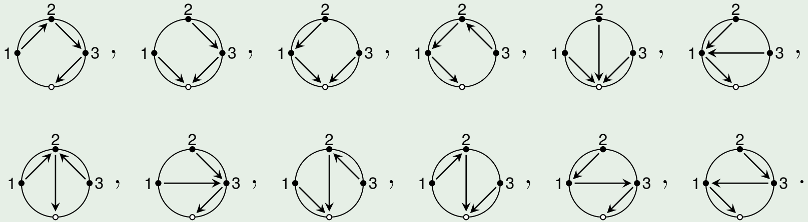


## Exemples.

En degrés 0,1 et 2 :



En degré 3 :

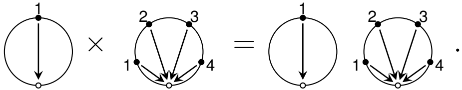


- Produit de concaténation.



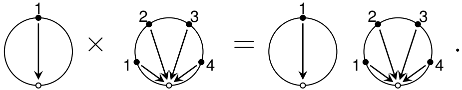
- Coproduit de contraction-extraction avec un paramètre $x \in \{-1, 1\}$.

- Produit de concaténation.



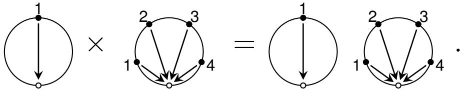
- Coproduit de contraction-extraction avec un paramètre $x \in \{-1, 1\}$.

- Produit de concaténation.

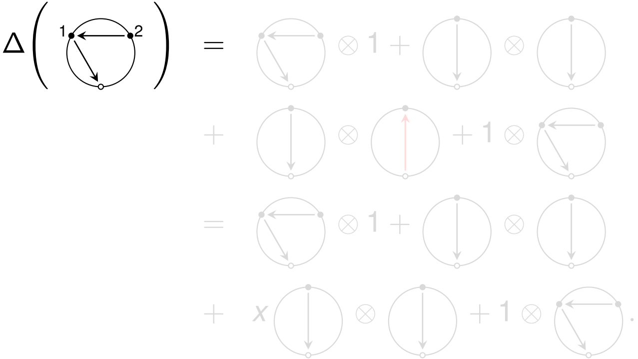



- Coproduit de contraction-extraction avec un paramètre $x \in \{-1, 1\}$.

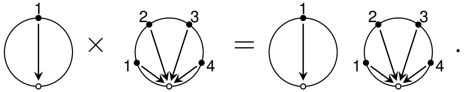
- Produit de concaténation.



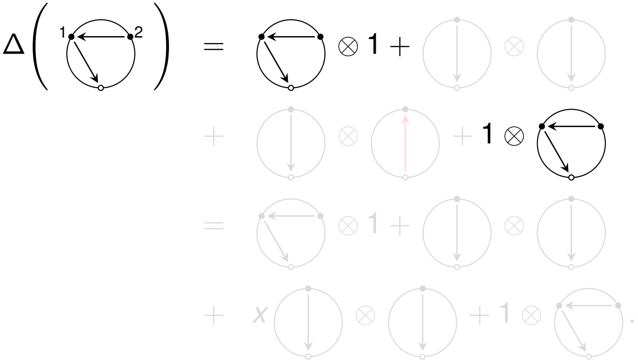

- Coproduit de contraction-extraction avec un paramètre $x \in \{-1, 1\}$.



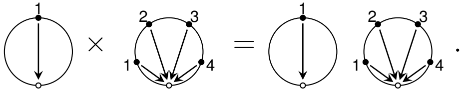
- Produit de concaténation.



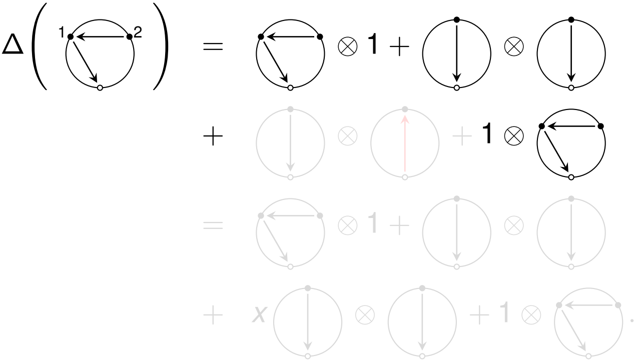
- Coproduit de contraction-extraction avec un paramètre $x \in \{-1, 1\}$.



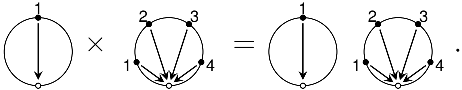
- Produit de concaténation.



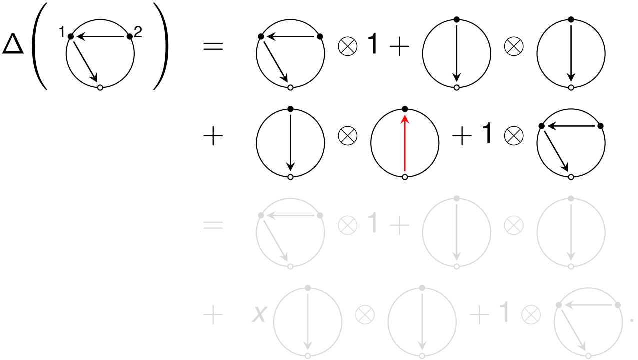
- Coproduit de contraction-extraction avec un paramètre $x \in \{-1, 1\}$.



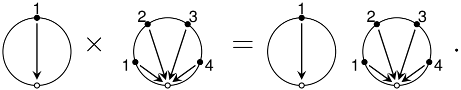
- Produit de concaténation.



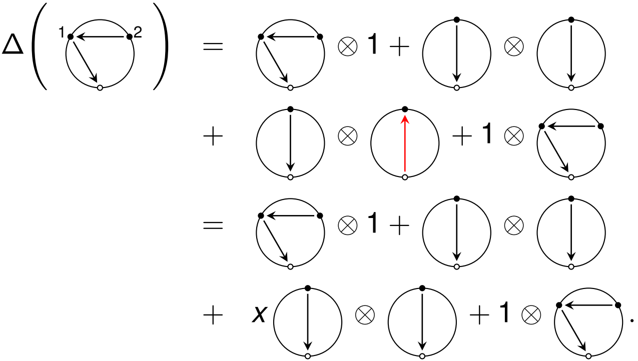

- Coproduit de contraction-extraction avec un paramètre $x \in \{-1, 1\}$.



- Produit de concaténation.




- Coproduit de contraction-extraction avec un paramètre $x \in \{-1, 1\}$.



## Deux familles de diagrammes particuliers :

- Les échelles (notées $Y_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$).




On a $\Delta(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Y_k \otimes Y_{n-k}$.

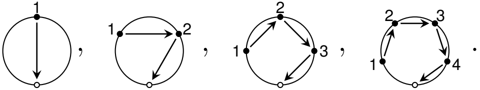
- Les corolles (notées $X_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$).




On a $\Delta(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \left( \sum_{\substack{i_0+\cdots+i_k=n-k \\ i_j \geq 0}} X_{i_0} \dots X_{i_k} \right) \otimes X_k$.

Deux familles de diagrammes particuliers :

- Les échelles (notées $Y_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$).




On a $\Delta(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Y_k \otimes Y_{n-k}$.

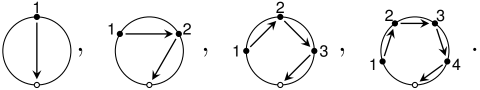
- Les corolles (notées $X_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$).




On a $\Delta(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \left( \sum_{\substack{i_0+\cdots+i_k=n-k \\ i_j \geq 0}} X_{i_0} \ldots X_{i_k} \right) \otimes X_k$.

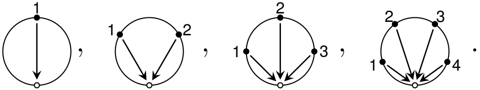
Deux familles de diagrammes particuliers :

- Les échelles (notées $Y_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$).




On a $\Delta(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Y_k \otimes Y_{n-k}$.

- Les corolles (notées $X_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$).




On a $\Delta(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \left( \sum_{\substack{i_0+\cdots+i_k=n-k \\ i_j \geq 0}} X_{i_0} \dots X_{i_k} \right) \otimes X_k$.

# Quelques points intéressants à étudier sur les algèbres de Hopf.

- Etude de sous-objets, d'objets quotient.
- Etude d'éléments particuliers : les primitifs.
- Morphismes d'algèbres de Hopf.

# Quelques points intéressants à étudier sur les algèbres de Hopf.

- Etude de sous-objets, d'objets quotient.
- Etude d'éléments particuliers : les primitifs.
- Morphismes d'algèbres de Hopf.

# Quelques points intéressants à étudier sur les algèbres de Hopf.

- Etude de sous-objets, d'objets quotient.
- Etude d'éléments particuliers : les primitifs.
- Morphismes d'algèbres de Hopf.

# Quelques points intéressants à étudier sur les algèbres de Hopf.

- Etude de sous-objets, d'objets quotient.
- Etude d'éléments particuliers : les primitifs.
- Morphismes d'algèbres de Hopf.