

La deuxième meilleure constante pour l'inégalité de Hardy-Sobolev sur les variétés

Séminaire Mathématique-Physique à l'Institut de Mathématiques de Bourgogne – 17 mars 2022

par

Hussein Cheikh-Ali

Décembre 2019 : Doctorat en Sciences de l'Université Libre de Bruxelles (ULB) en Belgique et en Mathématiques de l'Université de Lorraine (UL) en France. Travail en co-tutelle sous la direction conjointe de Denis Bonheure (ULB) et de Frédéric Robert (UL).

Décembre 2019 : Doctorat en Sciences de l'Université Libre de Bruxelles (ULB) en Belgique et en Mathématiques de l'Université de Lorraine (UL) en France. Travail en co-tutelle sous la direction conjointe de Denis Bonheure (ULB) et de Frédéric Robert (UL).

Thèmes de recherche :

- Équations aux dérivées partielles.
- L'analyse non linéaire sur les variétés.
- Équations elliptiques d'ordre supérieur sur des domaines singuliers.

Décembre 2019 : Doctorat en Sciences de l'Université Libre de Bruxelles (ULB) en Belgique et en Mathématiques de l'Université de Lorraine (UL) en France. Travail en co-tutelle sous la direction conjointe de Denis Bonheure (ULB) et de Frédéric Robert (UL).

Thèmes de recherche :

- Équations aux dérivées partielles.
- L'analyse non linéaire sur les variétés.
- Équations elliptiques d'ordre supérieur sur des domaines singuliers.

Enseignements :

Dans mon parcours professionnel, j'ai réalisé des séances d'exercices aux étudiants des niveaux L1, L2 et L3. J'ai effectué au total presque **1500 heures d'enseignement** sur 6 ans, ce qui fait une moyenne de 250 heures par an, y compris pendant la thèse.

Durant ma thèse, j'ai assuré cette activité pédagogique, en partie à l'ULB en Belgique, et en tant que docteur et assistant à l'ULB.

Cette présentation concerne l'article suivant :

Article (H. Cheikh Ali)

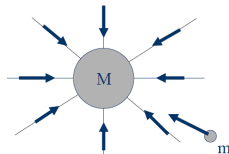
The best constant for the Hardy-Sobolev inequality on manifolds.
Accepted, to appear in ***Pacific Journal of mathematics*** (2022).

- ① Introduction
- ② Résultats principaux
- ③ La preuve du théorème de “Blow-up”

Introduction

Une motivation possible : l'astrophysique est basée en partie sur :

- l'observation ;
- la modélisation, l'analyse mathématique et numérique.



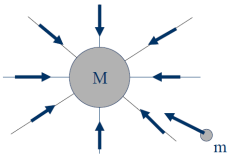
1.

Introduction

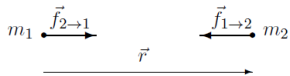
Une motivation possible : l'astrophysique est basée en partie sur :

- l'observation ;
- la modélisation, l'analyse mathématique et numérique.

Une masse M^1 placée dans l'espace va créer un **champ gravitationnel** notée par \vec{g} . Toute particule de matière de masse m , placée dans ce champ, subira une force de gravitation $\vec{F} = m\vec{g}$.



1.

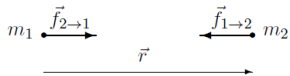


$$\vec{f}_{2 \rightarrow 1} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} = -\vec{f}_{1 \rightarrow 2}$$

Les masses m_1 et m_2 créent un champ de gravitation valant

$$\vec{g}_1 = -\frac{Gm_1}{r^3} \vec{r} \text{ et } \vec{g}_2 = -\frac{Gm_2}{r^3} \vec{r}$$

avec $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2$ est la constante de gravitation universelle.



$$\vec{f}_{2 \rightarrow 1} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} = -\vec{f}_{1 \rightarrow 2}$$

Les masses m_1 et m_2 créent un champ de gravitation valant

$$\vec{g}_1 = -\frac{Gm_1}{r^3} \vec{r} \text{ et } \vec{g}_2 = -\frac{Gm_2}{r^3} \vec{r}$$

avec $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2$ est la constante de gravitation universelle.

Dans le cas général, toute masse M sera supposé créer dans l'espace un champ \vec{g} valant

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

où \vec{r} designe cette fois le vecteur joignant la masse M au point considéré.

On a le rotationnel du champ \vec{g} égal à 0. Alors, le champ \vec{g} dérive d'un potentiel scalaire u tel que

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} u$$

On a le rotationnel du champ \vec{g} égal à 0. Alors, le champ \vec{g} dérive d'un potentiel scalaire u tel que

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} u$$

La masse M créera dans l'espace un **potentiel gravitationnel** valant

$$u(r) = -\frac{GM}{r}$$

On a le rotationnel du champ \vec{g} égal à 0. Alors, le champ \vec{g} dérive d'un potentiel scalaire u tel que

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} u$$

La masse M créera dans l'espace un **potentiel gravitationnel** valant

$$u(r) = -\frac{GM}{r}$$

Les galaxies elliptiques : elles représentent environ 13% des galaxies observées. Elles ne contiennent par exemple que peu de gaz et de poussière, et sont sphériques ou proches de la sphéricité. Les galaxies sont composées de 10^9 à 10^{13} étoiles.

La dynamique des galaxies elliptiques : pour décrire cela, on devra déterminer :

- la positions de chaque étoile, $\vec{r}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3})$.
- les vitesses de chaque étoile, $\vec{v}_i = (v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$.

où $i = 1, \dots, N$, avec $N \sim 10^9$ à 10^{13} .

La dynamique des galaxies elliptiques : pour décrire cela, on devra déterminer :

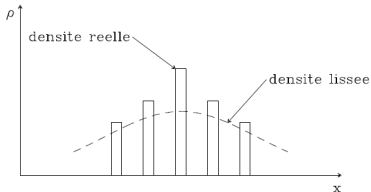
- la positions de chaque étoile, $\vec{r}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3})$.
- les vitesses de chaque étoile, $\vec{v}_i = (v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$.

où $i = 1, \dots, N$, avec $N \sim 10^9$ à 10^{13} . Ceci n'est pas facile à calculer numériquement.

La dynamique des galaxies elliptiques : pour décrire cela, on devra déterminer :

- la positions de chaque étoile, $\vec{r}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3})$.
- les vitesses de chaque étoile, $\vec{v}_i = (v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$.

où $i = 1, \dots, N$, avec $N \sim 10^9$ à 10^{13} . Ceci n'est pas facile à calculer numériquement.



En effet, on représente plutôt les étoiles d'une galaxie en utilisant la fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{v})$ est définie comme la densité lisse des particules sur la position $\vec{r} := (x, y, z)$ et la vitesse $\vec{v} := (v_x, v_y, v_z)$. On peut obtenir la densité lisse des étoiles dans l'espace par :

$$\rho(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{r}, \vec{v}) d\vec{v}$$

L'équation de Poisson : à partir de la densité ρ , on obtient une relation entre le potentiel gravitationnel u avec la densité de la matière ρ :

$$\Delta u (\equiv \nabla \cdot \nabla u) = 4\pi G\rho$$

où Δ est l'opérateur Laplacien.

Cette approche a pour conséquence de nous mener à une relation implicite entre la densité et le potentiel d'une galaxie.
En général, cette relation est non linéaire et mène naturellement à plusieurs difficultés analytiques.

Cette approche a pour conséquence de nous mener à une relation implicite entre la densité et le potentiel d'une galaxie.

En général, cette relation est non linéaire et mène naturellement à plusieurs difficultés analytiques.

L'année 2000 : pour $x = (y, z) := ((y_1, y_2), z) \in \mathbb{R}^3$, Bertin et Ciotti ont proposé un nouveau modèle de la dynamique des galaxies elliptiques.

Cette approche a pour conséquence de nous mener à une relation implicite entre la densité et le potentiel d'une galaxie.

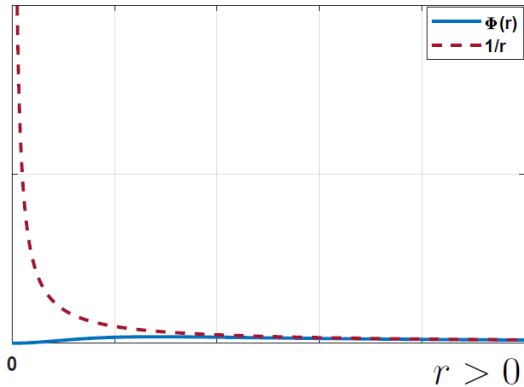
En général, cette relation est non linéaire et mène naturellement à plusieurs difficultés analytiques.

L'année 2000 : pour $x = (y, z) := ((y_1, y_2), z) \in \mathbb{R}^3$, Bertin et Ciotti ont proposé un nouveau modèle de la dynamique des galaxies elliptiques. Et plus particulièrement une dépendance spéciale de ρ sur u , ce qui mène à l'équation critique :

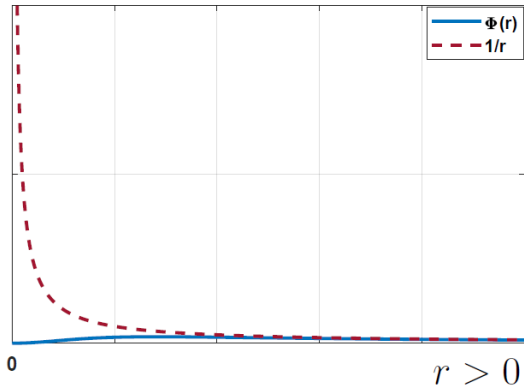
$$(E_0) \begin{cases} -\Delta u(x) = \phi(r)u^3 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ u > 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

avec $\phi(r) = \frac{r^{2\alpha}}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}+\alpha}}$, $\alpha \geq 0$, $r(\equiv |y|) = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$

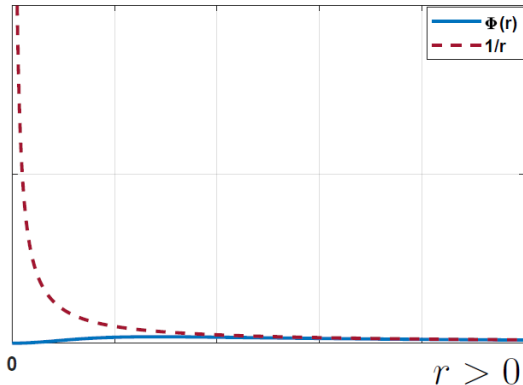
Si $\alpha = 1$



Si $\alpha = 1$



Pour toute $\alpha \geq 0$, on remarque que la limite de $\phi(r)$ est égale à $\frac{1}{r}$ lorsque r tends vers à l'infini.

Si $\alpha = 1$ 

Pour toute $\alpha \geq 0$, on remarque que la limite de $\phi(r)$ est égale à $\frac{1}{r}$ lorsque r tends vers à l'infini.

Donc le problème (E_0) admet une équation "limite" :

$$(E_1) \begin{cases} -\Delta u(x) = \frac{1}{r} u^3 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ u > 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Problème général dans $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$: pour $x = (y, z) := ((y_1, \dots, y_k), z)$
dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} (k \geq 2)$

$$(E_2) \begin{cases} -\Delta u(x) = \phi(r) u^{2_s^* - 1} & \text{dans } \mathbb{R}^n, \\ u > 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

avec $r(\equiv |y|) = \sqrt{y_1^2 + \dots + y_k^2}$; $2_s^* = \frac{2(n-s)}{n-2} (0 \leq s < 2)$ et la fonction $\phi(r)$
est asymptotique en ∞ (ou en 0) à $\frac{1}{r^s}$.

Problème général dans $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$: pour $x = (y, z) := ((y_1, \dots, y_k), z)$
dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} (k \geq 2)$

$$(E_2) \begin{cases} -\Delta u(x) = \phi(r) u^{2_s^* - 1} & \text{dans } \mathbb{R}^n, \\ u > 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

avec $r(\equiv |y|) = \sqrt{y_1^2 + \dots + y_k^2}$; $2_s^* = \frac{2(n-s)}{n-2} (0 \leq s < 2)$ et la fonction $\phi(r)$
est asymptotique en ∞ (ou en 0) à $\frac{1}{r^s}$.

Donc (E_2) admet une équation limite :

$$(E_3) \begin{cases} -\Delta u = \frac{u^{2_s^* - 1}}{|y|^s} & \text{dans } \mathbb{R}^n, \\ u > 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Problème général dans $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$: pour $x = (y, z) := ((y_1, \dots, y_k), z)$
dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} (k \geq 2)$

$$(E_2) \begin{cases} -\Delta u(x) = \phi(r) u^{2_s^* - 1} & \text{dans } \mathbb{R}^n, \\ u > 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

avec $r(\equiv |y|) = \sqrt{y_1^2 + \dots + y_k^2}$; $2_s^* = \frac{2(n-s)}{n-2} (0 \leq s < 2)$ et la fonction $\phi(r)$ est asymptotique en ∞ (ou en 0) à $\frac{1}{r^s}$.

Donc (E_2) admet une équation limite :

$$(E_3) \begin{cases} -\Delta u = \frac{u^{2_s^* - 1}}{|y|^s} & \text{dans } \mathbb{R}^n, \\ u > 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

L'équation Hardy-Sobolev : est l'équation (E_3) avec $k = n$ dans $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$.

Ma présentation concerne des problèmes de type **Hardy-Sobolev** avec une singularité.

Variétés :

Variété lisse de dimension 2 = surface lisse qui ressemble localement à un plan (\mathbb{R}^2).

Variété lisse de dimension 3 = espace lisse qui ressemble localement à \mathbb{R}^n .



2.



3.

Variété Riemannienne : il s'agit d'une variété différentielle munie d'une structure supplémentaire appelée métrique Riemannienne notée par g permettant de définir la longueur d'un chemin entre deux points de la variété.

Variété Riemannienne : il s'agit d'une variété différentielle munie d'une structure supplémentaire appelée métrique Riemannienne notée par g permettant de définir la longueur d'un chemin entre deux points de la variété.

$d_g(x, y)$: est la distance entre deux points x et y de la variété = par exemple à la distance à vol d'oiseau dans \mathbb{R}^n .

Variété Riemannienne : il s'agit d'une variété différentielle munie d'une structure supplémentaire appelée métrique Riemannienne notée par g permettant de définir la longueur d'un chemin entre deux points de la variété.

$d_g(x, y)$: est la distance entre deux points x et y de la variété = par exemple à la distance à vol d'oiseau dans \mathbb{R}^n .

Opérateur Laplace-Beltrami :

$$\Delta_g u(x) = -\operatorname{div}_g(\nabla u(x)) = -\frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{ij} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right),$$

avec g^{ij} est la matrice inverse de g_{ij} et $\det(g)$ est le déterminant d'une matrice g .

Variété Riemannienne : il s'agit d'une variété différentielle munie d'une structure supplémentaire appelée métrique Riemannienne notée par g permettant de définir la longueur d'un chemin entre deux points de la variété.

$d_g(x, y)$: est la distance entre deux points x et y de la variété = par exemple à la distance à vol d'oiseau dans \mathbb{R}^n .

Opérateur Laplace-Beltrami :

$$\Delta_g u(x) = -\operatorname{div}_g(\nabla u(x)) = -\frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{ij} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right),$$

avec g^{ij} est la matrice inverse de g_{ij} et $\det(g)$ est le déterminant d'une matrice g .

Exemple : si $M = \mathbb{R}^n$ alors g est la métrique euclidienne standard

$$g_{ij} = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

pour tout $i, j = 1, \dots, n$ tel que $\Delta_g u(x) = -\Delta u(x)$.

Équation de Hardy-Sobolev sur une variété :

On considère (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ sans bord. On fixe un point $x_0 \in M$ et soit d_g la distance Riemannienne sur M .



Équation de Hardy-Sobolev sur une variété :

On considère (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ sans bord. On fixe un point $x_0 \in M$ et soit d_g la distance Riemannienne sur M . On fixe $a \in L^\infty(M)$, et $0 \leq s < 2$, on considère l'équation suivante

$$\begin{cases} \Delta_g u + a(x)u = \frac{u^{2_s^* - 1}}{d_g(x, x_0)^s} & \text{dans } M, \\ u > 0 & \text{dans } M, \end{cases} \quad (1)$$

où :

- $\Delta_g = -\operatorname{div}_g(\nabla)$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur (M, g) .
- $2_s^* := \frac{2(n-s)}{n-2}$ est l'exposant critique de Hardy-Sobolev.



On note 2_s^* est l'exposant critique de Hardy-Sobolev tel que :

$$2_s^* := \frac{2(n-s)}{n-2}.$$

Plus précisément, soit $H_1^2(M)$ l'espace de Sobolev standard qui est le complété de $C^\infty(M)$ en respectant la norme donnée par :

$$\|u\|_{H_1^2(M)} := \|\nabla u\|_2 + \|u\|_2,$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme $L^2(M)$ par rapport à la mesure Riemannienne dv_g .
On définit l'espace de Lebesgue à poids défini comme

$$L^p(M; d_g(\cdot, x_0)^{-s}) := \{u : M \rightarrow \mathbb{R} ; |u|^p d_g(\cdot, x_0)^{-s} \in L^1(M)\}$$

du norme

$$u \rightarrow \|u\|_{p,s} := \left(\int_M |u|^p d_g(x, x_0)^{-s} dv_g \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Maintenant, l'exposant 2_s^* est critique dans le sens suivant :

$(H_1^2(M), \|\cdot\|_{H_1^2(M)})$ se plonge continuellement dans $(L^p(M; d_g(\cdot, x_0)^{-s}), \|\cdot\|_{p,s})$ pour tout $1 \leq p \leq 2_s^*$.

Cette inclusion, appelée de Hardy-Sobolev, est compacte si et seulement si $1 \leq p < 2_s^*$.

Dans le cas critique, le plongement n'est pas **compact** et le problème (HS) est plus difficile.

La première meilleure constante : Il existe $A, B > 0$ tel que

$$\left(\int_M \frac{|u|^{2_s^*}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2_s^*}} \leq A \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + B \int_M u^2 dv_g \quad (2)$$

pour tout $u \in H_1^2(M)$.

La première meilleure constante : Il existe $A, B > 0$ tel que

$$\left(\int_M \frac{|u|^{2_s^*}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2_s^*}} \leq A \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + B \int_M u^2 dv_g \quad (2)$$

pour tout $u \in H_1^2(M)$. Il a été prouvé par [Jaber 2015](#) que :

$$\mu_s(\mathbb{R}^n)^{-1} = \inf \{ A > 0 \text{ tel que } \exists B > 0 \text{ vérifiant (2), } \forall u \in H_1^2(M) \},$$

et l'infimum est atteint avec :

$$\mu_s(\mathbb{R}^n) = \inf \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dX}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^{2_s^*}}{|X|^s} dX \right)^{\frac{2}{2_s^*}}}, u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \right\}$$

qui est la meilleure constante de l'inégalité Hardy-Sobolev (voir [Lieb 1983](#)).

La première meilleure constante : Il existe $A, B > 0$ tel que

$$\left(\int_M \frac{|u|^{2_s^*}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2_s^*}} \leq A \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + B \int_M u^2 dv_g \tag{2}$$

pour tout $u \in H_1^2(M)$. Il a été prouvé par [Jaber 2015](#) que :

$$\mu_s(\mathbb{R}^n)^{-1} = \inf \{ A > 0 \text{ tel que } \exists B > 0 \text{ vérifiant (2), } \forall u \in H_1^2(M) \},$$

et l'infimum est atteint avec :

$$\mu_s(\mathbb{R}^n) = \inf \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dX}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^{2_s^*}}{|X|^s} dX \right)^{\frac{2}{2_s^*}}}, u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \right\}$$

qui est la meilleure constante de l'inégalité Hardy-Sobolev (voir [Lieb 1983](#)).

La première meilleure constante ne dépend pas de la géométrie de la variété M !

Seconde meilleure constante : Il a été prouvé par [Jaber 2015](#) ($s > 0$) et [Hebey-Vaugon 1996](#) ($s = 0$) qu'il existe $B > 0$ tel que :

$$\left(\int_M \frac{|u|^{2_s^*}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2_s^*}} \leq \mu_s(\mathbb{R}^n)^{-1} \left(\int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + B \int_M u^2 dv_g \right) \quad (3)$$

Seconde meilleure constante : Il a été prouvé par [Jaber 2015](#) ($s > 0$) et [Hebey-Vaugon 1996](#) ($s = 0$) qu'il existe $B > 0$ tel que :

$$\left(\int_M \frac{|u|^{2_s^*}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2_s^*}} \leq \mu_s(\mathbb{R}^n)^{-1} \left(\int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + B \int_M u^2 dv_g \right) \quad (3)$$

En saturant cette inégalité par rapport à B , on définit la seconde meilleure constante comme :

$$B_s(g) := \inf \{ B > 0 \text{ vérifiant (3) pour tout } u \in H_1^2(M) \},$$

pour obtenir l'inégalité optimale :

$$\left(\int_M \frac{|u|^{2_s^*}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2_s^*}} \leq \mu_s(\mathbb{R}^n)^{-1} \left(\int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + B_s(g) \int_M u^2 dv_g \right) \quad (4)$$

pour tout $u \in H_1^2(M)$.

Seconde meilleure constante : Il a été prouvé par [Jaber 2015](#) ($s > 0$) et [Hebey-Vaugon 1996](#) ($s = 0$) qu'il existe $B > 0$ tel que :

$$\left(\int_M \frac{|u|^{2_s^*}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2_s^*}} \leq \mu_s(\mathbb{R}^n)^{-1} \left(\int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + B \int_M u^2 dv_g \right) \quad (3)$$

En saturant cette inégalité par rapport à B , on définit la seconde meilleure constante comme :

$$B_s(g) := \inf \{ B > 0 \text{ vérifiant (3) pour tout } u \in H_1^2(M) \},$$

pour obtenir l'inégalité optimale :

$$\left(\int_M \frac{|u|^{2_s^*}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2_s^*}} \leq \mu_s(\mathbb{R}^n)^{-1} \left(\int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + B_s(g) \int_M u^2 dv_g \right) \quad (4)$$

pour tout $u \in H_1^2(M)$.

La seconde meilleure constante $B_s(g)$ dépend de la géométrie de la variété M (voir plus tard) !

Définition

On dit que $u_0 \in H_1^2(M)$ est une extrémale pour (4) si $u_0 \neq 0$ et que l'égalité dans (4) est valable pour $u = u_0$, c'est à dire :

$$\left(\int_M \frac{|u_0|^{2_s^*}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2_s^*}} = \mu_s(\mathbb{R}^n)^{-1} \left(\int_M |\nabla u_0|_g^2 dv_g + B_s(g) \int_M u_0^2 dv_g \right)$$

En plus de l'existence des extrémales, nous nous intéressons à la valeur de la seconde meilleure constante. Lorsque $s = 0$, la question a été étudiée par [Djadli-Druet 2001](#).

Définition

On dit que $u_0 \in H_1^2(M)$ est une extrémale pour (4) si $u_0 \neq 0$ et que l'égalité dans (4) est valable pour $u = u_0$, c'est à dire :

$$\left(\int_M \frac{|u_0|^{2_s^*}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2_s^*}} = \mu_s(\mathbb{R}^n)^{-1} \left(\int_M |\nabla u_0|_g^2 dv_g + B_s(g) \int_M u_0^2 dv_g \right)$$

En plus de l'existence des extrémales, nous nous intéressons à la valeur de la seconde meilleure constante. Lorsque $s = 0$, la question a été étudiée par [Djadli-Druet 2001](#).

(Q1)

- Quelle est la valeur de $B_s(g)$?

Définition

On dit que $u_0 \in H_1^2(M)$ est une extrémale pour (4) si $u_0 \neq 0$ et que l'égalité dans (4) est valable pour $u = u_0$, c'est à dire :

$$\left(\int_M \frac{|u_0|^{2_s^*}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2_s^*}} = \mu_s(\mathbb{R}^n)^{-1} \left(\int_M |\nabla u_0|_g^2 dv_g + B_s(g) \int_M u_0^2 dv_g \right)$$

En plus de l'existence des extrémales, nous nous intéressons à la valeur de la seconde meilleure constante. Lorsque $s = 0$, la question a été étudiée par [Djadli-Druet 2001](#).

(Q1)

- Quelle est la valeur de $B_s(g)$?

(Q2)

- Pour quelle condition il existe des extrémales pour l'inégalité (4) ?

Résultats principaux

Soient $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^1(M)$, $(\lambda_\alpha)_\alpha \in (0, +\infty)$ tel que :

$$a_\alpha \rightarrow a_\infty \text{ dans } C^1(M) \text{ et } \lambda_\alpha \rightarrow \mu_s(\mathbb{R}^n) \text{ lorsque } \alpha \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

Résultats principaux

Soient $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^1(M)$, $(\lambda_\alpha)_\alpha \in (0, +\infty)$ tel que :

$$a_\alpha \rightarrow a_\infty \text{ dans } C^1(M) \text{ et } \lambda_\alpha \rightarrow \mu_s(\mathbb{R}^n) \text{ lorsque } \alpha \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

Pour $0 < s < 2$, on prend une suite de solutions faibles $(u_\alpha)_\alpha \in H_1^2(M)$ pour :

$$(E_\alpha) \begin{cases} \Delta_g u_\alpha + a_\alpha u_\alpha = \lambda_\alpha \frac{u_\alpha^{2^*_s-1}}{d_g(x, x_0)^s} & \text{dans } M, \\ u_\alpha \geq 0 & \text{p.p. dans } M. \end{cases} \quad (6)$$

Résultats principaux

Soient $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^1(M)$, $(\lambda_\alpha)_\alpha \in (0, +\infty)$ tel que :

$$a_\alpha \rightarrow a_\infty \text{ dans } C^1(M) \text{ et } \lambda_\alpha \rightarrow \mu_s(\mathbb{R}^n) \text{ lorsque } \alpha \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

Pour $0 < s < 2$, on prend une suite de solutions faibles $(u_\alpha)_\alpha \in H_1^2(M)$ pour :

$$(E_\alpha) \begin{cases} \Delta_g u_\alpha + a_\alpha u_\alpha = \lambda_\alpha \frac{u_\alpha^{2^*_s-1}}{d_g(x, x_0)^s} & \text{dans } M, \\ u_\alpha \geq 0 & \text{p.p. dans } M. \end{cases} \quad (6)$$

On suppose que :

$$\left(\int_M \frac{|u_\alpha|^{2^*_s}}{d_g(x, x_0)^s} dV_g \right)^{\frac{2}{2^*_s}} = 1 \text{ et } u_\alpha \rightarrow 0 \text{ faiblement dans } H_1^2(M) \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Résultats principaux

Soient $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^1(M)$, $(\lambda_\alpha)_\alpha \in (0, +\infty)$ tel que :

$$a_\alpha \rightarrow a_\infty \text{ dans } C^1(M) \text{ et } \lambda_\alpha \rightarrow \mu_s(\mathbb{R}^n) \text{ lorsque } \alpha \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

Pour $0 < s < 2$, on prend une suite de solutions faibles $(u_\alpha)_\alpha \in H_1^2(M)$ pour :

$$(E_\alpha) \begin{cases} \Delta_g u_\alpha + a_\alpha u_\alpha = \lambda_\alpha \frac{u_\alpha^{2^*_s-1}}{d_g(x, x_0)^s} & \text{dans } M, \\ u_\alpha \geq 0 & \text{p.p. dans } M. \end{cases} \quad (6)$$

On suppose que :

$$\left(\int_M \frac{|u_\alpha|^{2^*_s}}{d_g(x, x_0)^s} dV_g \right)^{\frac{2}{2^*_s}} = 1 \text{ et } u_\alpha \rightarrow 0 \text{ faiblement dans } H_1^2(M) \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

(Q) Comment u_α est une suite de "Blow-up" ?

Avec l'équation (7), on a :

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|u_\alpha\|_\infty = +\infty.$$

Soit alors x_α une suite de points de M telle que :

$$u_\alpha(x_\alpha) = \max_M u_\alpha.$$

Comme M est une variété compacte et $u_\alpha \in C^0(M)$ vérifie les conditions (6) et (7)⁵, alors il existe $\mu_\alpha > 0$ tel que :

$$\mu_\alpha := u_\alpha(x_\alpha)^{-\frac{2}{n-2}}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mu_\alpha = 0. \quad (8)$$

5.

$$(6) \quad \Delta_g u_\alpha + a_\alpha u_\alpha = \lambda_\alpha \frac{u_\alpha^{2_s^* - 1}}{d_g(x, x_0)^s}; \quad u_\alpha \geq 0 \text{ dans } M.$$

$$(7) \quad \left(\int_M \frac{|u_\alpha|^{2_s^*}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2_s^*}} = 1 \text{ et } u_\alpha \rightarrow 0 \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty \text{ faiblement dans } H_1^2(M).$$

Regardons cette suite (u_α) au microscope au voisinage de x_0 et écrivons-la afin d'y voir plus clair.

6. $\forall x \in M$ et $\forall r < i_g(M)$ il existe une boule $B_r(x) \subset M$

Regardons cette suite (u_α) au microscope au voisinage de x_0 et écrasons-là afin d'y voir plus clair.

Pour ce faire, on pose, pour $X \in B_{\delta\mu_\alpha^{-1}}(0) \subset \mathbb{R}^n$, $\delta \in (0, \frac{i_g(M)}{2})$ où $i_g(M)$ ⁶ est le rayon d'injectivité de M ,

6. $\forall x \in M$ et $\forall r < i_g(M)$ il existe une boule $B_r(x) \subset M$

Regardons cette suite (u_α) au microscope au voisinage de x_0 et écrasons-là afin d'y voir plus clair.

Pour ce faire, on pose, pour $X \in B_{\delta\mu_\alpha^{-1}}(0) \subset \mathbb{R}^n$, $\delta \in (0, \frac{i_g(M)}{2})$ où $i_g(M)$ ⁶ est le rayon d'injectivité de M , on définit maintenant la métrique :

$$\tilde{g}_\alpha(X) := (\exp_{x_0}^* g)(\mu_\alpha X) \text{ dans } B_{\delta\mu_\alpha^{-1}}(0), \quad (9)$$

6. $\forall x \in M$ et $\forall r < i_g(M)$ il existe une boule $B_r(x) \subset M$

Regardons cette suite (u_α) au microscope au voisinage de x_0 et écrasons-là afin d'y voir plus clair.

Pour ce faire, on pose, pour $X \in B_{\delta\mu_\alpha^{-1}}(0) \subset \mathbb{R}^n$, $\delta \in (0, \frac{i_g(M)}{2})$ où $i_g(M)$ ⁶ est le rayon d'injectivité de M , on définit maintenant la métrique :

$$\tilde{g}_\alpha(X) := (\exp_{x_0}^* g)(\mu_\alpha X) \text{ dans } B_{\delta\mu_\alpha^{-1}}(0), \quad (9)$$

et

$$\tilde{u}_\alpha(X) := \mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}} u_\alpha(\exp_{x_0}(\mu_\alpha X)) \text{ pour tout } X \in B_{\delta\mu_\alpha^{-1}}(0) \subset \mathbb{R}^n, \quad (10)$$

avec $\exp_{x_0} : B_\delta(0) \rightarrow B_\delta(x_0) \subset M$ est l'application exponentielle en x_0 .

6. $\forall x \in M$ et $\forall r < i_g(M)$ il existe une boule $B_r(x) \subset M$

Regardons cette suite (u_α) au microscope au voisinage de x_0 et écrasons-là afin d'y voir plus clair.

Pour ce faire, on pose, pour $X \in B_{\delta\mu_\alpha^{-1}}(0) \subset \mathbb{R}^n$, $\delta \in (0, \frac{i_g(M)}{2})$ où $i_g(M)$ ⁶ est le rayon d'injectivité de M , on définit maintenant la métrique :

$$\tilde{g}_\alpha(X) := (\exp_{x_0}^* g)(\mu_\alpha X) \text{ dans } B_{\delta\mu_\alpha^{-1}}(0), \quad (9)$$

et

$$\tilde{u}_\alpha(X) := \mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}} u_\alpha(\exp_{x_0}(\mu_\alpha X)) \text{ pour tout } X \in B_{\delta\mu_\alpha^{-1}}(0) \subset \mathbb{R}^n, \quad (10)$$

avec $\exp_{x_0} : B_\delta(0) \rightarrow B_\delta(x_0) \subset M$ est l'application exponentielle en x_0 .

Passer dans la carte exponentielle permet de donner un sens au changement d'échelle effectué. Celui-ci est lié aux invariances de l'équation (E_α) .

6. $\forall x \in M$ et $\forall r < i_g(M)$ il existe une boule $B_r(x) \subset M$

On a $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \tilde{u}_\alpha = \overbrace{\left(\frac{K^{2-s}}{K^{2-s} + |X|^{2-s}} \right)^{\frac{n-2}{2-s}}}$ localement où :

$$\Delta_{Eucl} \tilde{u} = \mu_s(\mathbb{R}^n) \frac{\tilde{u}^{2_s^* - 1}}{|X|^s} \text{ dans } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

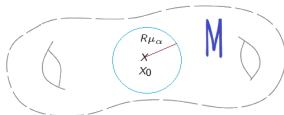
7. $K^{2-s} = (n-2)(n-s)\mu_s(\mathbb{R}^n)^{-1}$

On a $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \tilde{u}_\alpha = \overbrace{\left(\frac{K^{2-s}}{K^{2-s} + |X|^{2-s}} \right)^{\frac{n-2}{2-s}}}$ localement où :

$$\Delta_{Euc} \tilde{u} = \mu_s(\mathbb{R}^n) \frac{\tilde{u}^{2_s^*-1}}{|X|^s} \text{ dans } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Donc, pour tout $R > 0$, on a :

$$u_\alpha(x) \simeq \left(\frac{\mu_\alpha^{\frac{2-s}{2}}}{\mu_\alpha^{2-s} + d_g(x, x_0)^{2-s}} \right)^{\frac{n-2}{2-s}} \text{ dans } B_{R\mu_\alpha}(x_0).$$



7. $K^{2-s} = (n-2)(n-s)\mu_s(\mathbb{R}^n)^{-1}$

En effet, ce comportement asymptotique est valable **partout** :

Théorème (Cheikh Ali)

On considère $(u_\alpha)_\alpha \in H_1^2(M)$ vérifie (5) jusqu'à (7)⁸ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$.
Alors, il existe $C > 0$ tel que :

$$u_\alpha(x) \leq C \left(\frac{\mu_\alpha^{\frac{2-s}{2}}}{\mu_\alpha^{2-s} + d_g(x, x_0)^{2-s}} \right)^{\frac{n-2}{2-s}} \text{ pour tout } x \in M. \quad (12)$$

8.

(5) $a_\alpha \rightarrow a_\infty$ dans $C^1(M)$ et $\lambda_\alpha \rightarrow \mu_s(\mathbb{R}^n)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$.

(6) $\Delta_g u_\alpha + a_\alpha u_\alpha = \lambda_\alpha \frac{u_\alpha^{2^*_s-1}}{d_g(x, x_0)^s}$; $u_\alpha \geq 0$ dans M .

(7) $\left(\int_M \frac{|u_\alpha|^{2^*_s}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*_s}} = 1$ et $u_\alpha \rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ faiblement dans $H_1^2(M)$.

La masse est définie comme le suivant (**dimension $n = 3$**) :

Pour $h \in C^0(M)$, on définit la fonction de Green G_{x_0} associée à l'opérateur coercif $\Delta_g + h$ en x_0 :

$$\Delta_g G_{x_0} + h G_{x_0} = \delta_{x_0},$$

où δ_{x_0} est la masse de Dirac au point x_0 . Alors il existe $\beta_{x_0} \in H_1^2(M)$ tel que :

$$G_{x_0} = \frac{1}{4\pi} d_g(\cdot, x_0)^{-1} + \beta_{x_0} \text{ dans } M \setminus \{x_0\}. \quad (13)$$

De plus, on voit que $\beta_{x_0} \in H_2^p(M) \cap C^{0,\theta}(M) \cap C^{2,\gamma}(M \setminus \{x_0\})$ pour tout $p \in (\frac{3}{2}, 3)$ et $\theta, \gamma \in (0, 1)$. On définit la masse en x_0 comme $\mathbf{m}_h(x_0) := \beta_{x_0}(x_0)$.

On utilise l'identité de Pohozaev (voir plus tard) :

Théorème A (Cheikh Ali)

Soit $(u_\alpha)_\alpha \in H_1^2(M)$ tel que (5) à (7)⁹ ont lieu pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$.

- Si $n \geq 4$, alors $a_\infty(x_0) = \overbrace{\frac{(6-s)(n-2)}{12(2n-2-s)}}^{c_{n,s}} \text{Scal}_g(x_0)$,
- Si $n = 3$, alors $m_{a_\infty}(x_0) = 0$,

où $\text{Scal}_g(x_0)$ est la courbure scalaire en x_0 et $m_{a_\infty}(x_0)$ est la masse associée à l'opérateur $\Delta_g + a_\infty$ au point x_0 .

9.

(5) $a_\alpha \rightarrow a_\infty$ dans $C^1(M)$ et $\lambda_\alpha \rightarrow \mu_s(\mathbb{R}^n)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$.

(6) $\Delta_g u_\alpha + a_\alpha u_\alpha = \lambda_\alpha \frac{u_\alpha^{2^*_s-1}}{d_g(x, x_0)^s}$; $u_\alpha \geq 0$ dans M .

(7) $\left(\int_M \frac{|u_\alpha|^{2^*_s}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*_s}} = 1$ et $u_\alpha \rightarrow 0$ as $\alpha \rightarrow +\infty$ faiblement dans $H_1^2(M)$.

Comme un corollaire, on obtient :

Théorème B (Cheikh Ali)

On suppose qu'il n'existe pas d'extrémale pour (4)¹⁰. Alors :

- $B_s(g) = c_{n,s} \text{Scal}_g(x_0)$ si $n \geq 4$;
- la masse de $\Delta_g + B_s(g)$ s'annule en x_0 si $n = 3$.

10. C'est à dire pour tout $u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}$, on a que

$$\|u\|_{2_s^*}^2 < \mu_s(\mathbb{R}^n)^{-1} \left(\int_M |\nabla u|^2 dv_g + B_s(g) \int_M u^2 dv_g \right).$$

La preuve du théorème B

On suppose qu'il n'existe pas d'extrémale pour (4), c'est à dire pour tout $u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}$:

$$\|u\|_{2_s^*, s}^2 := \left(\int_M \frac{u^{2_s^*}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2_s^*}} < \mu_s(\mathbb{R}^n)^{-1} \left(\int_M |\nabla u|^2 dv_g + B_s(g) \int_M u^2 dv_g \right).$$

La preuve du théorème B

On suppose qu'il n'existe pas d'extrémale pour (4), c'est à dire pour tout $u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}$:

$$\|u\|_{2_s^*, s}^2 := \left(\int_M \frac{u^{2_s^*}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2_s^*}} < \mu_s(\mathbb{R}^n)^{-1} \left(\int_M |\nabla u|^2 dv_g + B_s(g) \int_M u^2 dv_g \right).$$

On définit $a_\alpha := B_s(g) - \frac{1}{\alpha} > 0$ pour tout $x \in M$ et $\alpha > 0$ large.

La preuve du théorème B

On suppose qu'il n'existe pas d'extrémale pour (4), c'est à dire pour tout $u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}$:

$$\|u\|_{2_s^*, s}^2 := \left(\int_M \frac{u^{2_s^*}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2_s^*}} < \mu_s(\mathbb{R}^n)^{-1} \left(\int_M |\nabla u|^2 dv_g + B_s(g) \int_M u^2 dv_g \right).$$

On définit $a_\alpha := B_s(g) - \frac{1}{\alpha} > 0$ pour tout $x \in M$ et $\alpha > 0$ large. On définit :

$$J_\alpha(u) = \frac{\int_M (|\nabla u|^2 + a_\alpha u^2) dv_g}{\|u\|_{2_s^*, s}^2} \text{ pour tout } u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}.$$

La preuve du théorème B

On suppose qu'il n'existe pas d'extrémale pour (4), c'est à dire pour tout $u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}$:

$$\|u\|_{2_s^*, s}^2 := \left(\int_M \frac{u^{2_s^*}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2_s^*}} < \mu_s(\mathbb{R}^n)^{-1} \left(\int_M |\nabla u|^2 dv_g + B_s(g) \int_M u^2 dv_g \right).$$

On définit $a_\alpha := B_s(g) - \frac{1}{\alpha} > 0$ pour tout $x \in M$ et $\alpha > 0$ large. On définit :

$$J_\alpha(u) = \frac{\int_M (|\nabla u|^2 + a_\alpha u^2) dv_g}{\|u\|_{2_s^*, s}^2} \text{ pour tout } u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}.$$

Avec la définition de $B_s(g)$, on voit que :

$$\inf_{u \in N_s(M)} J_\alpha(u) < \mu_s(\mathbb{R}^n) \text{ où } N_s(M) := \{u \in H_1^2(M), \|u\|_{2_s^*, s} = 1\}. \quad (14)$$

La preuve du théorème B

On suppose qu'il n'existe pas d'extrémale pour (4), c'est à dire pour tout $u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}$:

$$\|u\|_{2_s^*, s}^2 := \left(\int_M \frac{u^{2_s^*}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2_s^*}} < \mu_s(\mathbb{R}^n)^{-1} \left(\int_M |\nabla u|^2 dv_g + B_s(g) \int_M u^2 dv_g \right).$$

On définit $a_\alpha := B_s(g) - \frac{1}{\alpha} > 0$ pour tout $x \in M$ et $\alpha > 0$ large. On définit :

$$J_\alpha(u) = \frac{\int_M (|\nabla u|^2 + a_\alpha u^2) dv_g}{\|u\|_{2_s^*, s}^2} \text{ pour tout } u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}.$$

Avec la définition de $B_s(g)$, on voit que :

$$\inf_{u \in N_s(M)} J_\alpha(u) < \mu_s(\mathbb{R}^n) \text{ où } N_s(M) := \{u \in H_1^2(M), \|u\|_{2_s^*, s} = 1\}. \quad (14)$$

On prend $\lambda_\alpha := \inf_{u \in N_s(M)} J_\alpha(u)$.

La preuve du théorème B

On suppose qu'il n'existe pas d'extrémale pour (4), c'est à dire pour tout $u \in H_1^{2^*}(M) \setminus \{0\}$:

$$\|u\|_{2_s^*, s}^2 := \left(\int_M \frac{u^{2_s^*}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2_s^*}} < \mu_s(\mathbb{R}^n)^{-1} \left(\int_M |\nabla u|^2 dv_g + B_s(g) \int_M u^2 dv_g \right).$$

On définit $a_\alpha := B_s(g) - \frac{1}{\alpha} > 0$ pour tout $x \in M$ et $\alpha > 0$ large. On définit :

$$J_\alpha(u) = \frac{\int_M (|\nabla u|^2 + a_\alpha u^2) dv_g}{\|u\|_{2_s^*, s}^2} \text{ pour tout } u \in H_1^{2^*}(M) \setminus \{0\}.$$

Avec la définition de $B_s(g)$, on voit que :

$$\inf_{u \in N_s(M)} J_\alpha(u) < \mu_s(\mathbb{R}^n) \text{ où } N_s(M) := \{u \in H_1^{2^*}(M), \|u\|_{2_s^*, s} = 1\}. \quad (14)$$

On prend $\lambda_\alpha := \inf_{u \in N_s(M)} J_\alpha(u)$. L'hypothèse (14) et les arguments classiques (voir Jaber) donnent l'existence d'un minimiseur $u_\alpha \in N_s(M)$ non négative pour λ_α . Alors, l'équation d'Euler-Lagrange pour u_α est :

$$\Delta_g u_\alpha + a_\alpha u_\alpha = \lambda_\alpha \frac{u_\alpha^{2_s^* - 1}}{d_g(x, x_0)^s} \text{ dans } H_1^{2^*}(M).$$

Après quelques calculs...

Proposition

On démontre que :

$u_\alpha \rightarrow 0$ faiblement dans $H_1^2(M)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$.

$\lambda_\alpha \rightarrow \mu_s(\mathbb{R}^n)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$.

11.

(5) $a_\alpha \rightarrow a_\infty = B_s(g)$ dans $C^1(M)$ et $\lambda_\alpha \rightarrow \mu_s(\mathbb{R}^n)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$.

(6) $\Delta_g u_\alpha + a_\alpha u_\alpha = \lambda_\alpha \frac{u_\alpha^{2^*_s - 1}}{d_g(x, x_0)^s}$; $u_\alpha \geq 0$ dans M .

(7) $\left(\int_M \frac{|u_\alpha|^{2^*_s}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*_s}} = 1$ et $u_\alpha \rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ faiblement dans $H_1^2(M)$.

Après quelques calculs...

Proposition

On démontre que :

$u_\alpha \rightarrow 0$ faiblement dans $H_1^2(M)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$.

$\lambda_\alpha \rightarrow \mu_s(\mathbb{R}^n)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$.

Puisque u_α ci-dessus satisfait les hypothèses¹¹ du Théorème A :

$$\begin{cases} B_s(g) = c_{n,s} \text{Scal}_g(x_0) & \text{si } n \geq 4; \\ m_{B_s(g)}(x_0) = 0 & \text{si } n = 3. \end{cases}$$

11.

(5) $a_\alpha \rightarrow a_\infty = B_s(g)$ dans $C^1(M)$ et $\lambda_\alpha \rightarrow \mu_s(\mathbb{R}^n)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$.

(6) $\Delta_g u_\alpha + a_\alpha u_\alpha = \lambda_\alpha \frac{u_\alpha^{2^*_s - 1}}{d_g(x, x_0)^s}$; $u_\alpha \geq 0$ dans M .

(7) $\left(\int_M \frac{|u_\alpha|^{2^*_s}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*_s}} = 1$ et $u_\alpha \rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ faiblement dans $H_1^2(M)$.

Le théorème de "Blow-up" : preuve du théorème A

On considère $(u_\alpha)_\alpha \in H_1^2(M)$ tel que (5) à (7)¹² ont lieu pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$.

12.

(5) $a_\alpha \rightarrow a_\infty$ dans $C^1(M)$ et $\lambda_\alpha \rightarrow \mu_s(\mathbb{R}^n)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$.

(6) $\Delta_g u_\alpha + a_\alpha u_\alpha = \lambda_\alpha \frac{|u_\alpha|^{2^*_s-1}}{d_g(x, x_0)^s}$; $u_\alpha \geq 0$ dans M .

(7) $\left(\int_M \frac{|u_\alpha|^{2^*_s}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{1}{2^*_s}} = 1$ et $u_\alpha \rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ faiblement dans $H_1^2(M)$.

On prend $\delta \in (0, \frac{i_g(M)}{2})$ et $i_g(M) > 0$, on définit la fonction suivante :

$$\hat{u}_\alpha(X) := u_\alpha(\exp_{x_0}(X)) \text{ pour tout } X \in B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n, \quad (15)$$

où $\exp_{x_0} : B_\delta(0) \rightarrow B_\delta(x_0) \subset M$ est l'application exponentielle en x_0 . On définit encore la métrique :

$$\hat{g}(X) := (\exp_{x_0}^* g)(X) \text{ sur } \mathbb{R}^n.$$

13.

$$(6) \quad \Delta_g u_\alpha + a_\alpha u_\alpha = \lambda_\alpha \frac{u_\alpha^{2_s^* - 1}}{d_g(x, x_0)^s}; \quad u_\alpha \geq 0 \text{ dans } M.$$

On prend $\delta \in (0, \frac{i_g(M)}{2})$ et $i_g(M) > 0$, on définit la fonction suivante :

$$\hat{u}_\alpha(X) := u_\alpha(\exp_{x_0}(X)) \text{ pour tout } X \in B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n, \quad (15)$$

où $\exp_{x_0} : B_\delta(0) \rightarrow B_\delta(x_0) \subset M$ est l'application exponentielle en x_0 . On définit encore la métrique :

$$\hat{g}(X) := (\exp_{x_0}^* g)(X) \text{ sur } \mathbb{R}^n.$$

D'après l'équation (6)¹³, on a :

$$\Delta_{\hat{g}} \hat{u}_\alpha + \hat{a}_\alpha \hat{u}_\alpha = \lambda_\alpha \frac{\hat{u}_\alpha^{2^*_s - 1}}{|X|^s} \text{ faiblement dans } B_\delta(0), \quad (16)$$

où $\hat{a}_\alpha(X) = a_\alpha(\exp_{x_0}(X))$.

13.

(6) $\Delta_g u_\alpha + a_\alpha u_\alpha = \lambda_\alpha \frac{u_\alpha^{2^*_s - 1}}{d_g(x, x_0)^s}$; $u_\alpha \geq 0$ dans M .

Pour $1 \leq l \leq n$, on peut s'écrire l'identité de Pohozaev (existe pour toutes les fonctions!) comme :

$$\int_{B_\delta(0)} \overbrace{\left(X^l \partial_l \hat{u}_\alpha + \frac{n-2}{2} \hat{u}_\alpha \right)}^{\varphi_\alpha(X)} \left(\Delta_{Eucl} \hat{u}_\alpha - \lambda_\alpha \frac{\hat{u}_\alpha^{2^*_s-1}}{|X|^s} \right) dX$$

$$= \int_{\partial B_\delta(0)} \left[(X, \nu) \left(\frac{|\nabla \hat{u}_\alpha|^2}{2} - \frac{\lambda_\alpha}{2^*_s} \frac{\hat{u}_\alpha^{2^*_s}}{|X|^s} \right) - \overbrace{\left(X^l \partial_l \hat{u}_\alpha + \frac{n-2}{2} \hat{u}_\alpha \right)}^{\varphi_\alpha(X)} \partial_\nu \hat{u}_\alpha \right] d\sigma,$$

où $\nu(X)$ désigne le champ de vecteurs normal extérieur sur $B_\delta(0)$ en $X \in \partial B_\delta(0)$.

$$\begin{aligned} & \int_{B_{\delta}(0)} \varphi_{\alpha}(X) \left(\Delta_{\hat{g}} \hat{u}_{\alpha} - \lambda_{\alpha} \frac{\hat{u}_{\alpha}^{2_s^* - 1}}{|X|^s} - (\Delta_{\hat{g}} - \Delta_{Eucl}) \hat{u}_{\alpha} \right) dX \\ &= \int_{\partial B_{\delta}(0)} \left[(X, \nu) \left(\frac{|\nabla \hat{u}_{\alpha}|^2}{2} - \frac{\lambda_{\alpha}}{2_s^*} \frac{\hat{u}_{\alpha}^{2_s^*}}{|X|^s} \right) - \varphi_{\alpha}(X) \partial_{\nu} \hat{u}_{\alpha} \right] d\sigma. \end{aligned}$$

$$14. \Delta_{\hat{g}} \hat{u}_{\alpha} + \hat{a}_{\alpha} \hat{u}_{\alpha} = \lambda_{\alpha} \frac{\hat{u}_{\alpha}^{2_s^* - 1}}{|X|^s}$$

$$\begin{aligned} & \int_{B_\delta(0)} \varphi_\alpha(X) \left(\Delta_{\hat{g}} \hat{u}_\alpha - \lambda_\alpha \frac{\hat{u}_\alpha^{2_s^*-1}}{|X|^s} - (\Delta_{\hat{g}} - \Delta_{Eucl}) \hat{u}_\alpha \right) dX \\ &= \int_{\partial B_\delta(0)} \left[(X, \nu) \left(\frac{|\nabla \hat{u}_\alpha|^2}{2} - \frac{\lambda_\alpha \hat{u}_\alpha^{2_s^*}}{2_s^* |X|^s} \right) - \varphi_\alpha(X) \partial_\nu \hat{u}_\alpha \right] d\sigma. \end{aligned}$$

Avec (16)¹⁴ et l'identité de Pohozaev, on a :

$$\begin{aligned} & \underbrace{- \int_{B_\delta(0)} \varphi_\alpha(X) \hat{a}_\alpha \hat{u}_\alpha dX}_{C_\alpha} - \underbrace{\int_{B_\delta(0)} \varphi_\alpha(X) (\Delta_{\hat{g}} - \Delta_{Eucl}) \hat{u}_\alpha dX}_{D_\alpha} \\ &= \underbrace{\int_{\partial B_\delta(0)} (X, \nu) \left(\frac{|\nabla \hat{u}_\alpha|^2}{2} - \frac{\lambda_\alpha \hat{u}_\alpha^{2_s^*}}{2_s^* |X|^s} \right) - \varphi_\alpha(X) \partial_\nu \hat{u}_\alpha d\sigma}_{B_\alpha} \end{aligned} \quad (17)$$

14. $\Delta_{\hat{g}} \hat{u}_\alpha + \hat{a}_\alpha \hat{u}_\alpha = \lambda_\alpha \frac{\hat{u}_\alpha^{2_s^*-1}}{|X|^s}$

On rappelle que $\mu_\alpha^{-\frac{n-2}{2}} = \max_M u_\alpha$.

On rappelle que $\mu_\alpha^{-\frac{n-2}{2}} = \max_M u_\alpha$. On définit maintenant la métrique :

$$\tilde{g}_\alpha(X) := (\exp_{x_0}^* g)(\mu_\alpha X) \text{ dans } B_{\delta\mu_\alpha^{-1}}(0), \quad (18)$$

et la fonction :

$$\tilde{u}_\alpha(X) := \mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}} u_\alpha(\exp_{x_0}(\mu_\alpha X)) \text{ pour tout } X \in B_{\delta\mu_\alpha^{-1}}(0) \subset \mathbb{R}^n. \quad (19)$$

Proposition 1

Pour tout $R > 0$, il existe $C > 0$ tel que :

$$\tilde{u}_\alpha(X) \leq C \left(\frac{1}{1 + |X|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \text{ dans } B_{\delta\mu_\alpha^{-1}}(0); \quad (20)$$

$$|\nabla \tilde{u}_\alpha(X)| \leq C \frac{1}{(1 + |X|^2)^{\frac{n-1}{2}}} \text{ dans } B_{\delta\mu_\alpha^{-1}}(0) \setminus B_R(0); \quad (21)$$

$$\tilde{u}_\alpha \rightarrow \tilde{u}^{15} \text{ in } H_1^2(B_R(0)) \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty. \quad (22)$$

Note : on voit que $X \mapsto (1 + |X|^2)^{-\frac{n-2}{2}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ lorsque $n \geq 5$.

15.

$$\tilde{u}(X) = \left(\frac{K^{2-s}}{K^{2-s} + |X|^{2-s}} \right)^{\frac{n-2}{2-s}} \text{ pour tout } X \in \mathbb{R}^n; K^{2-s} = (n-2)(n-s)\mu_s(\mathbb{R}^n)^{-1}.$$

Proposition 2

Pour $n \geq 5$, on utilise l'équation (5)¹⁶ et la **Proposition 2**, on obtient que :

$$C_\alpha^{17} = \mu_\alpha^2 \left(a_\infty(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}^2 dX + o(1) \right)$$

quand $\alpha \rightarrow +\infty$.

16.

$a_\alpha \rightarrow a_\infty$ dans $C^1(M)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$.

17.

$$C_\alpha := - \int_{B_\delta(0)} \varphi_\alpha(X) \hat{a}_\alpha \hat{u}_\alpha dX.$$

Pour $i, j, k = 1, \dots, n$, on rappelle que¹⁸ :

$$-(\Delta_{\hat{g}} - \Delta_{Eucl}) = (\hat{g}^{ij} - \delta^{ij}) \partial_{ij} - \hat{g}^{ij} \hat{\Gamma}_{ij}^k \partial_k, \tag{23}$$

où $\hat{\Gamma}_{ij}^k$ ¹⁹ désignent les symboles de Christoffel.

18.

\hat{g}^{ij} est la matrice inverse de \hat{g}_{ij} .

19.

$$\text{Pour } p = 1, \dots, n, \hat{\Gamma}_{ij}^k := \frac{1}{2} \hat{g}^{kp} (\partial_i \hat{g}_{jp} + \partial_j \hat{g}_{ip} - \partial_p \hat{g}_{ij}).$$

20.

$a_\alpha \rightarrow a_\infty$ dans $C^1(M)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$

21.

$$D_\alpha := - \int_{B_\delta(0)} \varphi_\alpha(X) (\Delta_{\hat{g}} - \Delta_{Eucl}) \hat{u}_\alpha dX.$$

Pour $i, j, k = 1, \dots, n$, on rappelle que¹⁸ :

$$-(\Delta_{\hat{g}} - \Delta_{Eucl}) = (\hat{g}^{ij} - \delta^{ij}) \partial_{ij} - \hat{g}^{ij} \hat{\Gamma}_{ij}^k \partial_k, \tag{23}$$

où $\hat{\Gamma}_{ij}^k$ ¹⁹ désignent les symboles de Christoffel.

Après plusieurs pages de calculs..., on estime la variation de (23)...

18.

\hat{g}^{ij} est la matrice inverse de \hat{g}_{ij} .

19.

$$\text{Pour } p = 1, \dots, n, \hat{\Gamma}_{ij}^k := \frac{1}{2} \hat{g}^{kp} (\partial_i \hat{g}_{jp} + \partial_j \hat{g}_{ip} - \partial_p \hat{g}_{ij}).$$

20.

$a_\alpha \rightarrow a_\infty$ dans $C^1(M)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$

21.

$$D_\alpha := - \int_{B_\delta(0)} \varphi_\alpha(X) (\Delta_{\hat{g}} - \Delta_{Eucl}) \hat{u}_\alpha dX.$$

Pour $i, j, k = 1, \dots, n$, on rappelle que¹⁸ :

$$-(\Delta_{\hat{g}} - \Delta_{Eucl}) = (\hat{g}^{ij} - \delta^{ij}) \partial_{ij} - \hat{g}^{ij} \hat{\Gamma}_{ij}^k \partial_k, \tag{23}$$

où $\hat{\Gamma}_{ij}^k$ ¹⁹ désignent les symboles de Christoffel.

Après plusieurs pages de calculs..., on estime la variation de (23)... Et, d'après (5)²⁰ et la **Proposition 1**, on obtient que :

$$D_\alpha^{21} = \mu_\alpha^2 \underbrace{\left(-\frac{(6-s)(n-2)}{12(2n-2-s)} \text{Scal}_g(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}^2 dX + o(1) \right)}_{c_{n,s}} \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty.$$

18.

\hat{g}^{ij} est la matrice inverse de \hat{g}_{ij} .

19.

Pour $p = 1, \dots, n$, $\hat{\Gamma}_{ij}^k := \frac{1}{2} \hat{g}^{kp} (\partial_i \hat{g}_{jp} + \partial_j \hat{g}_{ip} - \partial_p \hat{g}_{ij})$.

20.

$a_\alpha \rightarrow a_\infty$ dans $C^1(M)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$

21.

$$D_\alpha := - \int_{B_\delta(0)} \varphi_\alpha(X) (\Delta_{\hat{g}} - \Delta_{Eucl}) \hat{u}_\alpha dX.$$

Résultat (Voir Cheikh Ali) : si $n \geq 5$, on utilise encore les **Propositions 1 et 2**, on obtient :

$$[a_\infty(x_0) - c(n, s) \text{Scal}_g(x_0)] \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}^2 dX^{22} = O(\mu_\alpha^{n-4})^{23} = o(1),$$

avec $o(1) \rightarrow 0$ lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$. On prend $\alpha \rightarrow +\infty$, alors on voit que $a_\infty(x_0) = c(n, s) \text{Scal}_g(x_0)$.

22.

$$C_\alpha + D_\alpha = \mu_\alpha^2 (a_\infty(x_0) - c(n, s) \text{Scal}_g(x_0)) \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}^2 dX.$$

23.

$$B_\alpha = O(\mu_\alpha^{n-2}).$$

Résultat (Voir Cheikh Ali) : si $n \geq 5$, on utilise encore les **Propositions 1 et 2**, on obtient :

$$[a_\infty(x_0) - c(n, s) \text{Scal}_g(x_0)] \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}^2 dX^{22} = O(\mu_\alpha^{n-4})^{23} = o(1),$$

avec $o(1) \rightarrow 0$ lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$. On prend $\alpha \rightarrow +\infty$, alors on voit que $a_\infty(x_0) = c(n, s) \text{Scal}_g(x_0)$.

Le résultat du cas $n = 4$ est lié encore à la courbure scalaire.

22.

$$C_\alpha + D_\alpha = \mu_\alpha^2 (a_\infty(x_0) - c(n, s) \text{Scal}_g(x_0)) \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}^2 dX.$$

23.

$$B_\alpha = O(\mu_\alpha^{n-2}).$$

Résultat (Voir Cheikh Ali) : si $n \geq 5$, on utilise encore les **Propositions 1 et 2**, on obtient :

$$[a_\infty(x_0) - c(n, s)Scal_g(x_0)] \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}^2 dX^{22} = O(\mu_\alpha^{n-4})^{23} = o(1),$$

avec $o(1) \rightarrow 0$ lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$. On prend $\alpha \rightarrow +\infty$, alors on voit que $a_\infty(x_0) = c(n, s)Scal_g(x_0)$.

Le résultat du cas $n = 4$ est lié encore à la courbure scalaire.

Le cas de la petite dimension $n = 3$ est lié à la notion masse.

Notre présentation s'arrête ici !

22.

$$C_\alpha + D_\alpha = \mu_\alpha^2 (a_\infty(x_0) - c(n, s)Scal_g(x_0)) \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}^2 dX.$$

23.

$$B_\alpha = O(\mu_\alpha^{n-2}).$$

Merci de votre attention !