

SÉPARATION DES VARIABLES POUR LE CALCUL DES CORRÉLATEURS

Fedor Levkovich-Maslyuk

Institut de Physique Théorique, CEA Saclay



basé sur

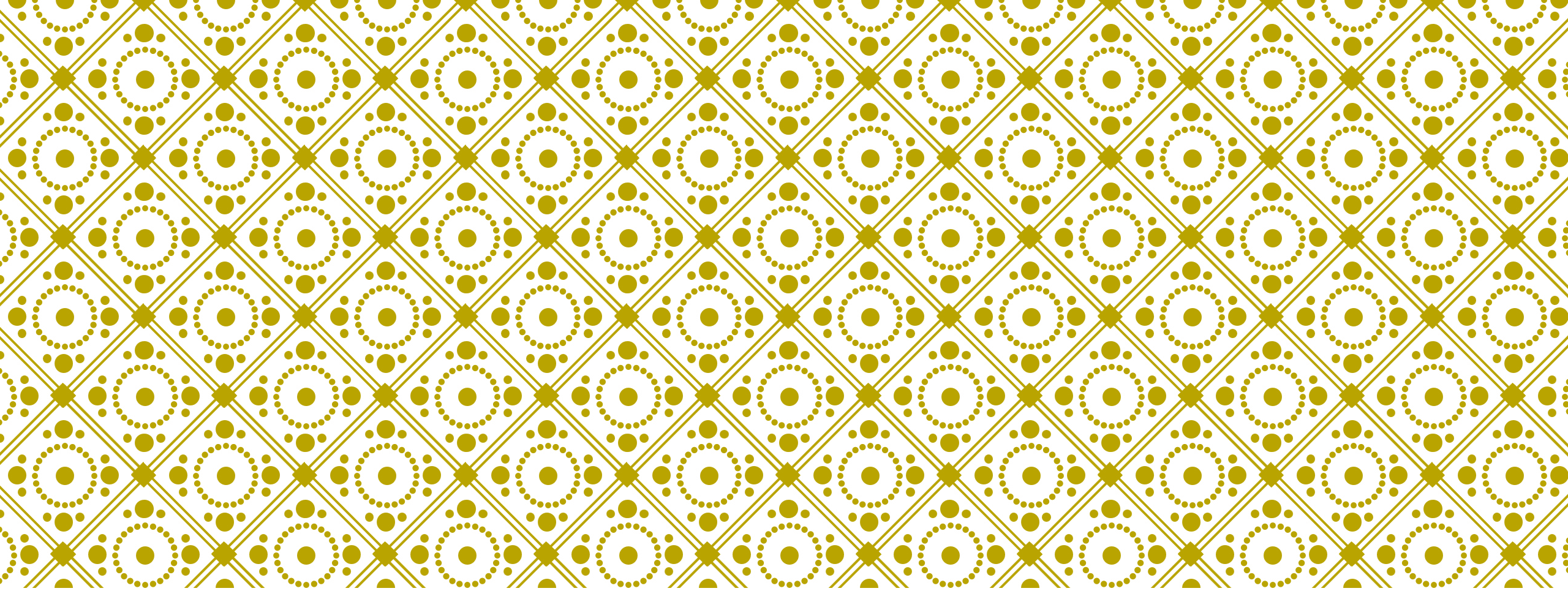
2103.15800 [[Cavaglia, Gromov, FLM](#)]

2011.08229 [[Gromov, FLM, Ryan](#)]

2003.05811 [[FLM, Preti](#)]

1910.13442 [[Gromov, FLM, Ryan, Volin](#)]

1907.03788 [[Cavaglia, Gromov, FLM](#)]



MOTIVATION |

N=4 super Yang-Mills / cordes sur AdS5 x S5 est une théorie intégrable

Pour la solution complète de N=4 SYM on a besoin de:

1) Le spectre exact

$$\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y) \rangle = \frac{1}{|x-y|^{2\Delta}}$$

$$\mathcal{O}(x) = \text{Tr}(\Phi_1\Phi_2\Phi_3\dots)(x)$$

Bien compris

2) Les fonctions 3pt exactes

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3) \rangle = \frac{C_{123}}{|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}|x_1-x_3|^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2}|x_2-x_3|^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}}$$

Un problème clé

La solution pour le spectre

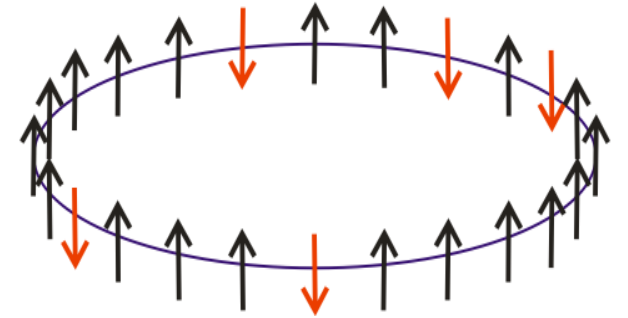
Couplage faible:

opérateurs single trace

$$\text{Tr}(\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_2(x)\Phi_1(x)\dots)$$



chaînes de spin intégrables



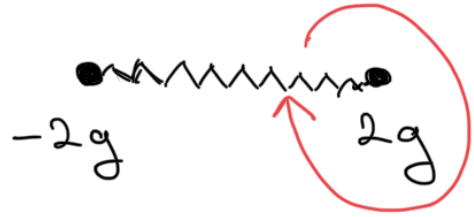
Couplage fini:

Quantum Spectral Curve [Gromov, Kazakov, Leurent, Volin 13]

Relations algébriques pour des fonctions $Q(u)$

+ conditions analytiques

\mathbb{C}



$$g = \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi}$$

$$Q_A(u) \rightarrow Q^A(u)$$

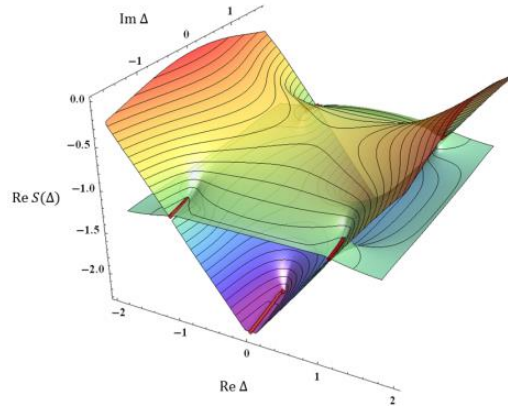
$$Q(u) \sim u^\Delta$$

Quantum Spectral Curve

Grand ensemble des résultats pour le spectre

Numerique à couplage fini

[Gromov, FLM, Sizov 15]



$$\begin{aligned} \frac{1}{256} F_3 = & -\frac{5S_{-5}}{8} - \frac{S_{-4,1}}{2} + \frac{S_1 S_{-3,1}}{2} + \frac{S_{-3,2}}{2} - \frac{5S_2 S_{-2,1}}{4} \\ & + \frac{S_{-4} S_1}{4} + \frac{S_{-3} S_2}{8} + \frac{3S_{3,-2}}{4} - \frac{3S_{-3,1,1}}{2} - S_1 S_{-2,1,1} \\ & + S_{2,-2,1} + 3S_{-2,1,1,1} - \frac{3S_{-2} S_3}{4} - \frac{S_5}{8} + \frac{S_{-2} S_1 S_2}{4} \\ & + \pi^2 \left[\frac{S_{-2,1}}{8} - \frac{7S_{-3}}{48} - \frac{S_{-2} S_1}{12} + \frac{S_1 S_2}{48} \right] \\ & + \zeta_3 \left[-\frac{7S_{-1,1}}{4} + \frac{7S_{-2}}{8} + \frac{7S_{-1} S_1}{4} - \frac{S_2}{16} \right] \\ & + \left[2\text{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi^2 \log^2 2}{12} + \frac{\log^4 2}{12} \right] (S_{-1} - S_1) - \pi^4 \left[\frac{2S_{-1}}{45} - \frac{S_1}{96} \right] \\ & + \frac{\log^5 2}{60} - \frac{\pi^2 \log^3 2}{36} - \frac{2\pi^4 \log 2}{45} - \frac{\pi^2 \zeta_3}{24} + \frac{49\zeta_5}{32} - 2\text{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

BFKL limit

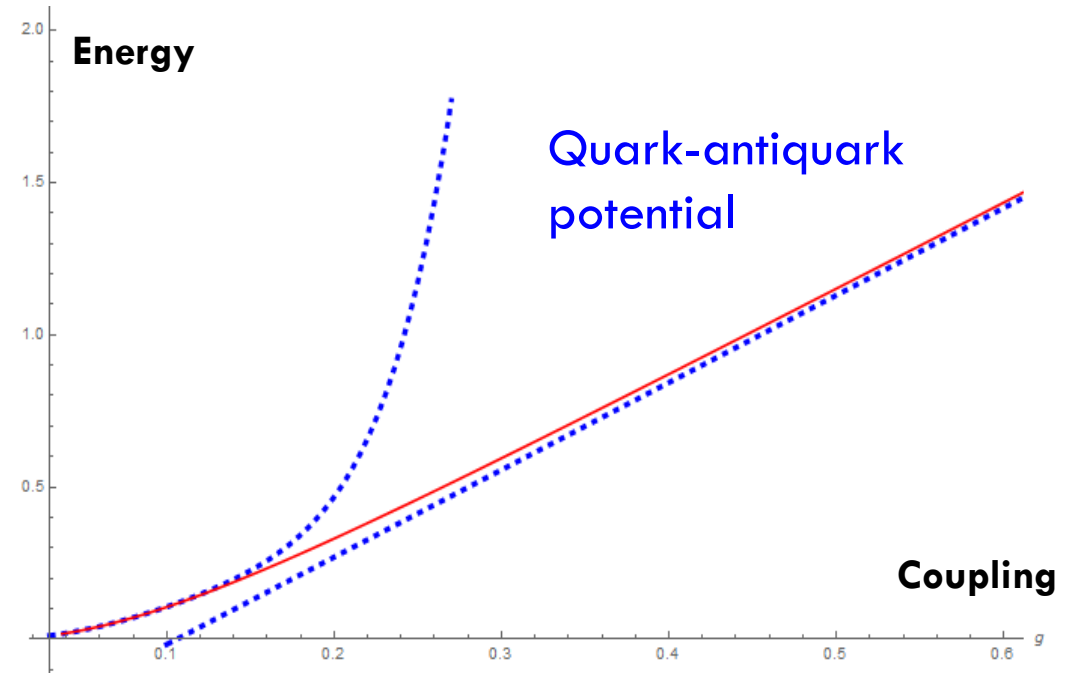
[Alfimov, Gromov, Kazakov 14]

[Gromov, FLM, Sizov 15]

Perturbativement
10+ ordres

$$\Delta = 4 + 12g^2 - 48g^4 + 336g^6 + \dots + \#g^{20} + \mathcal{O}(g^{22})$$

[Marboe, Volin]



Quark-antiquark
potential

[Gromov, FLM 16]

... et beaucoup
d'autres

Quantum Spectral Curve

Deformation de N=4 SYM

sans supersymmetrie mais soluble!

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = N_c g^2 \text{tr} \left(\frac{1}{4} \{ \phi_i^\dagger, \phi^i \} \{ \phi_j^\dagger, \phi^j \} - e^{-i\epsilon^{ijk} \gamma_k} \phi_i^\dagger \phi_j^\dagger \phi^i \phi^j \right)$$

$$\Delta = 2$$

$$+ 8i \sin \frac{\gamma_1}{2} \sin \frac{\gamma_2}{2} g^2 \quad \text{des effets } 1/N$$

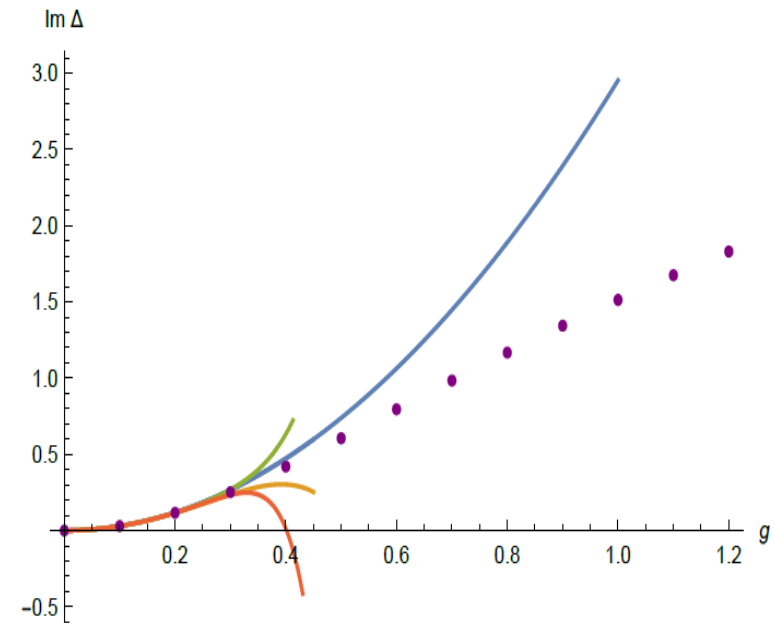
$$+ 0 \times g^4$$

$$+ \left[48i\zeta(3) \sin \frac{\gamma_1}{2} \sin \frac{\gamma_2}{2} (\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2 - 2) - 64i \sin^3 \frac{\gamma_1}{2} \sin^3 \frac{\gamma_2}{2} \right] g^6$$

$$+ \left[1024i\zeta(3) \sin^3 \frac{\gamma_1}{2} \sin^3 \frac{\gamma_2}{2} - 640i\zeta(5) \sin \frac{\gamma_1}{2} \sin \frac{\gamma_2}{2} (\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2 - 2) \right] g^8$$

$$+ \dots$$

[FLM, Preti 20]



Le spectre est connu

Comment calculer les fonctions a 3pt ???

L'idée : utiliser la **séparation des variables (SoV)**

[Sklyanin]

Dans chaque systeme integrable les **fonctions d'onde** devront factoriser dans une base spéciale

$$\langle x | \Psi \rangle \sim Q(x_1)Q(x_2) \dots Q(x_N)$$

Comme pour l'atom de hydrogene

$$\Psi = F_1(r)F_2(\theta)F_3(\varphi)$$

Q's doivent être donnés par le Quantum Spectral Curve a tous couplages!

Des résultats prometteurs pour des corrélateurs déjà

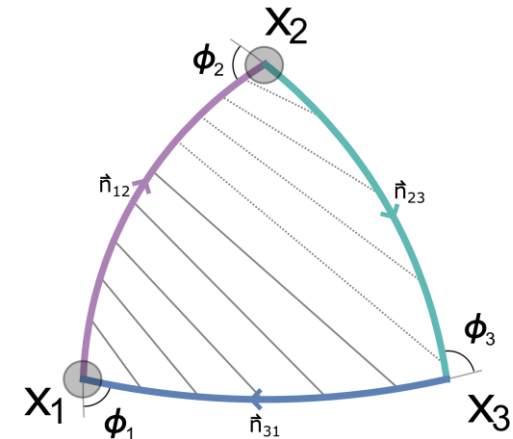
[Cavaglia, Gromov, FLM 18]

See also

[Giombi, Komatsu [18-20]

$$C_{123} = \frac{\langle Q_1 Q_2 Q_3 \rangle}{\sqrt{\langle Q_1^2 \rangle \langle Q_2^2 \rangle \langle Q_3^2 \rangle}}$$

$$\langle f \rangle := \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{du}{2\pi i u} f(u), \quad c > 0$$



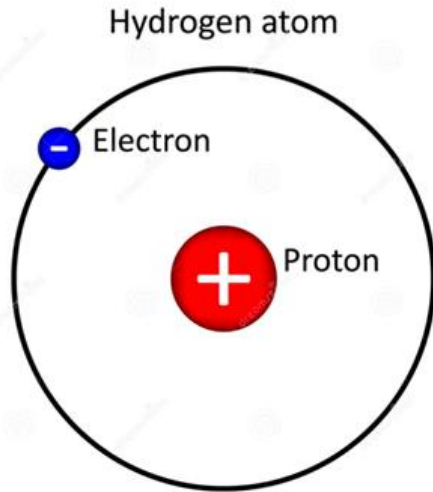
SoV doit être très puissant

Mais presque pas développe au-delà de $GL(2)$
jusqu'à récemment

On doit comprendre et développer le SoV

Le sujet principal de cet exposé :
SoV pour les chaines de spins GL(N)

pour SYM on a besoin
de PSU(2,2 | 4)



$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R(r)P(\theta)F(\phi)$$

$$\langle \Psi_{nlm} | \Psi_{n'l'm'} \rangle = \int dr d\phi d\theta r^2 \sin^2 \theta \Psi_{nlm}^* \Psi_{n'l'm'} = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \delta_{ll'}$$

La mesure

La fonction
d'onde dual

La fonction
d'onde

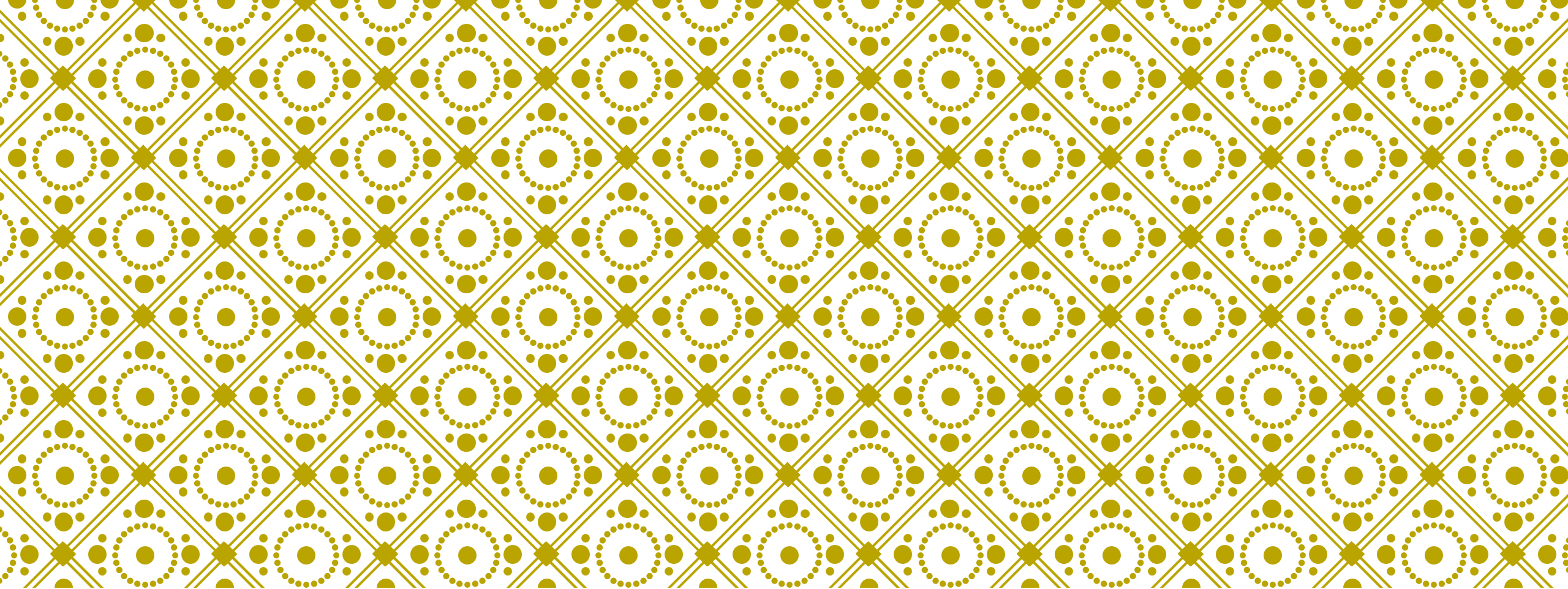
Deux questions principaux:

- 1) Comment factoriser les **fonctions d'ondes**?
- 2) Quel est la **mesure**?

On repondra
tous les deux

Plan

- La construction de la base SoV
- Le calcul de la mesure
- Des extensions à des théories des champs



LA BASE SOV

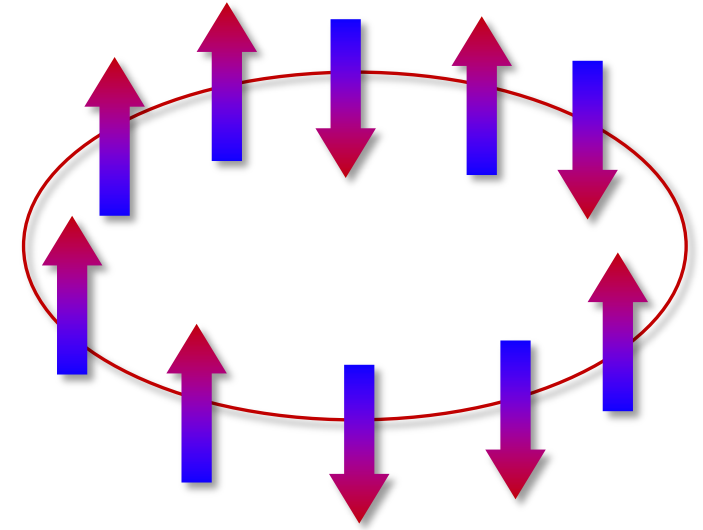
Chaînes de spin SU(N)

Espace de Hilbert pour L sites

$$H = \sum_{n=1}^L (1 - P_{n,n+1})$$

(+ termes à frontières, twist)

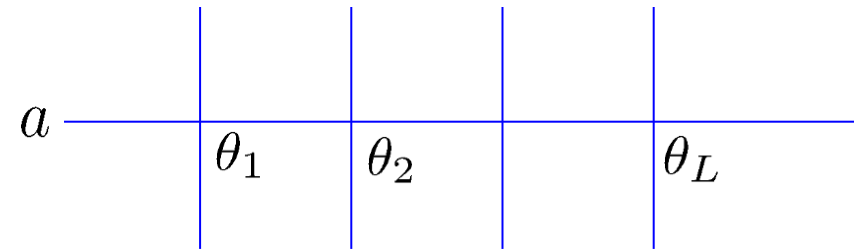
$$\underbrace{\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^N}_{L \text{ fois}}$$



La matrice de monodromie:

$$T(u) = R_{a1}(u - \theta_1) \dots R_{aL}(u - \theta_L)g$$

$$R_{12}(u) = (u - \frac{i}{2}) + iP_{12}$$

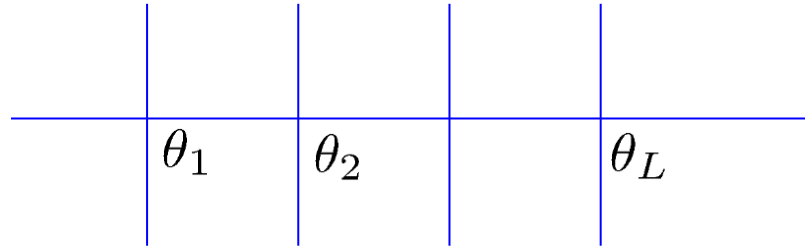


On prend les inhomogénéités θ_n et le twist générique $g = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$

La matrice transfer $\text{Tr}_a T(u) = \sum_{n=0}^L T_n u^n$ donne les intégrales de mouvement qui commutent

Les fonctions d'onde – SU(2)

$$T(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}$$



On veut diagonaliser

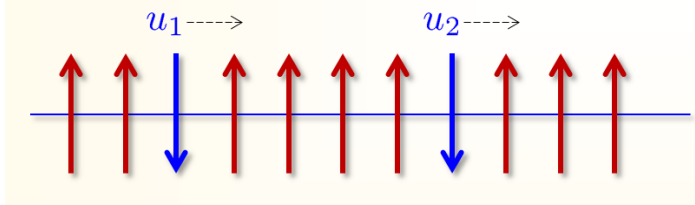
$$\tau_1(u) = \text{tr } T(u) = A(u) + D(u)$$

Les états sont créés par l'opérateur $B(u)$

$$|\Psi\rangle = B(u_1)B(u_2)\dots B(u_M)|0\rangle$$



racines de Bethe



Fixées par
$$\prod_{n=1}^L \frac{u_j - \theta_n + i/2}{u_j - \theta_n - i/2} = e^{2i\phi} \prod_{k \neq j}^L \frac{u_j - u_k + i}{u_j - u_k - i}$$

Ou par l'équation de Baxter
$$Q_\theta^- Q_1^{++} + Q_\theta^+ Q_1^{--} - \tau_1 Q_1 = 0$$

Impose τ_1, Q_1 sont **polynomial** \rightarrow les fixer

$$Q_1 = e^{u\phi} \prod_{k=1}^M (u - u_k)$$

$$Q_\theta = \prod_{n=1}^L (u - \theta_n)$$

$$f^\pm = f(u \pm i/2), \quad f^{[a]} = f(u + ia/2)$$

Cas SU(2)

[Sklyanin 90-92]

$$|\Psi\rangle = B(u_1)B(u_2)\dots B(u_M)|0\rangle$$

Considérons $\langle x| =$ états propres de $B(u) = \prod_{k=1}^L (u - x_k)$ $[B(u), B(v)] = 0$

Les fonctions d'onde se factorisent! $\langle x|\Psi\rangle = \prod_k Q_1(x_k)$

La preuve: $\langle \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_L | \Psi \rangle = \prod_{k=1}^L \prod_{j=1}^M (u_j - \mathbf{x}_k) = \prod_{k=1}^L Q_1(\mathbf{x}_k)$

$$Q_1 = e^{\phi_1 u} \prod_{j=1}^{N_u} (u - u_j)$$

$\mathbf{x}_k = \theta_k \pm i/2, \quad k = 1, \dots, L$ Donne 2^L états, donc une base de l'espace – la base SoV

En pratique on a besoin d'une petit modification $T \rightarrow T^{\text{good}} = KTK^{-1}$ $B \rightarrow B^{\text{good}}$

Garde tous les propriétés bons!

[Gromov, FLM, Sizov 16]

[Belliard, Slavnov 18]

see also [Sklyanin 90]

Cas SU(3)

La proposition de Sklyanin $B(u) = T_{13}(u)T_{12|13}(u - i) + T_{23}(u)T_{12|23}(u - i)$ [Sklyanin 92]

$$T_{j_1 j_2 | k_1 k_2}(u) = \begin{vmatrix} T_{j_1 k_1}(u) & T_{j_1 k_2}(u + i) \\ T_{j_2 k_1}(u) & T_{j_2 k_2}(u + i) \end{vmatrix} \quad \text{sont des minors quantiques}$$

Comme pour SU(2) il crée des états!
[Gromov, FLM, Sizov 16]

$$|\Psi\rangle = B^{\text{good}}(u_1) \dots B^{\text{good}}(u_M)|0\rangle$$

$$\begin{aligned} T &\rightarrow T^{\text{good}} = KTK^{-1} \\ B &\rightarrow B^{\text{good}} \end{aligned}$$

Pas de nesting, beaucoup plus simple que le BA habituel

$$|\Psi\rangle = \sum_{a_i=2,3} F^{a_1 a_2 \dots a_M} T_{1a_1}(u_1) T_{1a_2}(u_2) \dots T_{1a_M}(u_M) |0\rangle$$

Kulish, Reshetikhin 83

Fonction d'onde
pour une chaîne SU(2) auxiliaire

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^L \frac{u_j - \theta_n + i/2}{u_j - \theta_n - i/2} &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \prod_{k \neq j}^M \frac{u_j - u_k + i}{u_j - u_k - i} \prod_{k=1}^R \frac{u_j - v_k - i/2}{u_j - v_k + i/2}, \\ \prod_{n=1}^M \frac{v_j - u_n + i/2}{v_j - u_n - i/2} &= \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \prod_{k \neq j}^R \frac{v_j - v_k + i}{v_j - v_k - i}. \end{aligned}$$

La factorisation des états suit

$$\langle \mathbf{x} | \Psi \rangle = \prod_k Q_1(\mathbf{x}_k) \quad Q_1 = e^{\phi_1 u} \prod_{j=1}^{N_u} (u - u_j)$$

Tous ça s'étend à SU(N)

Cas SU(N)

L'opérateur B est construit avec les minors quantiques

Inspiré par SoV classique

$$B(u) = \sum_{j, \dots, p} T_{j|N}(u) T_{k|jN}(u-i) \dots T_{12 \dots |pN}(u - (N-2)i)$$

[Smirnov 2000] [Gromov, FLM, Sizov 16]

Crée des états comme $|\Psi\rangle = B^{\text{good}}(u_1) \dots B^{\text{good}}(u_M)|0\rangle$

Pour tous SU(N) !

[Gromov, FLM, Sizov 16]

$$B(u) = \prod (u - x_k) \quad \langle x | \Psi \rangle = \prod_k Q_1(x_k) \quad \text{On a aussi trouvé le spectre de } x\text{'s pour tous SU(N)}$$

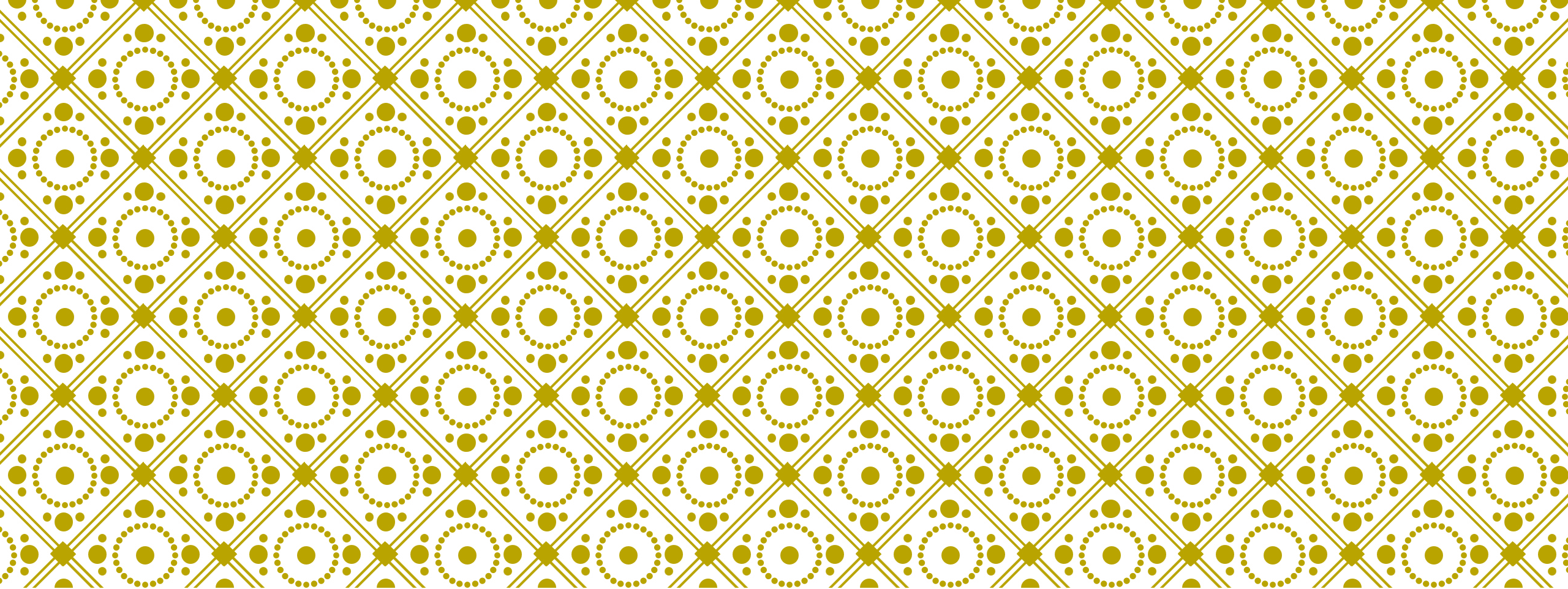
La construction des états – preuve par [Liashyk, Slavnov 18] pour SU(3) (un effort héroïque)

Après – la preuve complet pour SU(N) [Ryan, Volin 18],

ont aussi démontre l'équivalence avec une autre moyen de construire $\langle x |$ [Maillet, Niccoli 18-20]

$$\langle x | \sim \langle 0 | \hat{T}(\theta_1 + i/2)^{n_1} \dots \hat{T}(\theta_L + i/2)^{n_L}$$

L'analogie de la construction d'états trouvé pour super SU(1 | 2) [Gromov, FLM 17]



LA MESURE SOV



Pour des produits scalaires on a besoin de la mesure

Pour des modèles GL(2):

$$\langle \Psi_B | \Psi_A \rangle = \int d^L \mathbf{x} \left(\underbrace{\prod_{i=1}^L Q^{(A)}(x_i)}_{\text{state A}} \right) \underbrace{M(\mathbf{x})}_{\text{measure}} \left(\underbrace{\prod_{i=1}^L Q^{(B)}(x_i)}_{\text{state B}} \right)$$

par ex. pour $s=-1/2$ chaîne de spin

$$M(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{j < k} (e^{2\pi x_j} - e^{2\pi x_k})(x_j - x_k)}{\prod_{j,k} (1 + e^{2\pi(x_j - \theta_k)})}$$

[Sklyanin 90-92]

[Derkachov Korchemsky Manashov 02]

Les modèles GL(N) sont plus complexes

[Sklyanin 92] [Smirnov 2000]

[Gromov FLM Sizov 16]

[Maillet Niccoli 18]

[Ryan Volin 18] [Derkachov Valinevich 19]

La mesure n'était pas connu du tout, sauf dans la limite classique [Smirnov Zeitlin 02]

La mesure SoV: $M_{x,y} = (\langle x|y \rangle)^{-1}$

Mais ces produits scalaires sont compliquées

Peut-on contourner cela?

SU(2) chaîne de spin

L'idée: l'orthogonalité des états implique le même pour Q's

L'équation de Baxter peut être écrit comme

$$\hat{O} \circ Q_1 = 0 \quad \hat{O} = \frac{1}{Q_\theta^+} D^2 + \frac{1}{Q_\theta^-} D^{-2} - \frac{\tau_1}{Q_\theta^+ Q_\theta^-}$$

Propriété clé: **autoadjoint**

$$\langle f \hat{O} g \rangle = \langle g \hat{O} f \rangle \quad \langle f \rangle = \oint du f(u)$$

$$Q_1 = e^{u\phi} \prod_{k=1}^M (u - u_k) \quad Q_\theta = \prod_{n=1}^L (u - \theta_n)$$

$$\tau_1 = 2 \cos \phi u^L + \sum_{n=0}^{L-1} I_n u^n$$

$$f^\pm = f(u \pm i/2), \quad f^{[a]} = f(u + ia/2)$$

$$Df(u) = f(u + i/2)$$

On peut définir L tels crochets

$$\langle f \rangle_j = \oint du \mu_j f$$

$$\langle f \hat{O} g \rangle_j = \langle g \hat{O} f \rangle_j \quad \mu_j = e^{2\pi(j-1)u} \quad j = 1, \dots, L$$

$$\tau_1 = 2 \cos \phi u^L + \sum_{k=1}^L I_k u^{k-1}$$

Ça donne l'orthogonalité!

$$\langle Q^B (\hat{O}^A - \hat{O}^B) Q^A \rangle_j = 0 \quad \hat{O} = \frac{1}{Q_\theta^+} D^2 + \frac{1}{Q_\theta^-} D^{-2} - \frac{\tau_1}{Q_\theta^+ Q_\theta^-}$$

identifie l'état
uniquement

$$\sum_{k=1}^L (I_k^A - I_k^B) \left\langle \frac{u^{k-1} Q^A Q^B}{Q_\theta^+ Q_\theta^-} \right\rangle_j = 0$$

Solution nontriviale donne det=0

Somme des résidus à $u = \theta_n \pm i/2$
donc à valeurs propres de x comme prévue

$$\det_{1 \leq j, k \leq L} \left\langle \frac{u^{k-1} Q^A Q^B}{Q_\theta^+ Q_\theta^-} \right\rangle_j \propto \delta_{AB}$$

Produit scalaire en SoV

En accord avec des résultats connus

[Sklyanin; Kitanine, Maillet, Niccoli, ...]

[Kazama, Komatsu, Nishimura, Serban, Jiang, ...]

SU(3) chaîne de spin

Pour SU(3) on a 2 types de racines Bethe

$$\prod_{n=1}^L \frac{u_j - \theta_n + i/2}{u_j - \theta_n - i/2} = e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \prod_{k \neq j}^{N_u} \frac{u_j - u_k + i}{u_j - u_k - i} \prod_{l=1}^{N_v} \frac{u_j - v_l - i/2}{u_j - v_l + i/2}$$

momentum-portant $\{u_j\}_{j=1}^{N_u}$

$$1 = e^{i(\phi_2 - \phi_3)} \prod_{k \neq j}^{N_v} \frac{v_j - v_k + i}{v_j - v_k - i} \prod_{l=1}^{N_u} \frac{v_j - u_l - i/2}{v_j - u_l + i/2}$$

auxiliaire $\{v_j\}_{j=1}^{N_v}$

$$Q_1 = e^{\phi_1 u} \prod_{j=1}^{N_u} (u - u_j)$$

$$Q_{12} = e^{(\phi_1 + \phi_2)u} \prod_{j=1}^{N_v} (u - v_j)$$

Nouvelle propriété clé: doit utiliser Q^i en plus de Q_i pour obtenir une mesure simple

L'autres Qs donnent les racines duals $Q^1 \equiv Q_{23}$, etc

Equations de Baxter:

$$\tau_a(u) = u^L \chi_a(G) + \sum_{j=1}^L u^{j-1} I_{a,j-1},$$

$$\bar{O} = \frac{1}{Q_\theta^-} D^{-3} - \frac{\tau_2}{Q_\theta^+ Q_\theta^-} D^{-1} + \frac{\tau_1}{Q_\theta^+ Q_\theta^-} D - \frac{1}{Q_\theta^+} D^{+3}$$

$$O = \frac{1}{Q_\theta^{++}} D^{+3} - \frac{\tau_2^+}{Q_\theta^{++} Q_\theta} D + \frac{\tau_1^-}{Q_\theta Q_\theta^{--}} D^{-1} - \frac{1}{Q_\theta^{--}} D^{-3}$$

$$\bar{O} \circ Q^a = 0 \quad O \circ Q_a = 0$$

$$\langle f \rangle_j = \oint du \mu_j f$$

Ces deux operateurs sont conjugués! $\langle f O \circ g \rangle_j = \langle g \bar{O} \circ f \rangle_j$

$$\mu_j = e^{2\pi(j-1)u}$$

$$\langle Q_b^B (\bar{O}^A - \bar{O}^B) Q^{a,A} \rangle_j = 0$$

$$j = 1, \dots, L$$

$$\tau_a(u) = u^L \chi_a(G) + \sum_{j=1}^L u^{j-1} I_{a,j-1},$$

$$\bar{O} = \frac{1}{Q_\theta^-} D^{-3} - \frac{\tau_2}{Q_\theta^+ Q_\theta^-} D^{-1} + \frac{\tau_1}{Q_\theta^+ Q_\theta^-} D - \frac{1}{Q_\theta^+} D^{+3}$$

$$\langle Q_b^B (\bar{O}^A - \bar{O}^B) Q^{a,A} \rangle_j = 0$$

Nous avons la liberté quels Qs de choisir

Le système linéaire:

$$\sum_{\alpha=\{1,2\}, k=1,\dots,L} (I_{\alpha,k}^A - I_{\alpha,k}^B) (-1)^\alpha \left\langle \frac{u^k Q_1^B Q^{a,A[-3+2\alpha]}}{Q_\theta^+ Q_\theta^-} \right\rangle_j = 0$$

On a 2L variables, et deux choix de a donne 2L équations

[Gromov, FLM, Ryan, Volin 19]

[Cavaglia, Gromov, FLM 19]

$$\langle \Psi_B | \Psi_A \rangle \propto \left| \begin{array}{cc} \left\langle \frac{1}{Q_\theta^+ Q_\theta^-} u^{k-1} Q_B^{2+} Q_1^A \right\rangle_j & \left\langle \frac{1}{Q_\theta^+ Q_\theta^-} u^{k-1} Q_B^{2-} Q_1^A \right\rangle_j \\ \left\langle \frac{1}{Q_\theta^+ Q_\theta^-} u^{k-1} Q_B^{3+} Q_1^A \right\rangle_j & \left\langle \frac{1}{Q_\theta^+ Q_\theta^-} u^{k-1} Q_B^{3-} Q_1^A \right\rangle_j \end{array} \right|$$

$1 \leq j, k \leq L$

Chaque crochet est un somme des résidus à $u = \theta_n \pm i/2$

$$N_A^2 \delta_{AB} = \sum_{x,y} M_{x,y} \prod_{k=1}^L Q_1^A(X_{k,1}) Q_1^A(X_{k,2}) \prod_{k=1}^L [Q_B^2(Y_{k,1}) Q_B^3(Y_{k,2}) - Q_B^2(Y_{k,2}) Q_B^3(Y_{k,1})]$$

en accord avec le spectre de $B(u)$!

Pouvons-nous construire la base ou ces sont les fonctions d'onde?

Réalisation pour SU(3)

[Gromov, FLM, Ryan, Volin 19]

$$\langle \Psi_B | \Psi_A \rangle = \int \left(\prod_{a=1}^{N-1} \prod_{i=1}^L dx_{i,a} \right) \underbrace{\left(\prod_{a=1}^{N-1} \prod_{i=1}^L Q_1^{(A)}(x_{i,a}) \right)}_{\text{state A}} \hat{M}(\mathbf{x}) \underbrace{\left(\prod_{a=1}^{N-1} \prod_{i=1}^L Q^{(B)a}(x_{i,a}) \right)}_{\text{state B}}$$

$$\langle x | \Psi_A \rangle \qquad \langle \Psi_B | y \rangle$$

En place des intégraux
on a des sommes

$$\langle \Psi_B | \Psi_A \rangle = \sum_{x,y} M_{x,y} \langle \Psi_B | y \rangle \langle x | \Psi_A \rangle$$

On obtient le produit scalaire en construisant deux bases SoV: $\langle x |$ et $| y \rangle$

$\langle x |$ = états propres d'opérateur habituel

$$\hat{B}(u) = \hat{T}_3^2(u) \hat{U}_3^1(u-i) - \hat{T}_3^1(u) \hat{U}_3^2(u-i)$$

$| y \rangle$ = états propres pour un nouvel 'dual'
opérateur

$$\hat{C}(u) = \hat{T}_3^2(u - \frac{i}{2}) \hat{U}_3^1(u - \frac{i}{2}) - \hat{T}_3^1(u - \frac{i}{2}) \hat{U}_3^2(u - \frac{i}{2})$$

$$M_{x,y} = (\langle x | y \rangle)^{-1}$$

La mesure = ce qu'on obtient de Baxter!

Pour construire la base SoV on agit sur un état de référence avec les matrices transfers

$B(u)$ est diagonalisé par

[Maillet, Niccoli 18] [Ryan, Volin 18]

$$\langle x | \propto \langle 0 | \prod_{k=1}^L [\hat{\tau}_2(\theta_k - i/2)]^{m_{k,1} + m_{k,2}} \quad 0 \leq m_{k,1} \leq m_{k,2} \leq 1$$

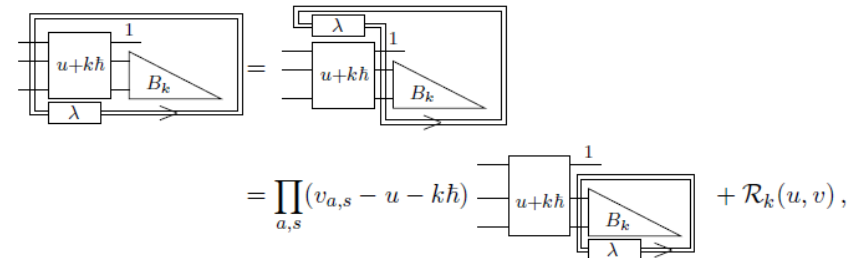
$C(u)$ est diagonalisé par

[Ryan, Volin 18] [Gromov FLM, Ryan, Volin 19]

$$|y\rangle \propto \prod_{k=1}^L \hat{\tau}_1(\theta_k - i/2)^{n_{k,2} - n_{k,1}} \hat{\tau}_2(\theta_k - i/2)^{n_{k,1}} |0\rangle \quad 0 \leq n_{k,1} \leq n_{k,2} \leq 1$$

La preuve est un généralisation des méthodes très nontriviels de [Ryan, Volin 18]

Basé sur les relation de commutation + patterns de Gelfand-Tsetlin



$$M_{x,y} = (\langle x|y\rangle)^{-1}$$

$$\langle \Psi_B | \Psi_A \rangle = \sum_{x,y} M_{x,y} \langle \Psi_B | y \rangle \langle x | \Psi_A \rangle$$

On observe que pour SU(2) la matrice est diagonale

Pas pour SU(3), mais les éléments restent simples!

$$\langle \Psi_B | \Psi_A \rangle \propto \left| \begin{array}{cc} \left\langle \frac{1}{Q_\theta^+ Q_\theta^-} u^{k-1} Q_1^A Q_B^{2+} \right\rangle_j & \left\langle \frac{1}{Q_\theta^+ Q_\theta^-} u^{k-1} Q_1^A Q_B^{2-} \right\rangle_j \\ \left\langle \frac{1}{Q_\theta^+ Q_\theta^-} u^{k-1} Q_1^A Q_B^{3+} \right\rangle_j & \left\langle \frac{1}{Q_\theta^+ Q_\theta^-} u^{k-1} Q_1^A Q_B^{3-} \right\rangle_j \end{array} \right|$$

[Cavaglia, Gromov, FLM 19]

[Gromov, FLM, Ryan, Volin 19]

Une autre approche: [Maillet, Niccoli, Vignoli 20]

Fixer la mesure indirectement avec les relations de recursion (plutôt compliqué...)

(+ une autre mesure dans un autre base)

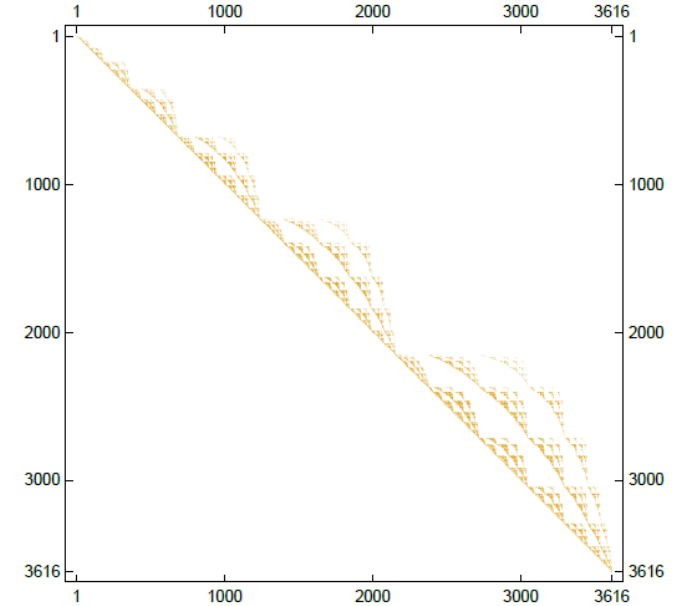
Le résultat doit être le même, intéressant de prouver

Récemment nous avons réussi à calculer la mesure pour tous SU(N)
explicitement et pour **arbitraire spin** [Gromov, FLM, Ryan 20]

$$M_{y,x} = \sum_{k=\text{perm}_\alpha n} \text{sign}(\sigma) \left(\prod_{a=1}^{N-1} \frac{\Delta(x_{\sigma^{-1}(a)})}{\Delta(\{\theta_a\})} \right) \prod_{a=1}^{N-1} \frac{r_{\alpha, n_{\alpha, a}}}{r_{\alpha, 0}} \Big|_{\sigma_{\alpha, a} = k_{\alpha, a} - m_{\alpha, a} + a}$$

$$r_{\alpha, n} = -\frac{1}{2\pi} \prod_{\beta=1}^L (n+1 - i\theta_\alpha + i\theta_\beta)_{2s-1}$$

$$\langle \Psi_B | \Psi_A \rangle \propto \left| \begin{array}{cc} \left\langle \frac{1}{Q_\theta^+ Q_\theta^-} u^{k-1} Q_1^A Q_B^{2+} \right\rangle_j & \left\langle \frac{1}{Q_\theta^+ Q_\theta^-} u^{k-1} Q_1^A Q_B^{2-} \right\rangle_j \\ \left\langle \frac{1}{Q_\theta^+ Q_\theta^-} u^{k-1} Q_1^A Q_B^{3+} \right\rangle_j & \left\langle \frac{1}{Q_\theta^+ Q_\theta^-} u^{k-1} Q_1^A Q_B^{3-} \right\rangle_j \end{array} \right|$$



Représentation avec poids $[s, 0, \dots, 0]$, **infinite-dim** cas inclus

Facteur de forme diagonal comme $\frac{\langle \Psi | \frac{\partial \hat{I}_n}{\partial p} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = \frac{\partial I_n}{\partial p}$ sont calculable, égal à ratios des déterminants

De la propriété autoadjoint:

$$0 = \langle Q(\hat{O} + \delta O) \circ (Q + \delta Q) \rangle = \underbrace{\langle Q O \circ \delta Q \rangle}_{=0} + \langle Q \delta O \circ Q \rangle \quad \tau_1 = 2 \cos \phi u^L + \sum_{k=0}^{L-1} I_k u^k$$

Relie δI_n avec $\delta \phi$

So
$$\partial_\phi I_k = \frac{1}{2 \sin \phi} \frac{\det_{i,j=1,\dots,L} m_{ij}^{(k)}}{\det_{i,j=1,\dots,L} m_{ij}}$$

← norm

De $\partial/\partial \theta_i$ on obtient des operateurs locaux sur site 'l' de la chaîne de spin
 [Gromov, FLM, Ryan 20]

Tous ça s'étend à SU(N)

On peut calculer beaucoup d'autres observables dans une forme de det

Par. ex. produit scalaire avec twists différents

$$\langle \Psi^{\tilde{\lambda}_a} | \Psi^{\lambda_a} \rangle = \left[\left[\tilde{Q}_{12}, \tilde{Q}_{13} \middle| Q_1 \right] \right] \quad [\text{Gromov, FLM, Ryan 20}]$$

Aussi on-shell et off-shell corrélateurs avec opérateurs B et C

$$|\Psi\rangle_{\text{off shell}} \equiv \mathbf{b}(v_1) \dots \mathbf{b}(v_k) |\Omega\rangle$$

$$\frac{\langle \Phi | \mathbf{c}_{\gamma_1}(v_1) \dots \mathbf{c}_{\gamma_K}(v_K) \mathbf{b}_{\beta_1}(w_1) \dots \mathbf{b}_{\beta_J}(w_J) | \Theta \rangle}{\langle \Phi | \Psi \rangle}$$

Probablement c'est un ensemble d'opérateurs complet

Un commentaire sur la chronologie:

Tels manipulations avec Baxters ont été utilisées dans [\[Cavaglia, Gromov, FLM 18\]](#)
pour $N=4$ SYM

Après – dans [\[Cavaglia, Gromov, FLM 19\]](#) pour chaîne de spin $SL(N)$

Et après dans [\[Gromov, FLM, Ryan, Volin 19\]](#) pour chaîne de spin $SU(N)$

Tres recemment – tous elements de matrice
pour un ensemble simple et complet d'operateurs
dans une forme de determinant!

[Gromov, Primi, Ryan 22]

Idee cle – la base SoV peut etre choisi dans une maniere independent du twist

Choix habituel –
le twist diagonal

$$g = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Beaucoup plus utile:

$$G = \begin{pmatrix} \chi_1 & -\chi_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \text{tr } G &= \chi_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det G &= \chi_2 = \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

$$t(u) = T_{12}(u) + \chi_1 T_{11}(u) - \chi_2 T_{21}(u)$$

La base SoV est independent du twist

[Ryan, Volin]

Factorise les fonctions d'onde d'Hamiltoniens differents

[Gromov, FLM, Ryan]

Operateurs principaux

[Gromov, Primi, Ryan 22]

$$t(u) = T_{12}(u) + \chi_1 T_{11}(u) - \chi_2 T_{21}(u)$$

$$t(u) = \chi_1 u^L + \sum_{\beta=1}^L \hat{I}_\beta u^{\beta-1}$$

Les loMs admettent une expansion
en des caractères

$$\hat{I}_\beta \longrightarrow \hat{I}_\beta^{(0)} + \chi_1 \hat{I}_\beta^{(1)} + \chi_2 \hat{I}_\beta^{(2)}$$

$$t(u) \longrightarrow P_0(u) + \chi_1 P_1(u) + \chi_2 P_2(u)$$

$P_r(u)$ - operateurs principaux

[Gromov, Primi, Ryan]



Obtient le dernier
opérateur $T_{22}(u)$

Leurs éléments de matrice (off-diagonal inclus) ont une forme de déterminant simple!

On attend beaucoup d'applications

Chaînes de spin non-compactes

Représentation infinite-dim a plus haut poids de $SL(N)$ sur chaque site

On a des intégraux en place de sommes $\langle f \rangle_j = \int_{-\infty}^{\infty} du \mu_j f$ $\mu_j = \frac{1}{1 + e^{2\pi(u-\theta_j)}}$

$$\bar{O} \circ Q^a = 0$$

$$O \circ Q_a = 0$$

$$\bar{O} = Q_{\theta}^{-} D^{-3} - \tau_2 D^{-1} + \tau_1 D - Q_{\theta}^{+} D^{+3}$$

$$O = Q_{\theta}^{++} D^{+3} - \tau_2^{+} D + \tau_1^{-} D - Q_{\theta}^{-} D^{-3}$$

On voudrais $\langle g \bar{O} \circ f \rangle = \langle f O \circ g \rangle$

Quand on déplace le contour on rencontre les pôles de la mesure

$$\langle g \bar{O} \circ f \rangle = \int \mu g \left[Q_{\theta}^{-} f^{[-3]} - \tau_2 f^{-} + \tau_1 f^{+} - Q_{\theta}^{+} f^{[+3]} \right] = \langle f O \circ g \rangle + \text{pole contributions}$$

$$Q_1(\theta_j + \frac{i}{2}) \tau_1(\theta_j + \frac{i}{2}) - Q_1(\theta_j + \frac{3i}{2}) Q_{\theta}(\theta_j + \frac{i}{2}) = 0$$

Les pôles s'annulent quand $g = Q_1$! Et tout marche comme avant

Structure pour SL(N):

$$\langle \Psi_A | \Psi_B \rangle = \int \left(\prod_{a=1}^{N-1} \prod_{i=1}^L dx_{i,a} \right) \left(\underbrace{\prod_{a=1}^{N-1} \prod_{i=1}^L Q_1^{(A)}(x_{i,a})}_{\text{state A}} \hat{M}(\mathbf{x}) \underbrace{\prod_{a=1}^{N-1} \prod_{i=1}^L Q^{(B)^a}(x_{i,a})}_{\text{state B}} \right)$$

Operateur indépendant de l'état,
contient les shifts $\pm i/2$

$$\hat{M}(x) = \det \left[\underbrace{\left(\frac{\hat{x}^{j-1}}{1 + e^{2\pi(\hat{x} - \theta_i)}} \right)}_{1 \leq i, j \leq L} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{D}_x^{N-2} & \mathcal{D}_x^{N-4} & \dots & \mathcal{D}_x^{2-N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{D}_x^{N-2} & \mathcal{D}_x^{N-4} & \dots & \mathcal{D}_x^{2-N} \end{pmatrix}}_{(N-1) \times (N-1)} \right]$$

similaire à l'hypothèse de [Smirnov Zeitlin]
basée sur la limite quasiclassique
(quantization de la courbe algébrique)

On a aussi généralisé à arbitraire spin s

[Gromov FLM, Ryan 20]

$$\langle f \rangle_n = \int_{-\infty}^{\infty} du \mu_n f \quad \mu_n = \frac{1}{1 + e^{2\pi(u-\theta_n)}} \quad \Rightarrow \quad \mu_n = \frac{\Gamma(s - i(u - \theta_n))\Gamma(s + i(u - \theta_n))}{e^{\pi(u-\theta_n)}}$$

Pour $SL(2)$ on reproduit [Derkachov, Manashov, Korchemsky]

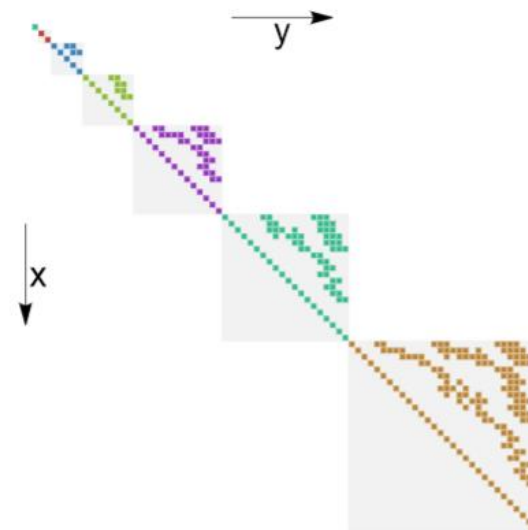
Pour construire la base SoV on utilise les T 's plus complexes, dans représentations non-rectangulaires

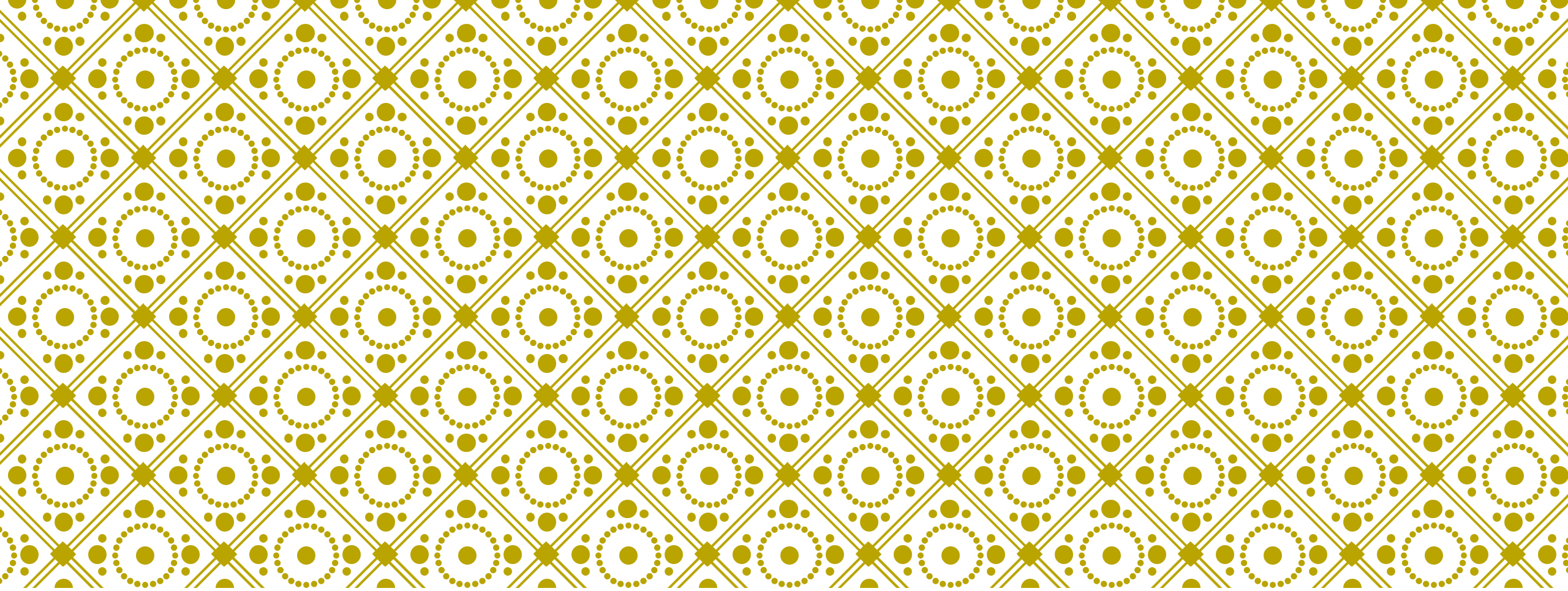
$$|y\rangle \propto \hat{T}_{\{m_1, m_2\}} \left(\theta_n + is + i \frac{m_1 - \mu'_1}{2} \right) |0\rangle$$

intégral = somme des pôles avec $\text{Im } u < 0$

La mesure qu'on obtient de Baxter et encore la même que la mesure dans ce base!

see [Ryan, Volin 20]





L'EXTENSION A LA THEORIE DES CHAMPS

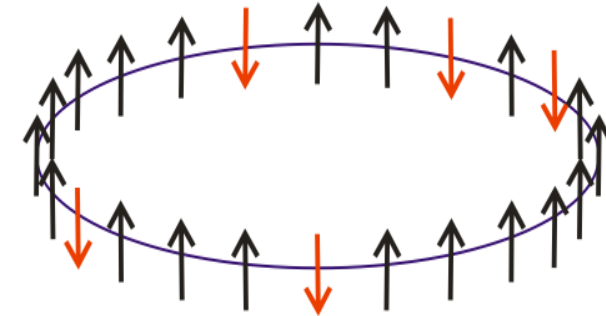
intégrabilité dans N=4 super Yang-Mills

opérateurs single trace

$$\text{Tr}(\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_2(x)\Phi_1(x)\dots)$$



chaînes de spin intégrables



$$\Psi \sim Q(x_1)Q(x_2)\dots Q(x_n)$$

Q-fonctions sont connus à tous couplages
de Quantum Spectral Curve

[Gromov, Kazakov, Leurent, Volin 13]

Donne le spectre exacte, très efficace!
Tous-couplage, numérique, perturbatif, ...

[Alfimov, Gromov, Kazakov 14] [Marboe, Volin 14,16,17]
[Gromov, FLM, Sizov 13,14] [Gromov, FLM, Sizov 15 x2]
[Gromov, FLM 15, 16]
[FLM, Preti 20] ...

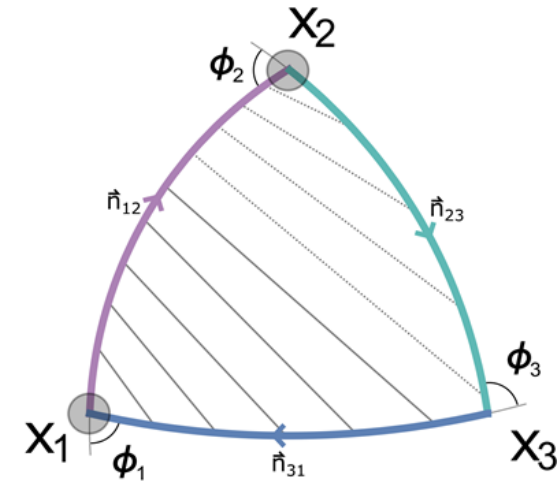
On espère a le relier avec fonctions 3pt
qui sont beaucoup moins compris

Le but: calculer les corrélateurs via Q's

Premier exemple a tous ordres:
3 lignes de Wilson + scalaires
en limite de ladders

$$C_{123} = \frac{\langle Q_1 Q_2 Q_3 \rangle}{\sqrt{\langle Q_1^2 \rangle \langle Q_2^2 \rangle \langle Q_3^2 \rangle}}$$

[Cavaglia, Gromov, FLM 18]



Une structure similaire trouvée dans un régime très différente
(avec localisation)

[Komatsu, Giombi 18,19]

Extension a des operateurs locales

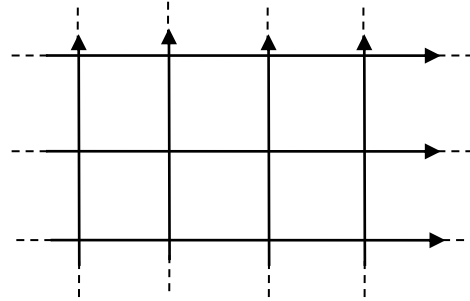
Gurdogan,
Kazakov 2015

“fishnet CFT”

$$S = \frac{N}{2} \int d^4x \operatorname{tr} \left(\partial^\mu \phi_1^\dagger \partial_\mu \phi_1 + \partial^\mu \phi_2^\dagger \partial_\mu \phi_2 + 2\xi^2 \phi_1^\dagger \phi_2^\dagger \phi_1 \phi_2 \right)$$

Version simplifiée de N=4 SYM, pas de susy mais reste intégrable

intégrabilité visible
directement de diagrammes de Feynman



On trouve des structures
très similaires

$$C_{\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{L}} \propto \frac{d\Delta}{d\xi^2} = \frac{\int_{|} \frac{q\bar{q}}{u} \frac{du}{2\pi i}}{\int_{|} i (q^+ \bar{q}^- - q^- \bar{q}^+) \frac{du}{2\pi i}}$$

[Cavaglia, Gromov, **FLM** 21
+ with A. Sever in progress]

La chaîne de spins fishnet

SO(4,2) chaîne de spin, principal series rep

Fonction d'onde = corrélateur dans CFT

$$\varphi_{\mathcal{O}}(x_1, \dots, x_J) = \langle \mathcal{O}(x_0) \text{tr} [\phi_1^\dagger(x_1) \dots \phi_J^\dagger(x_J)] \rangle .$$

[Gromov, Sever 19]

↗

Tr ($\phi(x_0)$)^J

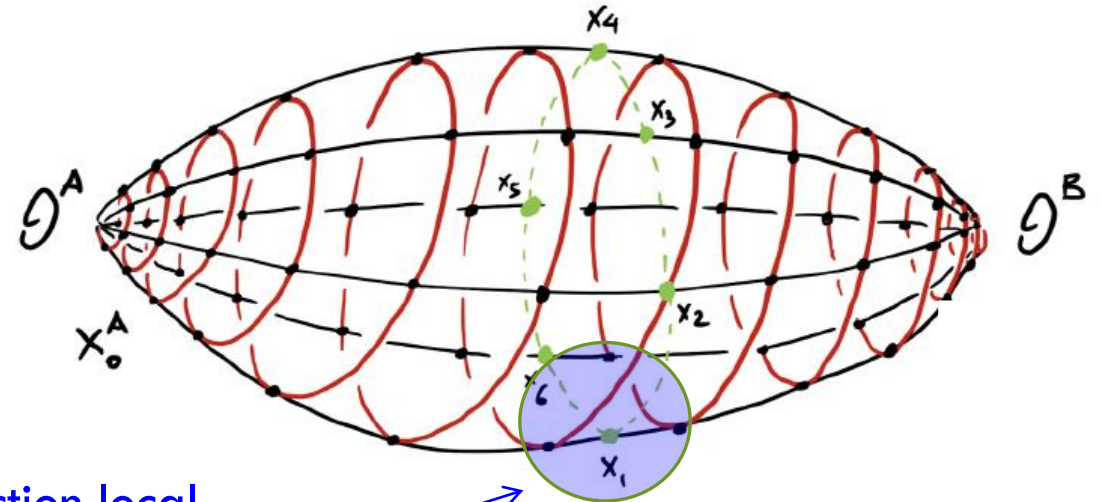
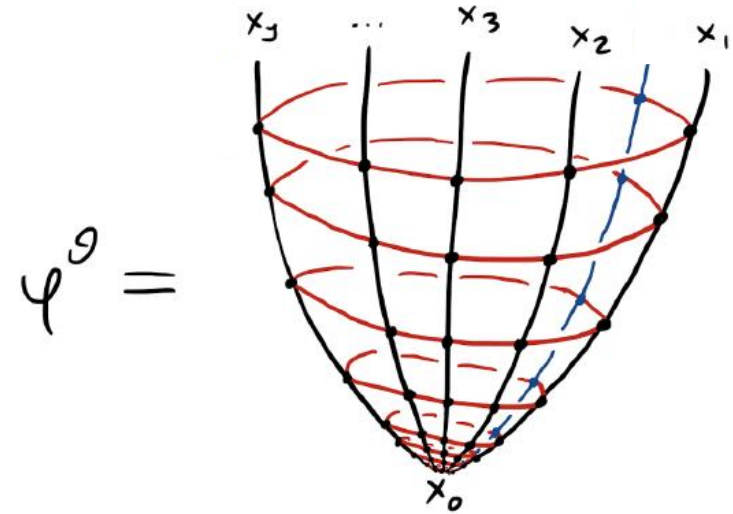
Facteurs de formes = corrélateurs plus complexes

On peut les calculer avec SoV! [Cavaglia, Gromov, FLM 21]

Par. ex. de $\partial I / \partial p$ on calcule la fonction 2pt avec insertions locales a tous ordres de couplage

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial h_\alpha} \hat{H}^{-1} = -8 \left[-\frac{x_{\alpha, \alpha-1}^2 + x_{\alpha, \alpha+1}^2}{2} \left(1 + x_\alpha^\mu \frac{\partial}{\partial x_\alpha^\mu} \right) + (x_{\alpha, \alpha-1}^2 x_{\alpha+1}^\mu + x_{\alpha, \alpha+1}^2 x_{\alpha-1}^\mu) \frac{\partial}{\partial x_\alpha^\mu} \right] \times \square_\alpha^{-1} \frac{1}{x_{\alpha, \alpha-1}^2} \frac{1}{x_{\alpha, \alpha+1}^2} .$$

Signes de structures similaires dans SYM
[Cavaglia, Gromov, FLM 21]



action local
d'un operateur differentiel

N=4 SYM

On a le point de départ cle!

[Cavaglia, Gromov, **FLM** 21]

$$\langle \bar{Q}_B (\mathcal{O}_A - \mathcal{O}_B) Q_A \rangle_\alpha = 0$$

Difference principal avec chaine de spin/fishnet:
nombre infini de degrés de liberté

Donc nombre infini d'integraux de mouvement

La matrice de transfer n'es pas polynomial non plus, on a besoin d'une bonne base de loM's

FUTUR

- Finalement on sait la **mesure SoV** pour **les chaînes de spin GL(N)**
- Beaucoup **d'extensions/applications** prévues:
cas super [Gromov, FLM 18; Maillet, Niccoli, Vignoli 20],
SO(N) [Ferrando, Frassek, Kazakov; Ekhamar, Shu, Volin 20],
principal series rep pour fishnet, produits scalaires de Slavnov, limite TD, ...

- Significance algébrique de $\int Q_1 Q_2 Q_3$?

- **AdS/CFT**: autres corrélateurs, au-delà de fishnets, ...
Beaucoup des signes de structures SOV cachées !

[Cavaglia, Gromov, FLM 18]

[McGovern 20] [Giombi, Komatsu 18, 19]

