

Écoulement magnétisé dans un espace-temps de Kerr. Jets relativistes connectés à l'horizon d'un trou noir supermassif.

Loïc Chantry

Dipartimento di Fisica - Università degli studi di Torino
LUTH - PSL (Observatoire de Paris)

13 janvier 2022

Table des matières

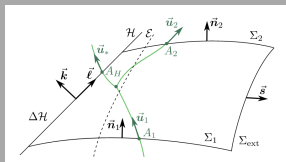
- 1 Introduction
- 2 Le fluide magnétisé avec injection
- 3 Solutions auto-similaires d'écoulement entrant et sortant
- 4 Résultats
- 5 Conclusion et perspectives

Introduction

Problématique

- Peut-on extraire de l'énergie et du moment angulaire d'un trou noir ?
- Cette énergie joue-t-elle un rôle dans la formation des jets de plasma ?
- Comment caractériser la création de paires dans la magnétosphère d'un trou noir super-massif ?

Bref rappel historique



[Lasota et al., 2014]

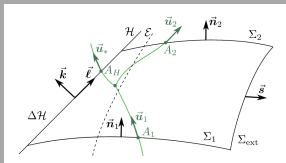
Processus de Penrose [1969]

- Une particule accrétée.
 - Espace temps de Kerr.
 - **Conditions :**
 - ☞ Ergorégion
 - ☞ vitesses relatives $> c/2$.
- Bardeen et al. [1972]

Effet Blandford and Znajek [1977]

- Plasma « force free ».
- Flux de Poynting.
- Espace temps de Kerr.
- Conditions
 - ☞ Ergoregion.
 - ☞ Fréquence isorotation
$$0 \leq \Omega \leq \omega_H.$$

Bref rappel historique



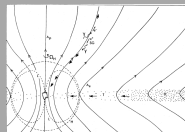
[Lasota et al., 2014]

Processus de Penrose [1969]

- Une particule accrétée.
 - Espace temps de Kerr.
 - **Conditions :**
 - ☞ Ergorégion
 - ☞ vitesse relatives $> c/2$.
- Bardeen et al. [1972]

Effet Blandford and Znajek [1977]

- Plasma « force free ».
- Flux de Poynting.
- Espace temps de Kerr.
- **Conditions :**
 - ☞ Ergoregion.
 - ☞ Fréquence isotrotation
$$0 \leq \Omega \leq \omega_H.$$



Limites et caractéristiques des processus

Évolution et Efficacité

- Espace temps circulaire (horizon de Killing)
⇒ première loi

$$\delta M c^2 = \frac{c^3 \kappa}{8\pi \mathcal{G}} \delta A + \omega_H \delta J.$$

- Condition d'énergie nulle ($\forall \mathbf{k}$ lumière $\mathbf{T}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \geq 0$) ⇒ deuxième loi :

$$\frac{dA}{dt} \geq 0 \Rightarrow \omega_H \delta J \leq \delta M c^2.$$

- **Condition nécessaire d'extraction** : extraction de moment angulaire $\delta J \leq 0$.

- Lors d'un processus d'extraction :

- ☞ masse irréductible [Christodoulou, 1970]

$$M^2 = M_{\text{irr}}^2 + \left(\frac{cJ}{2\mathcal{G}M_{\text{irr}}} \right)^2.$$

- ☞ efficacité de l'extraction : $\epsilon = \frac{\delta M c^2}{\omega_H \delta J}$.

Processus de Penrose

- Efficacité du processus :

$$\frac{E_{\text{out}}}{E_{\text{in}}} \lesssim \frac{1}{3} \left(\frac{M}{M_{\text{irr}}} + 1 \right).$$

- Quantité de particules ?

Effet Blandford-Znajek

- Efficacité d'extraction :

$$\epsilon = \frac{\Omega}{\omega_H}.$$

- Géométrie du champ :
demi-monopole ($\epsilon = 0.5$),
parabolique ($\epsilon \approx 0.38$).

- Source du champ ?

- Hypothèse « force free ».

Limites et caractéristiques des processus

Évolution et Efficacité

- Espace temps circulaire (horizon de Killing)
⇒ première loi

$$\delta M c^2 = \frac{c^3 \kappa}{8\pi \mathcal{G}} \delta A + \omega_H \delta J.$$

- Condition d'énergie nulle (: $\forall \mathbf{k}$ lumière $\mathbf{T}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \geq 0$) ⇒ deuxième loi :

$$\frac{dA}{dt} \geq 0 \Rightarrow \omega_H \delta J \leq \delta M c^2.$$

- **Condition nécessaire d'extraction** : extraction de moment angulaire $\delta J \leq 0$.

- Lors d'un processus d'extraction :

- ☞ masse irréductible [Christodoulou, 1970]

$$M^2 = M_{\text{irr}}^2 + \left(\frac{cJ}{2\mathcal{G}M_{\text{irr}}} \right)^2.$$

- ☞ efficacité de l'extraction : $\epsilon = \frac{\delta M c^2}{\omega_H \delta J}$.

Processus de Penrose

- Efficacité du processus :

$$\frac{E_{\text{out}}}{E_{\text{in}}} \lesssim \frac{1}{3} \left(\frac{M}{M_{\text{irr}}} + 1 \right).$$

- Quantité de particules ?

Effet Blandford-Znajek

- Efficacité d'extraction :

$$\epsilon = \frac{\Omega}{\omega_H}.$$

- Géométrie du champ :
demi-monopole ($\epsilon = 0.5$),
parabolique ($\epsilon \approx 0.38$)

- Source du champ ?

- Hypothèse « force free ».

Limites et caractéristiques des processus

Évolution et Efficacité

- Espace temps circulaire (horizon de Killing)
⇒ première loi

$$\delta M c^2 = \frac{c^3 \kappa}{8\pi \mathcal{G}} \delta A + \omega_H \delta J.$$

- Condition d'énergie nulle ($\forall \mathbf{k}$ lumière $\mathbf{T}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \geq 0$) ⇒ deuxième loi :

$$\frac{dA}{dt} \geq 0 \Rightarrow \omega_H \delta J \leq \delta M c^2.$$

- **Condition nécessaire d'extraction** : extraction de moment angulaire $\delta J \leq 0$.

- Lors d'un processus d'extraction :

☞ masse irréductible [Christodoulou, 1970]

$$M^2 = M_{\text{irr}}^2 + \left(\frac{cJ}{2\mathcal{G}M_{\text{irr}}} \right)^2.$$

☞ efficacité de l'extraction : $\epsilon = \frac{\delta M c^2}{\omega_H \delta J}$.

Processus de Penrose

- Efficacité du processus :

$$\frac{E_{\text{out}}}{E_{\text{in}}} \lesssim \frac{1}{3} \left(\frac{M}{M_{\text{irr}}} + 1 \right).$$

- Quantité de particules ?

Effet Blandford-Znajek

- Efficacité d'extraction :

$$\epsilon = \frac{\Omega}{\omega_H}.$$

- Géométrie du champ :
demi-monopole ($\epsilon = 0.5$),
parabolique ($\epsilon \approx 0.38$).

- Source du champ ?

- Hypothèse « force free ».

Échanges énergétiques entre un tenseur énergie impulsion et un trou noir.

- Deux vecteurs de Killing :
 - ☞ Stationnarité : η .
 - ☞ Symétrie axiale : ξ .
- Quantités conservées :
 - ☞ Courant de Noether associé à η (flux d'« énergie » de Noether) :
 $\mathbf{P} = -\mathbf{T}(\eta, \cdot)$.
 - ☞ Courant de Noether associé à ξ (flux de « moment angulaire » de Noether) :
 $\mathbf{M} = \mathbf{T}(\xi, \cdot)$.
- Avec : $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ et $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$.
- Permet le calcul d'échange d'énergie et de moment angulaire si \mathbf{T} est connu sur l'horizon.
- La condition d'énergie nulle appliquée au vecteur normal à l'horizon conduit à :
 $\omega_H \delta J \leq \delta E_H$.
- Permet un calcul local.

Échanges énergétiques entre un tenseur énergie impulsion et un trou noir.

- Deux vecteurs de Killing :
 - ☞ Stationnarité : η .
 - ☞ Symétrie axiale : ξ .
- Quantités conservées :
 - ☞ Courant de Noether associé à η (flux d'« énergie » de Noether) :

$$\mathbf{P} = -\mathbf{T}(\eta, \cdot).$$
 - ☞ Courant de Noether associé à ξ (flux de « moment angulaire » de Noether) :

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(\xi, \cdot).$$
- Avec : $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ et $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$.
- Permet le calcul d'échange d'énergie et de moment angulaire si \mathbf{T} est connu sur l'horizon.
- La condition d'énergie nulle appliquée au vecteur normal à l'horizon conduit à :

$$\omega_H \delta J \leq \delta E_H.$$
- Permet un calcul local.

Jets issus de trous noirs supermassifs

Morphologie des jets

- Longueur des jets ($\geq 150\text{kpc}$ pour Hercules A, $\geq 30\text{kpc}$ M87) à l'intérieur d'un halo radio étendu.
- Formation du jet dans la magnétosphère $< 10r_s$.
- Forte collimation dès la base du jet.

Caractéristiques physiques de M87

- Puissance cinétique totale $\approx 10^{42} - 10^{44}\text{erg.s}^{-1}$.
- Vitesse du jet $\gamma \approx 2 - 10$.
- Masse du trou noir $\sim 10^9 M_\odot$.
- Spin ($a \sim 0.6$ Mertens et al. 2016 / ~ 0.9 Tamburini 2019).
- Âge $> 0.1\text{ Gyr}$ (Batcheldor 2010).
- Champ magnétique $\approx 1 - 15\text{G}$ at $10r_s$ (Kino et al. 2014).
- Grande variabilité proche du trou noir.

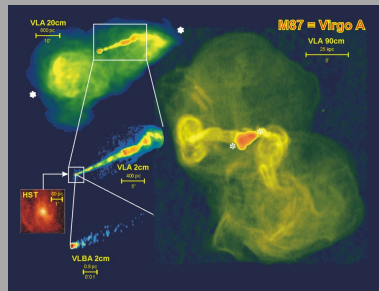


Image radio VLA/VLBA de la galaxie M87 à différentes échelles (F. Owen, J. Biretta, J. Eilek, & N. Kassim)

Structure d'un jet

- Plusieurs composantes :
 - Disque d'accrétion.
 - Coeur du jet : Leptonique.
 - Vent de disque : Hadronique.
- Création de paires.

Jets issus de trous noirs supermassifs

Morphologie des jets

- Longueur des jets ($\geq 150\text{kpc}$ pour Hercules A, $\geq 30\text{kpc}$ M87) à l'intérieur d'un halo radio étendu.
- Formation du jet dans la magnétosphère $< 10r_s$.
- Forte collimation dès la base du jet.

Caractéristiques physiques de M87

- Puissance cinétique totale $\approx 10^{42} - 10^{44}\text{erg.s}^{-1}$.
- Vitesse du jet $\gamma \approx 2 - 10$.
- Masse du trou noir $\sim 10^9 M_{\odot}$.
- Spin ($a \sim 0.6$ Mertens et al. 2016 / ~ 0.9 Tamburini 2019).
- Âge > 0.1 Gyr (Batcheldor 2010).
- Champ magnétique $\approx 1 - 15\text{G}$ at $10r_s$ (Kino et al. 2014).
- Grande variabilité proche du trou noir.

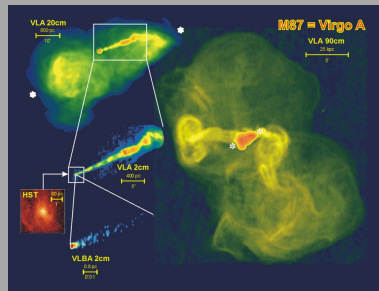


Image radio VLA/VLBA de la galaxie M87 à différentes échelles (F. Owen, J. Biretta, J. Eilek, & N. Kassim)

Structure d'un jet

- Plusieurs composantes :
 - Disque d'accrétion.
 - Coeur du jet : Leptonique.
 - Vent de disque : Hadronique.
- Création de paires.

Jets issus de trous noirs supermassifs

Morphologie des jets

- Longueur des jets ($\geq 150\text{kpc}$ pour Hercules A, $\geq 30\text{kpc}$ M87) à l'intérieur d'un halo radio étendu.
- Formation du jet dans la magnétosphère $< 10r_s$.
- Forte collimation dès la base du jet.

Caractéristiques physiques de M87

- Puissance cinétique totale $\approx 10^{42} - 10^{44}\text{erg.s}^{-1}$.
- Vitesse du jet $\gamma \approx 2 - 10$.
- Masse du trou noir $\sim 10^9 M_\odot$.
- Spin ($a \sim 0.6$ Mertens et al. 2016 / ~ 0.9 Tamburini 2019).
- Âge > 0.1 Gyr (Batcheldor 2010).
- Champ magnétique $\approx 1 - 15\text{G}$ at $10r_s$ (Kino et al. 2014).
- Grande variabilité proche du trou noir.

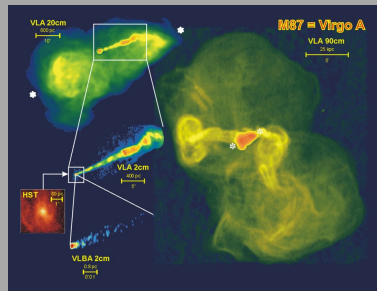


Image radio VLA/VLBA de la galaxie M87 à différentes échelles (F. Owen, J. Biretta, J. Eilek, & N. Kassim)

Structure d'un jet

- Plusieurs composantes :
 - Disque d'accrétion.
 - Coeur du jet : Leptonique.
 - Vent de disque : Hadronique.
- Création de paires.

Le fluide magnétisé avec injection

Cadre général relativiste

Physique impliquée

- Fluide : $\mathbf{T}_{\text{FL}} = \rho_0 \xi c^2 \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P \mathbf{g}$.
- Champ électromagnétique :

$$T_{\text{EM}}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left[F_{\mu\alpha} F^{\mu}_{\beta} - \frac{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{4} g_{\alpha\beta} \right].$$
- Photons et radiation : \mathbf{T}_{Rad} .
- Compacité $\frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4} \frac{E}{L}$ négligeable devant celle du trou noir \Rightarrow espace temps de Kerr.

Espace temps et Formalisme 3+1

- Feuilletage avec la coordonnée t de Boyer-Lindquist :
- Observateur privilégié :

Symétrie et conduction

- Axisymétrie ($\eta \propto \partial_t$) et stationnarité ($\xi \propto \partial_\varphi$)
- Conduction idéale : $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \cdot) = 0$.

Cadre général relativiste

Physique impliquée

- Fluide : $\mathbf{T}_{\text{FL}} = \rho_0 \xi c^2 \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P \mathbf{g}$.
- Champ électromagnétique :

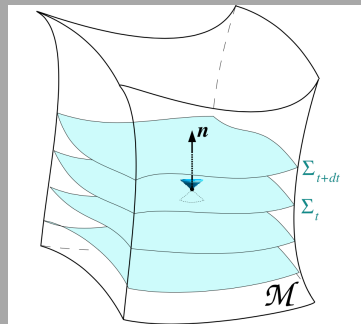
$$T_{\text{EM}}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left[F_{\mu\alpha} F^{\mu\beta} - \frac{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{4} g_{\alpha\beta} \right].$$
- Photons et radiation : \mathbf{T}_{Rad} .
- Compacité $\frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4} \frac{E}{L}$ négligeable devant celle du trou noir \Rightarrow espace temps de Kerr.

Espace temps et Formalisme 3+1

- Feuilletage avec la coordonnée t de Boyer-Lindquist : $\mathcal{M} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t$.
 - Observateur privilégié : $h\mathbf{n} = \boldsymbol{\eta} + \frac{\boldsymbol{\omega}}{c} \boldsymbol{\xi}$
- Explication :** $h = \frac{d\tau}{dt}$ rapport entre temps propre du ZAMO et temps des coordonnées, $\boldsymbol{\omega}$ pulsation de glissement des coordonnées.

Symétrie et conduction

- Axisymétrie ($\boldsymbol{\eta} \propto \partial_\phi$) et stationnarité ($\boldsymbol{\xi} \propto \partial_t$)
- Conduction idéale : $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \cdot) = 0$.



Feuilletage de l'espace-temps (Gourgoulhon 3+1 Formalism)

Cadre général relativiste

Physique impliquée

- Fluide : $\mathbf{T}_{\text{FL}} = \rho_0 \xi c^2 \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P \mathbf{g}$.
- Champ électromagnétique :

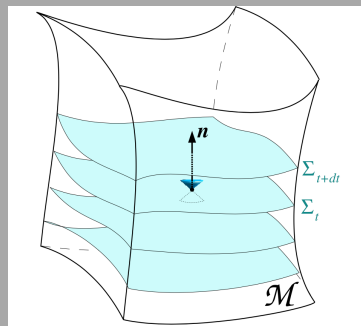
$$T_{\text{EM}}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left[F_{\mu\alpha} F^{\mu\beta} - \frac{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{4} g_{\alpha\beta} \right].$$
- Photons et radiation : \mathbf{T}_{Rad} .
- Compacité $\frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4} \frac{E}{L}$ négligeable devant celle du trou noir \Rightarrow espace temps de Kerr.

Espace temps et Formalisme 3+1

- Feuilletage avec la coordonnée t de Boyer-Lindquist : $\mathcal{M} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t$.
- Observateur privilégié : $h\mathbf{n} = \boldsymbol{\eta} + \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\xi}$
- Décomposition des espaces tangents, des quantités et de la dérivée covariante.

Symétrie et conduction

- Axisymétrie ($\boldsymbol{\eta} \propto \partial_t$) et stationnarité ($\boldsymbol{\xi} \propto \partial_\varphi$)
- Conduction idéale : $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \cdot) = 0$.



Feuilletage de l'espace-temps (Gourgoulhon 3+1 Formalism)

Décomposition 3+1 de la MHD (axisymétrie, stationnarité et idéalité) en espace-temps de Kerr (1)

Champ électromagnétique

- Tenseur électromagnétique : $\mathbf{F} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} + {}^4\epsilon(\mathbf{n}, \mathbf{B}, \cdot, \cdot)$

Remarque : \mathbf{E} (resp. \mathbf{B}) est le champ électrique (resp. champ magnétique) mesuré par le ZAMO.

- Equations de Maxwell (unité cgs) :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \operatorname{rot} h \mathbf{E} = \left(\mathbf{B} \cdot \nabla \frac{\omega}{c} \right) \varpi \epsilon_\phi \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho_e & \operatorname{rot} h \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \left(\mathbf{E} \cdot \nabla \frac{\omega}{c} \right) \varpi \epsilon_\phi \end{cases}$$

Remarque : L'expression des opérateurs est liée à la géométrie de la feuille d'espace Σ_t . Les théorèmes de Stokes et de Green-Ostrogradskii restent valables.

Champ de vitesse et conduction idéale

- Quadri-vitesse : $\mathbf{u} = \gamma \left(\mathbf{n} + \frac{\mathbf{V}}{c} \right)$

Décomposition 3+1 de la MHD (axisymétrie, stationnarité et idéalité) en espace-temps de Kerr (1)

Champ électromagnétique

- Tenseur électromagnétique : $\mathbf{F} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} + {}^4\epsilon(\mathbf{n}, \mathbf{B}, \cdot, \cdot)$
- Équations de Maxwell (unité cgs) :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \operatorname{rot} h \mathbf{E} = \left(\mathbf{B} \cdot \nabla \frac{\omega}{c} \right) \varpi \epsilon_\phi \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho_e & \operatorname{rot} h \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \left(\mathbf{E} \cdot \nabla \frac{\omega}{c} \right) \varpi \epsilon_\phi . \end{cases}$$

Remarque : L'expression des opérateurs est liée à la géométrie de la feuille d'espace Σ_t . Les théorèmes de Stokes et de Green-Ostrogradskii restent valables.

Champ de vitesse et conduction idéale

- Quadri-vitesse : $\mathbf{u} = \gamma \left(\mathbf{n} + \frac{\mathbf{V}}{c} \right)$.
- Conduction idéale : $\mathbf{0} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c}$.

Décomposition 3+1 de la MHD (axisymétrie, stationnarité et idéalité) en espace-temps de Kerr (1)

Champ électromagnétique

- Tenseur électromagnétique : $\mathbf{F} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} + {}^4 \epsilon(\mathbf{n}, \mathbf{B}, \cdot, \cdot)$
- Équations de Maxwell (unité cgs) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho_e \end{array} \right. \quad \operatorname{rot} \underbrace{h}_{\text{Lapse}} \mathbf{E} = \underbrace{\left(\mathbf{B} \cdot \nabla \frac{\omega}{c} \right)}_{\text{Glissement}} \varpi \epsilon_\phi$$

$$\operatorname{rot} \underbrace{h}_{\text{Lapse}} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \underbrace{\left(\mathbf{E} \cdot \nabla \frac{\omega}{c} \right)}_{\text{Glissement}} \varpi \epsilon_\phi .$$

Champ de vitesse et conduction idéale

- Quadri-vitesse : $\mathbf{u} = \gamma \left(\mathbf{n} + \frac{\mathbf{V}}{c} \right)$
- Conduction idéale : $\mathbf{0} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c}$

Décomposition 3+1 de la MHD (axisymétrie, stationnarité et idéalité) en espace-temps de Kerr (1)

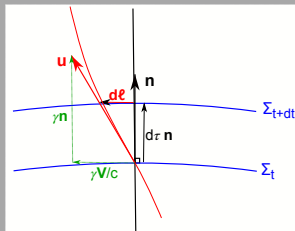
Champ électromagnétique

- Tenseur électromagnétique : $\mathbf{F} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} + {}^4\epsilon(\mathbf{n}, \mathbf{B}, \cdot, \cdot)$
- Équations de Maxwell (unité cgs) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \operatorname{rot} \boxed{h} \mathbf{E} = \boxed{\left(\mathbf{B} \cdot \nabla \frac{\omega}{c} \right) \varpi \epsilon_{\phi}} \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho_e & \operatorname{rot} \boxed{h} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \boxed{\left(\mathbf{E} \cdot \nabla \frac{\omega}{c} \right) \varpi \epsilon_{\phi}} . \end{array} \right.$$

Champ de vitesse et conduction idéale

- Quadri-vitesse : $\mathbf{u} = \gamma \left(\mathbf{n} + \frac{\mathbf{V}}{c} \right)$.
- Remarque : \mathbf{V} vitesse mesurée par le ZAMO.
- Conduction idéale : $\mathbf{0} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c}$



Décomposition 3+1 de la MHD (axisymétrie, stationnarité et idéalité) en espace-temps de Kerr (1)

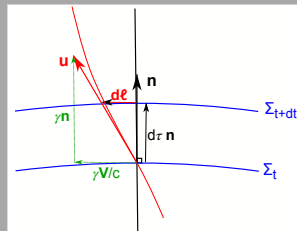
Champ électromagnétique

- Tenseur électromagnétique : $\mathbf{F} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} + {}^4\epsilon(\mathbf{n}, \mathbf{B}, \cdot, \cdot)$
- Équations de Maxwell (unité cgs) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \operatorname{rot} \boxed{h} \mathbf{E} = \boxed{\left(\mathbf{B} \cdot \nabla \frac{\omega}{c} \right) \varpi \epsilon_{\phi}} \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho_e & \operatorname{rot} \boxed{h} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \boxed{\left(\mathbf{E} \cdot \nabla \frac{\omega}{c} \right) \varpi \epsilon_{\phi}} . \end{array} \right.$$

Champ de vitesse et conduction idéale

- Quadri-vitesse : $\mathbf{u} = \gamma \left(\mathbf{n} + \frac{\mathbf{V}}{c} \right)$.
 - Conduction idéale : $\mathbf{0} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c}$
- Remarque : Flux gelé toujours valable.



Décomposition 3+1 de la MHD (axisymétrie, stationnarité et idéalité) en espace-temps de Kerr (2)

Conservation...

- Processus de création de paires (ex : $\gamma + \gamma \Rightarrow e_+ + e_- \dots$) \Rightarrow la masse n'est plus conservée :

$$\operatorname{div}(\rho_0 h \gamma \mathbf{V}_p) = c h k_m$$

- **Remarque 1 :** ck_m est le taux de masse injecté par unité de volume pour un observateur lié au fluide, hck_m est le taux de masse injecté par unité de volume pour le ZAMO.
- **Remarque 2 :** Si $\gamma + \gamma \Rightarrow e_+ + e_-$ est l'unique processus en jeu et k_m peut être lié au quadri-courant de la radiation.

Équation d'Euler

- Le rayonnement est traité comme un terme source : $\mathbf{k} = -\nabla \cdot \mathbf{T}_{\text{rad}}$
- Projection "spatiale" de $\nabla \cdot \mathbf{T}_{\text{MHD}} = \mathbf{k}$:

$$\underbrace{\rho_0 \gamma (\mathbf{V} \cdot \nabla)}_{\text{Inertie}} + \rho_0 \zeta \gamma^2 \underbrace{\gamma^2 \nabla \ln h}_{\text{Inertie}} + \frac{\omega \omega V \phi^2}{\omega} \nabla \ln \omega + \nabla P = \rho_c \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} + \underbrace{\mathbf{p}(\mathbf{k}) - \gamma \zeta k_m c \mathbf{V}}_{\text{Rayonnement}}$$

Décomposition 3+1 de la MHD (axisymétrie, stationnarité et idéalité) en espace-temps de Kerr (2)

Conservation...

- Processus de création de paires (ex : $\gamma + \gamma \Rightarrow e_+ + e_- \dots$) \Rightarrow la masse n'est plus conservée :

$$\operatorname{div}(\rho_0 h \gamma \mathbf{V}_p) = c h k_m$$

Équation d'Euler

- Le rayonnement est traité comme un terme source : $\mathbf{k} = -\nabla \cdot \mathbf{T}_{\text{rad}}$
- Projection "spatiale" de $\nabla \cdot \mathbf{T}_{\text{MHD}} = \mathbf{k}$:

$$\underbrace{\rho_0 \gamma (\mathbf{V} \cdot \nabla) (\gamma \xi \mathbf{V})}_{\text{Inertie}} + \rho_0 \xi \gamma^2 \left[\underbrace{c^2 \nabla \ln h}_{\text{Gravité}} + \underbrace{\frac{\varpi \omega V \hat{\phi}}{h} \nabla \ln \omega}_{\text{Frame-Dragging}} \right] + \nabla P = \rho_e \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} + \underbrace{\mathbf{p}(\mathbf{k}) - \gamma \xi k_m c \mathbf{V}}_{\text{Force radiative}}$$

Équation enthalpique (projection le long de \mathbf{u} de $\nabla \cdot \mathbf{T}_{\text{MHD}} = \mathbf{k}$)

$$\mathbf{V}_p \cdot \nabla P = \rho_0 c^2 \mathbf{V}_p \cdot \nabla \xi + c \underbrace{\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} + \xi c^2 k_m}{\gamma}}_{\text{Chauffage radiatif}}$$

Décomposition 3+1 de la MHD (axisymétrie, stationnarité et idéalité) en espace-temps de Kerr (2)

Conservation...

- Processus de création de paires (ex : $\gamma + \gamma \Rightarrow e_+ + e_- \dots$) \Rightarrow la masse n'est plus conservée :

$$\text{div}(\rho_0 h \gamma \mathbf{V}_p) = c h k_m$$

Équation d'Euler

- Le rayonnement est traité comme un terme source : $\mathbf{k} = -\nabla \cdot \mathbf{T}_{\text{rad}}$
- Projection "spatiale" de $\nabla \cdot \mathbf{T}_{\text{MHD}} = \mathbf{k}$:

$$\underbrace{\rho_0 \gamma (\mathbf{V} \cdot \nabla) (\gamma \xi \mathbf{V})}_{\text{Inertie}} + \rho_0 \xi \gamma^2 \left[\underbrace{c^2 \nabla \ln h}_{\text{Gravité}} + \underbrace{\frac{\varpi \omega V^{\hat{\phi}}}{h} \nabla \ln \omega}_{\text{Frame-Dragging}} \right] + \nabla P = \rho_e \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} + \underbrace{\mathbf{p}(\mathbf{k}) - \gamma \xi k_m c \mathbf{V}}_{\text{Force radiative}}$$

Équation enthalpique (projection le long de \mathbf{u} de $\nabla \cdot \mathbf{T}_{\text{MHD}} = \mathbf{k}$)

$$\mathbf{V}_p \cdot \nabla P = \rho_0 c^2 \mathbf{V}_p \cdot \nabla \xi + c \underbrace{\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} + \xi c^2 k_m}{\gamma}}_{\text{Chauffage radiatif}}$$

Intégrales premières.

Tubes de flux, isorotation et courant

- Maxwell Gauss \oplus symétrie $\Rightarrow \exists A$ (flux magnétique) tel que $\varpi \mathbf{B}_p = \nabla A \times \mathbf{e}_\varphi$.
- Équations de base \oplus hypothèse \Rightarrow lignes de champ de \mathbf{V} et $\mathbf{B} \in$ tube de flux.
- Maxwell Ampère \oplus hypothèse $\Rightarrow 2I = h\varpi c B_\varphi$.
- Maxwell Faraday \oplus idéalité $\Rightarrow \exists \Omega(A)$ (isorotation) tel que $\mathbf{E} = -\frac{\Omega - \omega}{hc} \nabla A$.

Intégrales premières

- Flux de masse par unité de flux magnétique : $\Psi_A = \frac{dM}{dA} = 4\pi\rho_0\gamma h \frac{V_p}{B_b}$.
- Moment angulaire spécifique : $L = \varpi \left(\gamma \xi V^\phi - \frac{h B^\phi}{\Psi_A} \right)$.
- Énergie par unité de flux magnétique :

$$\Psi_A \mathcal{E}(A) = \underbrace{\Psi_A \gamma \xi h c^2 \left(1 + \frac{\varpi \omega V^\phi}{h c^2} \right)}_{\text{énergie fluide}} \underbrace{\left(-h \varpi \Omega B^\phi \right)}_{\text{Flux de Poynting}}$$

Intégrales premières.

Tubes de flux, isorotation et courant

- Maxwell Gauss \oplus symétrie $\Rightarrow \exists A$ (flux magnétique) tel que $\varpi \mathbf{B}_p = \nabla A \times \mathbf{e}_\varphi$.
- Équations de base \oplus hypothèse \Rightarrow lignes de champ de \mathbf{V} et $\mathbf{B} \in$ tube de flux.
- Maxwell Ampère \oplus hypothèse $\Rightarrow 2I = h\varpi c B_\varphi$.
- Maxwell Faraday \oplus idéalité $\Rightarrow \exists \Omega(A)$ (isorotation) tel que $\mathbf{E} = -\frac{\Omega - \omega}{hc} \nabla A$.

Intégrales premières

- Flux de masse par unité de flux magnétique : $\Psi_A = \frac{dM}{dA} = 4\pi\rho_0\gamma h \frac{V_p}{B_b}$.
- Moment angulaire spécifique : $L = \varpi \left(\gamma \xi V^{\hat{\phi}} - \frac{h B^{\hat{\phi}}}{\Psi_A} \right)$.
- Énergie par unité de flux magnétique :

$$\Psi_A \mathcal{E}(A) = \underbrace{\Psi_A \gamma \xi h c^2 \left(1 + \frac{\varpi \omega V^{\hat{\phi}}}{h c^2} \right)}_{\text{énergie fluide}} \underbrace{\left(-h \varpi \Omega B^{\hat{\phi}} \right)}_{\text{Flux de Poynting}}$$

Injection de masse, de moment angulaire et d'énergie.

Nécessité de l'injection

- On montre que $\mathbf{B}_p \cdot \nabla \Psi_A = 4\pi h c k_m$.
- Remarque :** sans injection le flux de masse est conservé le long du tube.

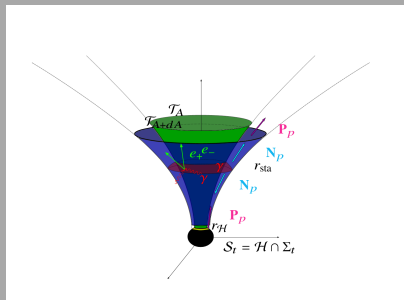
Non conservation des intégrales premières.

- Injection de masse :
 $\mathbf{B}_p \cdot \nabla \Psi_A = 4\pi c h k_m$.
- Moment angulaire spécifique :

$$h\mathbf{M}_p = \frac{\Psi_A L}{4\pi c} \mathbf{B}_p \Rightarrow \mathbf{B}_p \cdot \nabla \Psi_A L = 4\pi h (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi})$$

- Énergie spécifique :

$$h\mathbf{P}_p = \frac{\Psi_A E}{4\pi c} \mathbf{B}_p \Rightarrow \mathbf{B}_p \cdot \nabla \Psi_A E = -4\pi c h (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\eta})$$



Tube de flux.

Remarques immédiates

- L'injection de paires apporte la masse, le moment angulaire et l'énergie.
- $\Psi_A < 0$ sur l'horizon.
- k_m doit être suffisant pour « renverser » l'écoulement.

Injection de masse, de moment angulaire et d'énergie.

Nécessité de l'injection

- On montre que $\mathbf{B}_p \cdot \nabla \Psi_A = 4\pi h c k_m$.
- Remarque :** sans injection le flux de masse est conservé le long du tube.

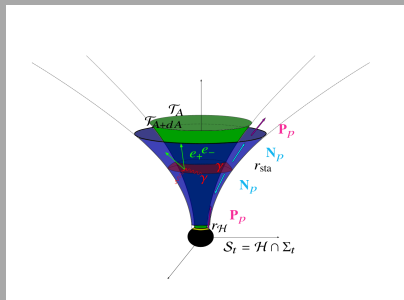
Non conservation des intégrales premières.

- Injection de masse :
 $\mathbf{B}_p \cdot \nabla \Psi_A = 4\pi c h k_m$.
- Moment angulaire spécifique :

$$h\mathbf{M}_p = \frac{\Psi_A L}{4\pi c} \mathbf{B}_p \Rightarrow \mathbf{B}_p \cdot \nabla \Psi_A L = 4\pi h (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi})$$

- Énergie spécifique :

$$h\mathbf{P}_p = \frac{\Psi_A E}{4\pi c} \mathbf{B}_p \Rightarrow \mathbf{B}_p \cdot \nabla \Psi_A E = -4\pi c h (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\eta})$$



Tube de flux.

Remarques immédiates

- L'injection de paires apporte la masse, le moment angulaire et l'énergie.
- $\Psi_A < 0$ sur l'horizon.
- k_m doit être suffisant pour « renverser » l'écoulement.

Injection de masse, de moment angulaire et d'énergie.

Nécessité de l'injection

- On montre que $\mathbf{B}_p \cdot \nabla \Psi_A = 4\pi h c k_m$.
- **Remarque** : sans injection le flux de masse est conservé le long du tube.

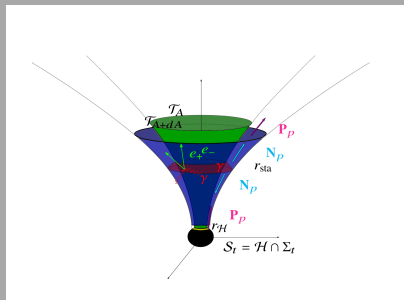
Non conservation des intégrales premières.

- Injection de masse :
 $\mathbf{B}_p \cdot \nabla \Psi_A = 4\pi c h k_m$.
- Moment angulaire spécifique :

$$h\mathbf{M}_p = \frac{\Psi_A L}{4\pi c} \mathbf{B}_p \Rightarrow \mathbf{B}_p \cdot \nabla \Psi_A L = 4\pi h (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi})$$

- Énergie spécifique :

$$h\mathbf{P}_p = \frac{\Psi_A E}{4\pi c} \mathbf{B}_p \Rightarrow \mathbf{B}_p \cdot \nabla \Psi_A E = -4\pi c h (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\eta})$$



Tube de flux.

Remarques immédiates

- L'injection de paires apporte la masse, le moment angulaire et l'énergie.
- $\Psi_A < 0$ sur l'horizon.
- k_m doit être suffisant pour « renverser » l'écoulement.

Injection et extraction.

Conséquences immédiates.

$$\Psi_A \gamma \xi h c^2 \left(1 + \frac{\varpi \omega V^{\hat{\phi}}}{h c^2} \right) - h \varpi \Omega B^{\hat{\phi}} = \Phi_{FL} + \Phi_{EM}$$

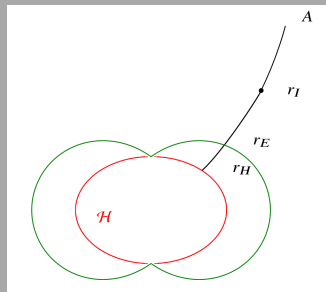
- Pas d'extraction sur l'axe.
- Penrose fluide.
- Extraction via flux de Poynting.

Poynting ?

- Condition au bord : $hB^{\varphi} + hE^{\theta} = O(h)$ [Znajek, 1977] \Rightarrow

$$\Phi_{EM} = \frac{\varpi \Omega (\omega_H - \Omega)}{c} (\partial_{\theta} A)^2$$

- Condition d'extraction : $0 \leq \Omega \leq \omega_H$.
- Remarque : dépendance en a et θ .



Cas pure fluide.

Cas pure fluide.

- $k_m, \mathbf{k} = 0$ au voisinage de l'horizon.
- $\Psi_A E = -\Psi_A \xi c^2 (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta})$.
- Condition nécessaire : Injection dans l'ergosphère.

Injection et extraction.

Conséquences immédiates.

$$\Psi_A \gamma \xi h c^2 \left(1 + \frac{\varpi \omega V^{\hat{\phi}}}{h c^2} \right) - h \varpi \Omega B^{\hat{\phi}} = \Phi_{\text{FL}} + \Phi_{\text{EM}}$$

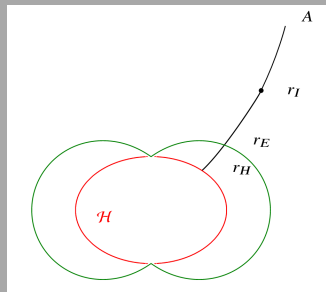
- Pas d'extraction sur l'axe.
- Penrose fluide.
- Extraction via flux de Poynting.

Poynting ?

- Condition au bord : $hB^\varphi + hE^\theta = O(h)$ [Znajek, 1977] \Rightarrow

$$\Phi_{\text{EM}} = \frac{\varpi \Omega (\omega_H - \Omega)}{c} (\partial_\theta A)^2$$

- **Condition d'extraction** : $0 \leq \Omega \leq \omega_H$.
- **Remarque** : dépendance en a et θ .



Cas pure fluide.

Cas pure fluide.

- $k_m, \mathbf{k} = 0$ au voisinage de l'horizon.
- $\Psi_A E = -\Psi_A \xi c^2 (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta})$.
- Condition nécessaire : Injection dans l'ergosphère.

Injection et extraction.

Conséquences immédiates.

$$\Psi_A \gamma \xi h c^2 \left(1 + \frac{\varpi \omega V \hat{\phi}}{h c^2} \right) - h \varpi \Omega B^{\hat{\phi}} = \Phi_{\text{FL}} + \Phi_{\text{EM}}$$

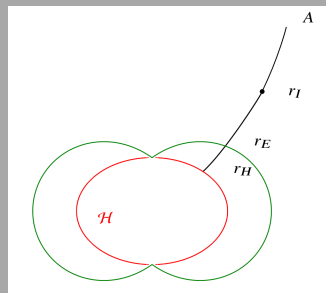
- Pas d'extraction sur l'axe.
- Penrose fluide.
- Extraction via flux de Poynting.

Poynting ?

- Condition au bord : $hB^\varphi + hE^\theta = O(h)$ [Znajek, 1977] \Rightarrow

$$\Phi_{\text{EM}} = \frac{\varpi \Omega (\omega_H - \Omega)}{c} (\partial_\theta A)^2$$

- **Condition d'extraction** : $0 \leq \Omega \leq \omega_H$.
- **Remarque** : dépendance en a et θ .



Cas pure fluide.

Cas pure fluide.

- $k_m, \mathbf{k} = 0$ au voisinage de l'horizon.
- $\Psi_A E = -\Psi_A \xi c^2 (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta})$.
- **Condition nécessaire** : Injection dans l'ergosphère.

Questions de représentation.

Les lignes de champ doivent entrer dans l'horizon orthogonalement à celui-ci.

Représentation conforme plane.

- Coordonnée radiale quasi-isotrope.
- Bonne représentation des angles.
- Bonne propriété des lignes de champ sur l'horizon.
- Facteur de conformité.

Plongement isométrique.

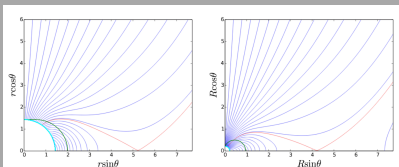
- Surface orthogonalement transitive.
- Gauss-Coddazzi.
- ↗ des « volumes » de l'ergorégion avec a .
- Non-existence du plongement « entier » pour $a \geq \sqrt{3}/2$.

Questions de représentation.

Les lignes de champ doivent entrer dans l'horizon orthogonalement à celui-ci.

Représentation conforme plane.

- Coordonnée radiale quasi-isotrope.
- Bonne représentation des angles.
- Bonne propriété des lignes de champ sur l'horizon.
- Facteur de conformité.



Comparaison entre les représentations naïve et conforme d'un champ avec magnétosphère pour $a = 0.9$
[Chantry et al., 2020].

Plongement isométrique.

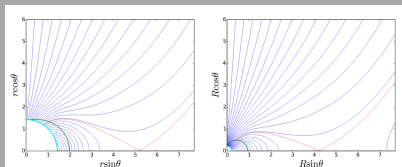
- Surface orthogonalement transitive.
- Gauss-Coddazzi.
- ↗ des « volumes » de l'ergorégion avec a .
- Non-existence du plongement « entier » pour $a \geq \sqrt{3}/2$.

Questions de représentation.

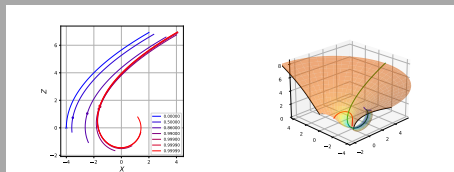
Les lignes de champ doivent entrer dans l'horizon orthogonalement à celui-ci.

Représentation conforme plane.

- Coordonnée radiale quasi-isotrope.
- Bonne représentation des angles.
- Bonne propriété des lignes de champ sur l'horizon.
- Facteur de conformité.



Comparaison entre les représentations naïve et conforme d'un champ avec magnétosphère pour $\alpha = 0.9$ [Chantry et al., 2020].



À gauche : profil de l'équateur du plongement isométrique pour différentes valeurs de α . À droite : plongement isométrique pour $\alpha = 0.99999$ [Chantry et al., 2021].

Plongement isométrique.

- Surface orthogonalement transitive.
- Gauss-Coddazzi.
- \nearrow des « volumes » de l'ergorégion avec α .
- Non-existence du plongement « entier » pour $\alpha \geq \sqrt{3}/2$.

Solutions auto-similaires d'écoulement entrant et sortant

Inversion des intégrales premières.

- Définitions :

$$x = \frac{\varpi(\Omega - \omega)}{hc}, \quad x_{\text{MR}}^2 = \frac{L(\Omega - \omega)}{(\mathcal{E} - L\omega)}, \quad M_{\text{Alf}}^2 = h^2 \frac{V_{\text{P}}^2}{V_{\text{Alf}}^2} = \frac{\xi \Psi_A^2}{4\pi\rho_0}.$$

- Le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} B^{\hat{\phi}} = \frac{-(\mathcal{E} - L\omega)\Psi_A}{cx} \frac{x^2 - x_{\text{MR}}^2}{M_{\text{Alf}}^2 - h^2(1 - x^2)} \\ \gamma\xi V^{\hat{\phi}} = \frac{(\mathcal{E} - L\omega)}{chx} \frac{M_{\text{Alf}}^2 x_{\text{MR}}^2 - (1 - x_{\text{MR}}^2)h^2 x^2}{M_{\text{Alf}}^2 - h^2(1 - x^2)} \\ \gamma h\xi = \frac{(\mathcal{E} - L\omega)}{c^2} \frac{M_{\text{Alf}}^2 - h^2(1 - x_{\text{MR}}^2)}{M_{\text{Alf}}^2 - h^2(1 - x^2)} \end{array} \right.$$

- Surface d'Alfvén modifiée :

$$\Sigma_{\text{alf}} = \left\{ M \in \Sigma \mid M_{\text{Alf}}^2 - \underbrace{h^2(1 - x^2)}_{\text{Cylindre de lumière}} = 0 \right\}$$

Hypothèse et construction du modèle (1)

Modèle d'autosimilarité méridionale

- Déterminer les dépendances en colatitude.
- Petite colatitude (ordre 2 de l'équation d'Euler).
- Flux magnétique $A \propto \varpi^2 / G^2(r)$.
- Surface d'Alfvén sphérique r_* $\Rightarrow M_{\text{Alf}} = m(r)(1 + m_1 \alpha + \dots)$.
- Permet de prendre en compte le champ électrique.

Forme des intégrales premières.

- Injection sur la surface de stationnarité : $k_m, \mathbf{k} = 0$.
- Flux de masse : $\Psi_A^2 = \Psi_A^2(0) (1 + \delta\alpha + \dots)$.
- Fonction d'isrotation : $\Omega = \Omega_* + \dots$
- Moment angulaire : $\Psi_A L = \lambda h_* B_* r_* \alpha + \dots$
- Flux d'énergie : $\Psi_A E = h_* \gamma_* \xi_* c^2 (1 + e_1 \alpha + \dots)$.

Thermodynamique.

- Hypothèse adiabatique ou polytropique remplacée par :

$$P(r, \alpha) = P_0 + \frac{B_*^2}{8\pi r_*} \Pi(r) (1 + \kappa \alpha).$$

- $\Rightarrow \xi \neq \xi_{\text{eq}} (P/\rho_0 c^2)$.
 - Fonction de distribution hors équilibre mais isotrope.
 - Énergie interne supplémentaire.

Hypothèse et construction du modèle (1)

Modèle d'autosimilarité méridionale

- Déterminer les dépendances en colatitude.
- Petite colatitude (ordre 2 de l'équation d'Euler).
- Flux magnétique $A \propto \varpi^2 / G^2(r)$.
- Surface d'Alfvén sphérique r_* \Rightarrow $M_{\text{Alf}} = m(r)(1 + m_1 \alpha + \dots)$.
- Permet de prendre en compte le champ électrique.

Forme des intégrales premières.

- Injection sur la surface de stationnarité : $k_m, \mathbf{k} = 0$.
- Flux de masse : $\Psi_A^2 = \Psi_A^2(0) (1 + \delta\alpha + \dots)$.
- Fonction d'isorotation : $\Omega = \Omega_* + \dots$
- Moment angulaire : $\Psi_A L = \lambda h_* B_* r_* \alpha + \dots$
- Flux d'énergie : $\Psi_A E = h_* \gamma_* \xi_* c^2 (1 + e_1 \alpha + \dots)$.

Thermodynamique.

- Hypothèse adiabatique ou polytropique remplacée par :

$$P(r, \alpha) = P_0 + \frac{B_*^2}{8\pi r_*} \Pi(r) (1 + \kappa \alpha).$$

- $\Rightarrow \xi \neq \xi_{\text{eq}} (P/\rho_0 c^2)$.

- Fonction de distribution hors équilibre mais isotrope.
- Énergie interne supplémentaire.

Hypothèse et construction du modèle (1)

Modèle d'autosimilarité méridionale

- Déterminer les dépendances en colatitude.
- Petite colatitude (ordre 2 de l'équation d'Euler).
- Flux magnétique $A \propto \varpi^2 / G^2(r)$.
- Surface d'Alfvén sphérique r_* \Rightarrow $M_{\text{Alf}} = m(r)(1 + m_1 \alpha + \dots)$.
- Permet de prendre en compte le champ électrique.

Forme des intégrales premières.

- Injection sur la surface de stationnarité : $k_m, \mathbf{k} = 0$.
- Flux de masse : $\Psi_A^2 = \Psi_A^2(0) (1 + \delta\alpha + \dots)$.
- Fonction d'isrotation : $\Omega = \Omega_* + \dots$
- Moment angulaire : $\Psi_A L = \lambda h_* B_* r_* \alpha + \dots$
- Flux d'énergie : $\Psi_A E = h_* \gamma_* \xi_* c^2 (1 + e_1 \alpha + \dots)$.

Thermodynamique.

- Hypothèse adiabatique ou polytropic remplacée par :

$$P(r, \alpha) = P_0 + \frac{B_*^2}{8\pi r_*} \Pi(r) (1 + \kappa \alpha).$$

- $\Rightarrow \xi \neq \xi_{\text{eq}} (P/\rho_0 c^2)$.
 - ☞ Fonction de distribution hors équilibre mais isotrope.
 - ☞ Énergie interne supplémentaire.

Hypothèses et construction du modèle (2)

- Toutes les quantités décrivant le fluide magnétisé sont écrites :
 - ☞ à l'ordre suffisant pour un DL à l'ordre 2 en θ de l'équation d'Euler.
 - ☞ avec 3 fonctions radiales inconnues : m^2, G^2, Π , 7 paramètres adimensionnés : $\lambda, \kappa, \delta, \nu, \mu, \ell, e_1$ et 2 paramètres dimensionnés : B_*, ρ_* .
- Chaque force s'écrit : $\mathcal{F} = -\frac{B_*^2}{4\pi r_*} \left[\frac{1}{2G^2} (\mathcal{X} + \theta^2 \mathcal{Y}) \epsilon_r + \frac{\sqrt{X_+}}{G^4} \mathcal{Z} \theta \epsilon_\theta \right] + O(\theta^3)$.
- Isolement des dérivées :

$$r \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} M^2 \\ G^2 \\ F \\ \Pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{N_{M^2}}{\mathcal{D}(M^2, G^2, F, \Pi, r)} \\ G^2 \left(\frac{2R^2}{R^2 + l^2} - F \right) \\ \frac{N_F}{\mathcal{D}(M^2, G^2, F, \Pi, r)} \\ \frac{N_\Pi}{\mathcal{D}(M^2, G^2, F, \Pi, r)} \end{pmatrix}.$$

- ☞ Les termes du système ne dépendent que de 4 fonctions et des 7 paramètres.
- ☞ Deux points critiques \Rightarrow franchissement = un paramètre en plus : Π_* .
- ☞ $\nu > 0$ décrit un écoulement sortant et $\nu < 0$ un écoulement entrant.
- ☞ Intégration (RK4) et franchissement des points singuliers automatisé.
- ☞ Minimisation des oscillations de l'écoulement sortant \Rightarrow fixe la valeurs de Π_* .
- ☞ Égalisation $\xi = \xi_{\text{eq}} (P/\rho_0 c^2)$ à l'infini fixe le rapport B_*^2/ρ_* .

Hypothèses et construction du modèle (2)

- Toutes les quantités décrivant le fluide magnétisé sont écrites :
 - ☞ à l'ordre suffisant pour un DL à l'ordre 2 en θ de l'équation d'Euler.
 - ☞ avec 3 fonctions radiales inconnues : m^2, G^2, Π , 7 paramètres adimensionnés : $\lambda, \kappa, \delta, \nu, \mu, \ell, e_1$ et 2 paramètres dimensionnés : B_*, ρ_* .
- Chaque force s'écrit : $\mathcal{F} = -\frac{B_*^2}{4\pi r_*} \left[\frac{1}{2G^2} (\mathcal{X} + \theta^2 \mathcal{Y}) \epsilon_r + \frac{\sqrt{X_+}}{G^4} \mathcal{Z} \theta \epsilon_\theta \right] + \mathcal{O}(\theta^3)$.
- Isolement des dérivées :

$$r \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} M^2 \\ G^2 \\ F \\ \Pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{N_{M^2}}{\mathcal{D}(M^2, G^2, F, \Pi, r)} \\ G^2 \left(\frac{2R^2}{R^2 + l^2} - F \right) \\ \frac{N_F}{\mathcal{D}(M^2, G^2, F, \Pi, r)} \\ \frac{N_\Pi}{\mathcal{D}(M^2, G^2, F, \Pi, r)} \end{pmatrix}$$

- ☞ Les termes du système ne dépendent que de 4 fonctions et des 7 paramètres.
- ☞ Deux points critiques \Rightarrow franchissement = un paramètre en plus : Π_* .
- ☞ $\nu > 0$ décrit un écoulement sortant et $\nu < 0$ un écoulement entrant.
- ☞ Intégration (RK4) et franchissement des points singuliers automatisé.
- ☞ Minimisation des oscillations de l'écoulement sortant \Rightarrow fixe la valeurs de Π_* .
- ☞ Égalisation $\xi = \xi_{\text{eq}} (P/\rho_0 c^2)$ à l'infini fixe le rapport B_*^2/ρ_* .

Hypothèses et construction du modèle (2)

- Toutes les quantités décrivant le fluide magnétisé sont écrites :
 - ☞ à l'ordre suffisant pour un DL à l'ordre 2 en θ de l'équation d'Euler.
 - ☞ avec 3 fonctions radiales inconnues : m^2, G^2, Π , 7 paramètres adimensionnés : $\lambda, \kappa, \delta, \nu, \mu, \ell, e_1$ et 2 paramètres dimensionnés : B_*, ρ_* .
- Chaque force s'écrit : $\mathcal{F} = -\frac{B_*^2}{4\pi r_*} \left[\frac{1}{2G^2} (\mathcal{X} + \theta^2 \mathcal{Y}) \epsilon_r + \frac{\sqrt{X_+}}{G^4} \mathcal{Z} \theta \epsilon_\theta \right] + \mathcal{O}(\theta^3)$.
- Isolement des dérivées :

$$r \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} M^2 \\ G^2 \\ F \\ \Pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{N}_{M^2}}{\mathcal{D}(M^2, G^2, F, \Pi, r)} \\ G^2 \left(\frac{2R^2}{R^2 + l^2} - F \right) \\ \frac{\mathcal{N}_F}{\mathcal{D}(M^2, G^2, F, \Pi, r)} \\ \frac{\mathcal{N}_\Pi}{\mathcal{D}(M^2, G^2, F, \Pi, r)} \end{pmatrix}.$$

- ☞ Les termes du système ne dépendent que de 4 fonctions et des 7 paramètres.
- ☞ Deux points critiques \Rightarrow franchissement = un paramètre en plus : Π_* .
- ☞ $\nu > 0$ décrit un écoulement sortant et $\nu < 0$ un écoulement entrant.
- ☞ Intégration (RK4) et franchissement des points singuliers automatisé.
- ☞ Minimisation des oscillations de l'écoulement sortant \Rightarrow fixe la valeurs de Π_* .
- ☞ Égalisation $\xi = \xi_{\text{eq}} (P/\rho_0 c^2)$ à l'infini fixe le rapport B_*/ρ_* .

Hypothèses et construction du modèle (2)

- Toutes les quantités décrivant le fluide magnétisé sont écrites :
 - ☞ à l'ordre suffisant pour un DL à l'ordre 2 en θ de l'équation d'Euler.
 - ☞ avec 3 fonctions radiales inconnues : m^2, G^2, Π , 7 paramètres adimensionnés : $\lambda, \kappa, \delta, \nu, \mu, \ell, e_1$ et 2 paramètres dimensionnés : B_*, ρ_*
- Chaque force s'écrit : $\mathcal{F} = -\frac{B_*^2}{4\pi r_*} \left[\frac{1}{2G^2} (\mathcal{X} + \theta^2 \mathcal{Y}) \epsilon_r + \frac{\sqrt{X_+}}{G^4} \mathcal{Z} \theta \epsilon_\theta \right] + \mathcal{O}(\theta^3)$.
- Isolement des dérivées :

$$r \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} M^2 \\ G^2 \\ F \\ \Pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{N}_{M^2}}{\mathcal{D}(M^2, G^2, F, \Pi, r)} \\ G^2 \left(\frac{2R^2}{R^2 + l^2} - F \right) \\ \frac{\mathcal{N}_F}{\mathcal{D}(M^2, G^2, F, \Pi, r)} \\ \frac{\mathcal{N}_\Pi}{\mathcal{D}(M^2, G^2, F, \Pi, r)} \end{pmatrix}.$$

- ☞ Les termes du système ne dépendent que de 4 fonctions et des 7 paramètres.
- ☞ Deux points critiques \Rightarrow franchissement = un paramètre en plus : Π_* .
- ☞ $\nu > 0$ décrit un écoulement sortant et $\nu < 0$ un écoulement entrant.

En bref,

- ☞ une solution de chute de paires est caractérisée par $8 + 2$ paramètres,
- ☞ une solution d'écoulement sortant (coeur de jet) est caractérisée par $7 + 1$ paramètres.

Une solution double.

Injection

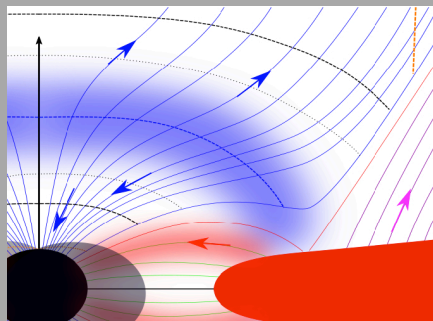
- Raccord d'une solution de chute de paires et d'un coeur de jet.

- Injection à la surface de stagnation :

$$\begin{cases} k_m = k_{m,sta}(\theta) \delta(r - r_{sta}) \\ \mathbf{k} = \mathbf{k}_{sta}(\theta) \delta(r - r_{sta}) \end{cases}$$

- Discontinuité de Ψ_A , Ψ_{AL} et Ψ_{AE} .

- 7 + 8 paramètres adimensionnés.



Vue schématique de l'écoulement dans la magnéto-sphère.

Conditions minimales pour le raccord des solutions

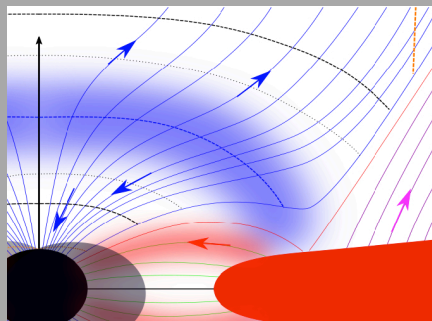
Quelles sont les conditions minimales de raccord entre la solution de chute de paires et la solution de coeur de jet? \Leftarrow Équations de Maxwell.

Une solution double.

Injection

- Raccord d'une solution de chute de paires et d'un coeur de jet.
- Injection à la surface de stagnation :

$$\begin{cases} k_m = k_{m,sta}(\theta) \delta(r - r_{sta}) \\ \mathbf{k} = \mathbf{k}_{sta}(\theta) \delta(r - r_{sta}) \end{cases}$$
- Discontinuité de Ψ_A , Ψ_{AL} et Ψ_{AE} .
- 7 + 8 paramètres adimensionnés.



Vue schématique de l'écoulement dans la magnéto-sphère.

Conditions minimales pour le raccord des solutions

Quelles sont les conditions minimales de raccord entre la solution de chute de paires et la solution de coeur de jet? \Leftarrow Équations de Maxwell.

Conditions de raccord.

Rayon de stagnation, masse et spin du trou noir.

- Même rayon de stagnation et même masse \Rightarrow **une** condition : $r_{sta}^{in} = r_{sta}^{out}$ implicite sur les paramètres adimensionnés.
- Même spin \Rightarrow **une** condition : $\mu_{in} \ell_{out} = \mu_{out} \ell_{in}$ explicite sur les paramètres adimensionnés.

Maxwell

- Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday \Leftrightarrow continuité du flux \mathbf{A} et de la fonction d'isopotential Ω .
 - Flux-magnétique \Rightarrow **une** condition sur les paramètres dimensionnés : B_*^{in} / B_*^{out} .
 - Isopotential \Rightarrow **une** condition explicite sur les paramètres adimensionnés.
- Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère \Rightarrow charges et courant de surface.

Conditions supplémentaires et degrés de liberté.

- **Une** condition sur μ (paramètre dimensionné) de façon à fixer $\mu_{in} \ell_{out} = \mu_{out} \ell_{in}$ [Kino et al., 2014].
- Rapport flux magnétique et flux de masse des paires : **une** condition sur les paramètres dimensionnés.
- $7+8$ paramètres adimensionnés - $1+2$ paramètres dimensionnés - 3 conditions sur les paramètres adimensionnés - 3 conditions sur les paramètres dimensionnés.

Conditions de raccord.

Rayon de stagnation, masse et spin du trou noir.

- ☞ Même rayon de stagnation et même masse \Rightarrow **une** condition : $r_{sta}^{in} = r_{sta}^{out}$ implicite sur les paramètres adimensionnés.
- ☞ Même spin \Rightarrow **une** condition : $\mu_{in} \ell_{out} = \mu_{out} \ell_{in}$ explicite sur les paramètres adimensionnés.

Maxwell

- Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday \Leftrightarrow continuité du flux A et de la fonction d'isrotation Ω .
 - ☞ Flux-magnétique \Rightarrow **une** condition sur les paramètres dimensionnés : $B_{\star}^{in} / B_{\star}^{out}$.
 - ☞ Isrotation \Rightarrow **une** condition explicite sur les paramètres adimensionnés.
- Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère \Rightarrow charges et courant de surface.

Conditions supplémentaires et degrés de liberté.

- **Une** condition sur μ (paramètre dimensionné) de façon à fixer $\mu_{in} \ell_{out} = \mu_{out} \ell_{in}$ [Kino et al., 2014].
- Rapport flux magnétique et flux de masse des paires : **une** condition sur les paramètres dimensionnés.
- $7+8$ paramètres adimensionnés + $1+2$ paramètres dimensionnés - 3 conditions sur les paramètres adimensionnés - 3 conditions sur les paramètres dimensionnés.

Conditions de raccord.

Rayon de stagnation, masse et spin du trou noir.

- ☞ Même rayon de stagnation et même masse \Rightarrow **une** condition : $r_{sta}^{in} = r_{sta}^{out}$ implicite sur les paramètres adimensionnés.
- ☞ Même spin \Rightarrow **une** condition : $\mu_{in} \ell_{out} = \mu_{out} \ell_{in}$ explicite sur les paramètres adimensionnés.

Maxwell

- Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday \Leftrightarrow continuité du flux A et de la fonction d'isrotation Ω .
 - ☞ Flux-magnétique \Rightarrow **une** condition sur les paramètres dimensionnés : $B_{\star}^{in} / B_{\star}^{out}$.
 - ☞ Isrotation \Rightarrow **une** condition explicite sur les paramètres adimensionnés.
- Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère \Rightarrow charges et courant de surface.

Conditions supplémentaires et degrés de liberté.

- **Une** condition sur B_{\star}^{in} (paramètre dimensionné) de façon à fixer $B_{axe}(20r_g) = 1G$ [Kino et al., 2014].
 - Rapport flux magnétique et flux de masse des paires : **une** condition sur les paramètres dimensionnés.
- 7+8 paramètres adimensionnés + 1+2 paramètres dimensionnés - 3 conditions sur les paramètres adimensionnés - 3 conditions sur les paramètres dimensionnés.

Conditions de raccord.

Rayon de stagnation, masse et spin du trou noir.

- ☞ Même rayon de stagnation et même masse \Rightarrow **une** condition : $r_{sta}^{in} = r_{sta}^{out}$ implicite sur les paramètres adimensionnés.
- ☞ Même spin \Rightarrow **une** condition : $\mu_{in} \ell_{out} = \mu_{out} \ell_{in}$ explicite sur les paramètres adimensionnés.

Maxwell

- Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday \Leftrightarrow continuité du flux A et de la fonction d'isrotation Ω .
 - ☞ Flux-magnétique \Rightarrow **une** condition sur les paramètres dimensionnés : $B_{\star}^{in} / B_{\star}^{out}$.
 - ☞ Isrotation \Rightarrow **une** condition explicite sur les paramètres adimensionnés.
- Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère \Rightarrow charges et courant de surface.

Conditions supplémentaires et degrés de liberté.

- **Une** condition sur B_{\star}^{in} (paramètre dimensionné) de façon à fixer $B_{axe}(20r_g) = 1G$ [Kino et al., 2014].
- Rapport flux magnétique et flux de masse des paires : **une** condition sur les paramètres dimensionnés.
- **7 + 8** paramètres adimensionnés + **1 + 2** paramètres dimensionnés - **3** conditions sur les paramètres adimensionnés - **3** conditions sur les paramètres dimensionnés.

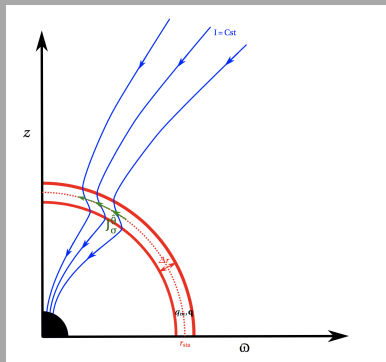
Injection et courant de surface dans la couche stationnaire.

Charges et courant de surface.

- Maxwell-Gauss et composantes toroïdales de Maxwell-Ampère \Rightarrow
 $\sigma_e c = -x J_\sigma^\varphi \propto -x(F_{\text{out}} - F_{\text{in}})$.
 - ☞ Ouverture ou fermeture des tubes à l'injection.
 - ☞ Position relative de la surface de corotation $x = 0$.

- Maxwell-Ampère méridionale :

$$I_{\text{in}} = I_{\text{out}} + 2\pi(r_{\text{sta}}^2 + r_g^2 a^2 \cos^2 \theta) \sin \theta J_\sigma^\theta.$$



Vue schématique de l'écoulement dans la magnéto-sphère.

Injection et Échelles caractéristiques.

■ Injection :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 M_{\text{Inj}}}{dt d\alpha} = \dot{M}_{\text{Inj}}^* \frac{4}{\mu_{\text{out}}^2} \left(\frac{G_{\text{out}}}{G_{\text{in}}} \right)^4 \left[\frac{c \Psi_A^{\text{out}}}{B_{\star}^{\text{out}}} - \left(\frac{G_{\text{in}}^2}{G_{\text{out}}^2} \right) \frac{c \Psi_A^{\text{in}}}{B_{\star}^{\text{in}}} \right] \\ \frac{d^2 J_{\text{Inj}}}{dt d\alpha} = \dot{J}_{\text{Inj}}^* \frac{8}{\mu_{\text{out}}^3} \left(\frac{G_{\text{out}}}{G_{\text{in}}} \right)^4 \left[\frac{\Psi_A^{\text{out}} L_{\text{out}}}{B_{\star}^{\text{out}} r_{\star}^{\text{out}}} - \left(\frac{\mu_{\text{out}} G_{\text{in}}^2}{\mu_{\text{in}} G_{\text{out}}^2} \right) \frac{\Psi_A^{\text{in}} L_{\text{in}}}{B_{\star}^{\text{in}} r_{\star}^{\text{in}}} \right] \\ \frac{d^2 E_{\text{Inj}}}{dt d\alpha} = \dot{E}_{\text{Inj}}^* \frac{4}{\mu_{\text{out}}^2} \left(\frac{G_{\text{out}}}{G_{\text{in}}} \right)^4 \left[\frac{\Psi_A^{\text{out}} \mathcal{E}_{\text{out}}}{B_{\star}^{\text{out}} c} - \left(\frac{G_{\text{in}}^2}{G_{\text{out}}^2} \right) \frac{\Psi_A^{\text{in}} \mathcal{E}_{\text{in}}}{B_{\star}^{\text{in}} c} \right] \end{array} \right.$$

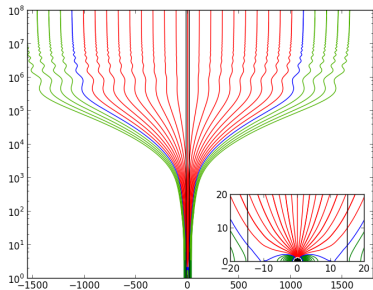
■ Constantes d'injection :

$$\dot{M}_{\text{Inj}}^* = \frac{r_g^2 B_{\star}^{\text{in}2}}{2c}, \quad \dot{J}_{\text{Inj}}^* = \frac{r_g^3 B_{\star}^{\text{in}2}}{2}, \quad \dot{E}_{\text{Inj}}^* = \frac{c r_g^2 B_{\star}^{\text{in}2}}{2}.$$

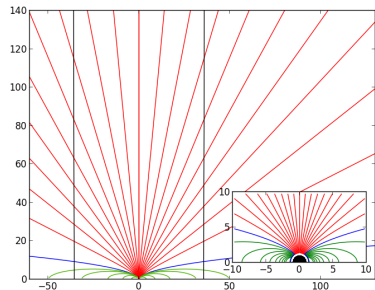
Résultats

Écoulements sortants (1).

Deux types de géométrie à l'infini.



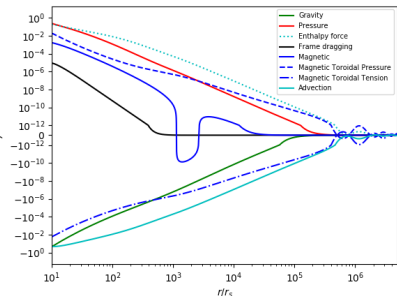
Une solution à géométrie cylindrique (K2).



Une solution à géométrie conique.

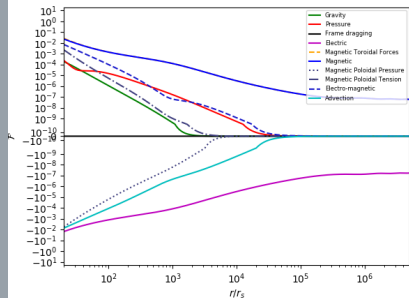
Écoulements sortants (2).

Dynamique et force de la solution K2.



Force longitudinale.

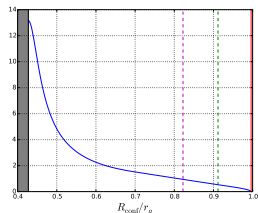
- Accélération principalement due à l'enthalpie : $\mathcal{F}_{\xi//} = -\rho_0 \gamma^2 (\mathbf{V}_P \cdot \nabla \xi) V_P = \gamma^2 \beta_P^2 \mathcal{F}_{P//}$.
- Décélération principalement due à la gravité.
- Équilibre pression et tension toroïdale.
- Rôle négligeable des forces magnétique et de Lense-Thirring.



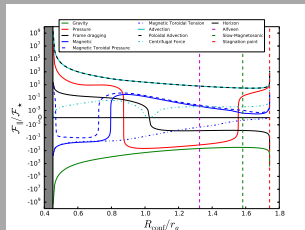
Force transversale.

- Équilibre transversal dominé par les forces électrique et magnétique.
- Collimation dominée par la force magnétique toroïdale.
- La force électrique remplace l'action de la force centrifuge dans les solutions de jets d'étoile jeune.
- Rôle négligeable des forces magnétique et de Lense-Thirring.

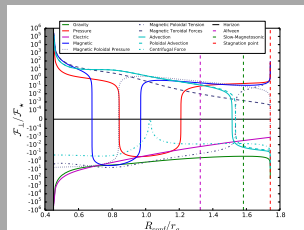
Cinétique et dynamique de l'écoulement entrant



Célérité $\gamma\beta$ de l'écoulement I3.



Force longitudinale de l'écoulement I2



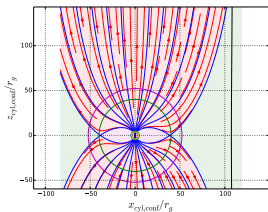
Force transversale de l'écoulement I2

- Facteur de Lorentz maximum atteint sur le pôle du TN
 $\gamma \sim 5 - 15$.
- Deux surfaces critiques (Alfvén et magnéto-sonique lente).

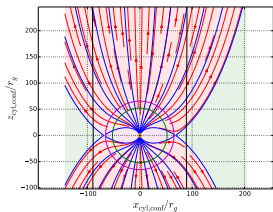
- Proche du point de stagnation :
 - Décollimation : gravité.
 - Collimation : force magnétique. poloïdale.
 - Accélération : gravité et pression

- Proche de l'horizon :
 - Décollimation : gravité et force électrique.
 - Collimation : force magnétique poloïdale et advection.
 - Accélération : pression.

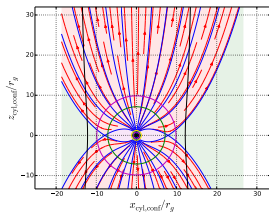
Géométrie de l'écoulement



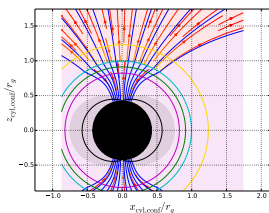
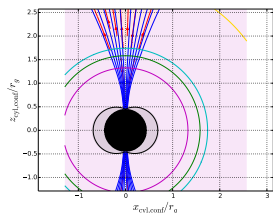
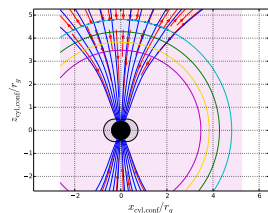
Solution M1.



Solution M2.

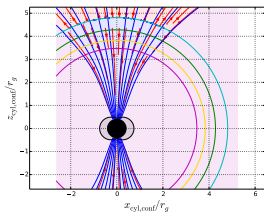
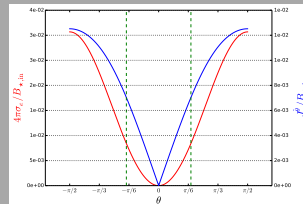
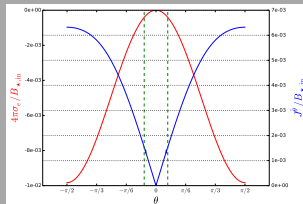
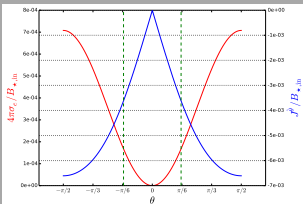


Solution M3.

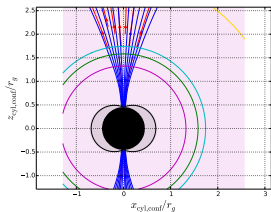


Solution	M1	M2	M3
r_{sta}/r_H	3.18	1.5	1.17
a	0.54	0.43	0.52
Ω/ω_H	6.2×10^{-2}	9.7×10^{-2}	0.5

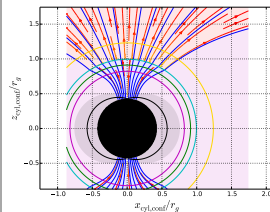
Courant et charges surfaciques.



Solution M1.



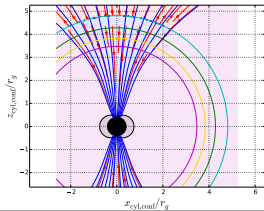
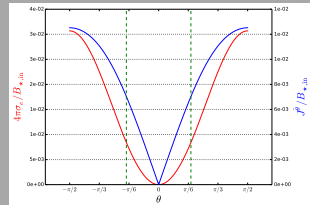
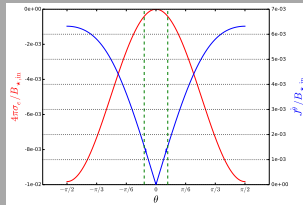
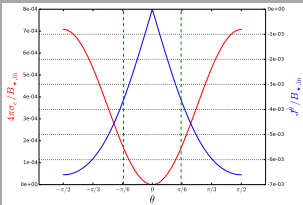
Solution M2.



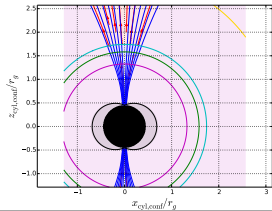
Solution M3.

- Pour M1 et M2 les lignes se referment $F_{in} \geq F_{out}$ pour M3 elles s'ouvrent $F_{in} < F_{out}$ à la surface de stagnation
- Surface de corotation au dessus de la surface de stationnarité pour M2 et M3 et au dessous pour M1
- $J_s^2 \geq 0 \Rightarrow$ augmentation du flux de Poynting

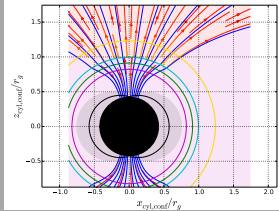
Courant et charges surfaciques.



Solution M1.



Solution M2.



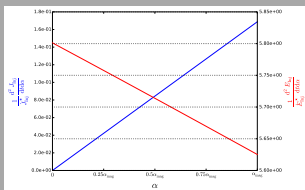
Solution M3.

- Pour M1 et M2 les lignes se referment $F_{in} \geq F_{out}$, pour M3 elles s'ouvrent $F_{in} \leq F_{out}$ à la surface de stagnation.
- Surface de corotation au dessus de la surface de stationnarité pour M2 et M3 et au dessous pour M1.
- $j_{\sigma}^{\theta} \geq 0 \Leftrightarrow$ augmentation du flux de Poynting.

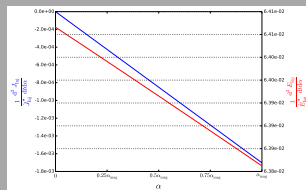
Injection de paires.

Masse de paires injectées estimée dans la magnétosphère de M87 à partir des photons durs émis par le disque : $\dot{M}_{\text{Inj}} = 10^8 - 10^{20} \text{ g.s}^{-1}$.

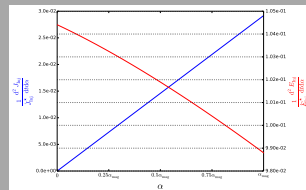
Solution	M1	M2	M3
B_{\star}^{in}	87 G	82 G	130 G
B_H	580 G	470 G	319 G
Masse injectée	$2.4 \times 10^{20} \text{ g.s}^{-1}$	$8,95 \times 10^{18} \text{ g.s}^{-1}$	$4,3 \times 10^{19} \text{ g.s}^{-1}$



Solution M1.

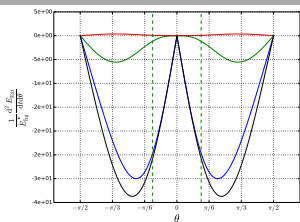


Solution M2.

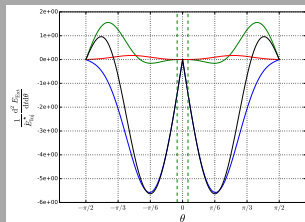


Solution M3.

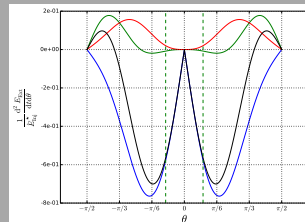
Échange avec le trou noir et comparaison avec l'injection.



Solution M1.



Solution M2.



Solution M3.

Solution	M1	M2	M3
$\dot{J}_{\text{Inj}} (\text{g.cm}^2.\text{s}^{-1})$	2.9×10^{47}	-2.7×10^{45}	1.1×10^{47}
$\dot{J}_{\text{H}} (\text{g.cm}^2.\text{s}^{-1})$	1.4×10^{47}	3.4×10^{45}	1.4×10^{47}
$\dot{E}_{\text{Inj}} (\text{erg.s}^{-1})$	5.9×10^{44}	6.2×10^{42}	2.4×10^{43}
$\dot{E}_{\text{H}} (\text{erg.s}^{-1})$	-5.9×10^{44}	-6.2×10^{42}	-2.2×10^{43}
$\dot{E}_{\text{Poy}} (\text{erg.s}^{-1})$	8.7×10^{41}	1.6×10^{39}	3.7×10^{41}
$\dot{E}_{\text{Out}} (\text{erg.s}^{-1})$	1.3×10^{42}	1.1×10^{39}	1.9×10^{42}

Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives (1).

Modèle et géométrie.

- Extension du modèle d'auto-similarité à la métrique de Kerr.
- Semi-analytique : intégration rapide.
- Effets du cylindre de lumière et du champ électrique.
- Écoulement proche de l'axe pour un jet spinal.

Écoulement sortant.

- Deux types de collimation à l'infini.
- Accélération enthalpique et collimation magnétique.
- Simulations 3D de jet à l'infini à partir de solutions semi-analytiques.

Chute de paires et écoulement double.

- Accélération par gravité et collimation magnétique poloidale.
- Stratification de la chute de paires.
- Extraction de moment angulaire du trou noir.
- Différent type d'interaction énergétique avec le TN.
- L'injection de paires peut apporter ou retirer du moment angulaire à l'écoulement.
- L'énergie des solutions doubles est dominée par l'injection de paires.
- Extraction d'énergie de rotation du trou noir via le flux de Poynting.

Conclusion et perspectives (1).

Modèle et géométrie.

- Extension du modèle d'auto-similarité à la métrique de Kerr.
- Semi-analytique : intégration rapide.
- Effets du cylindre de lumière et du champ électrique.
- Écoulement proche de l'axe pour un jet spinal.

Écoulement sortant.

- Deux types de collimation à l'infini.
- Accélération enthalpique et collimation magnétique.
- Simulations 3D de jet à l'infini à partir de solutions semi-analytiques.

Chute de paires et écoulement double.

- Accélération par gravité et collimation magnétique poloidale.
- Stratification de la chute de paires.
- Extraction de moment angulaire du trou noir.
- Différent type d'interaction énergétique avec le TN.
- L'injection de paires peut apporter ou retirer du moment angulaire à l'écoulement.
- L'énergie des solutions doubles est dominée par l'injection de paires.
- Extraction d'énergie de rotation du trou noir via le flux de Poynting.

Conclusion et perspectives (1).

Modèle et géométrie.

- Extension du modèle d'auto-similarité à la métrique de Kerr.
- Semi-analytique : intégration rapide.
- Effets du cylindre de lumière et du champ électrique.
- Écoulement proche de l'axe pour un jet spinal.

Écoulement sortant.

- Deux types de collimation à l'infini.
- Accélération enthalpique et collimation magnétique.
- Simulations 3D de jet à l'infini à partir de solutions semi-analytiques.

Chute de paires et écoulement double.

- Accélération par gravité et collimation magnétique poloïdale.
- Stratification de la chute de paires.
- Extraction de moment angulaire du trou noir.
- Différent type d'interaction énergétique avec le TN.
- L'injection de paires peut apporter ou retirer du moment angulaire à l'écoulement.
- L'énergie des solutions doubles est dominée par l'injection de paires.
- Extraction d'énergie de rotation du trou noir via le flux de Poynting.

Conclusion et perspectives (2).

Perspectives

- Combinaison du modèle de chute de paires près de l'axe avec un modèle d'accrétion proche du plan équatorial.
- Modélisation plus complexe de la magnétosphère et de l'accrétion autour d'un TN supermassif, pour l'imagerie de M87.
- Modèle auto-similaire contrôlé d'injection volumique de paires.
- Étude numérique d'un jet à deux composantes dans un milieu ambiant.

Fin

- James M. Bardeen, William H. Press, and Saul A. Teukolsky. Rotating Black Holes : Locally Nonrotating Frames, Energy Extraction, and Scalar Synchrotron Radiation. ApJ, 178 :347–370, December 1972. doi : 10.1086/151796.
- R. D. Blandford and R. L. Znajek. Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes. MNRAS, 179 :433–456, May 1977. doi : 10.1093/mnras/179.3.433.
- Loïc Chantry, Véronique Cayatte, and Christophe Sauty. Conformal representation of kerr space–time poloidal sub-manifolds. Classical and Quantum Gravity, 37(10) :105003, apr 2020. doi : 10.1088/1361-6382/ab8399. URL <https://doi.org/10.1088/1361-6382/ab8399>.
- Loïc Chantry, Frédéric Dauvergne, Youssef Temmam, and Véronique Cayatte. Quasi-isometric embedding of Kerr poloidal submanifolds. Classical and Quantum Gravity, 38(14) :145030, July 2021. doi : 10.1088/1361-6382/ac08a6.
- Demetrios Christodoulou. Reversible and irreversible transformations in black-hole physics. Phys. Rev. Lett., 25 :1596–1597, Nov 1970. doi :

10.1103/PhysRevLett.25.1596. URL
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.25.1596>.

M Kino, F Takahara, K Hada, and A Doi. Relativistic electrons and magnetic fields of the m87 jet on the 10 schwarzschild radii scale. The Astrophysical Journal, 786(1) :5, 2014.

J. P. Lasota, E. Gourgoulhon, M. Abramowicz, A. Tchekhovskoy, and R. Narayan. Extracting black-hole rotational energy : The generalized Penrose process. Phys. Rev. D, 89(2) :024041, January 2014. doi : 10.1103/PhysRevD.89.024041.

R. Penrose. Gravitational Collapse : the Role of General Relativity. Nuovo Cimento Rivista Serie, 1, 1969.

R. L. Znajek. Black hole electrodynamics and the Carter tetrad. MNRAS, 179 :457–472, May 1977. doi : 10.1093/mnras/179.3.457.

Annexe

Fluide relativiste et interactions entre espèce.

Physique statistique et termes sources.

- Fluide de paires et de photon.
- 3 Fonctions de distribution f_-, f_+, f_γ .
- Système d'équation de Boltzmann \Rightarrow équations de Maxwell-Enskog.
- Terme de collision déterminé par les sections efficaces différentiel.
- Prend en compte les interactions entre fluide : Compton, Compton inverse, Création annihilation de Paires.

Fluide hors équilibre isotrope.

- Fluide de paires :

$$(m_+ + m_-) f = m_+ f_+ + m_- f_-.$$

- Tenseur energie-impulsion :

$$\mathbf{T}_{FL} = mc^2 \int_{\mathbf{u}^3 \in \mathbb{R}^3} \delta^3 \mathbf{u} f \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}.$$

- $f \Rightarrow$ une quadri-vitesse fluide \mathbf{u}_F .
- **Hypothèse** : f isotrope dans le référentiel fluide :

$$\mathbf{u} = \gamma (\mathbf{u}_F + \mathbf{V}/c) \quad f(\mathbf{u}) = f(|\mathbf{V}|).$$

- Le tenseur energie-impulsion devient :

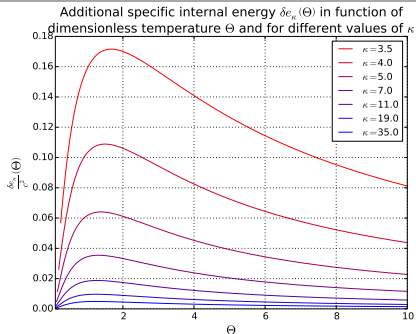
$$\mathbf{T} = \rho_0 \xi c^2 \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P \mathbf{g}.$$

- Expression de la densité, de l'enthalpie spécifique et de la pression dépendante de f .
- Température effective \Rightarrow comparaison avec un fluide à l'équilibre thermodynamique.
- Energie interne supplémentaire.
- Polytrope, fonction κ .
- Différent du chauffage.

Fluide relativiste et interactions entre espèce.

Physique statistique et termes sources.

- Fluide de paires et de photon.
- 3 Fonctions de distribution f_-, f_+, f_γ .
- Système d'équation de Boltzmann \Rightarrow équations de Maxwell-Enskog.
- Terme de collision déterminé par les sections efficaces différentiel.
- Prend en compte les interactions entre fluide : Compton, Compton inverse, Création annihilation de Paires.



Fluide hors équilibre isotrope.

- Fluide de paires :

$$(m_+ + m_-) f = m_+ f_+ + m_- f_-.$$

- Tenseur energie-impulsion :

$$\mathbf{T}_{\text{FL}} = mc^2 \int_{\mathbf{u}^i \in \mathbb{R}^3} \delta^3 u f \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}.$$

- $f \Rightarrow$ une quadri-vitesse fluide \mathbf{u}_F .
- **Hypothèse** : f isotrope dans le référentiel fluide :

$$\mathbf{u} = \gamma (\mathbf{u}_F + \mathbf{V}/c) \quad f(\mathbf{u}) = f(\|\mathbf{V}\|).$$



- Le tenseur energie-impulsion devient :

$$\mathbf{T} = \rho_0 \xi c^2 \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P \mathbf{g}.$$

- Expression de la densité, de l'enthalpie spécifique et de la pression dépendante de f .
- Température effective \Rightarrow comparaison avec un fluide à l'équilibre thermodynamique.
- Energie interne supplémentaire.
- Polytrope, fonction κ .
- Différent du chauffage.

Simulations (1).

Équilibre transverse.

- Solution MHD cylindrique de jets (indépendant de t, z, φ).
-  Équation d'états.
-  Loin de l'axe.
- A partir d'une solution auto-similaire, on construit un profilage cohérent des quantités MHD (3 composantes) :
 - ✦ Coeur.
 - ✦ Vents de disques.
 - ✦ Milieu ambient.
- Intègre l'équilibre transverse à partir d'une équation d'états donné (Taub-Mattews).
- Profil de coeur de jet loin de la source dépendant de paramètre déterminé prêt de la source.



Milieu ambient.

1. Propagation immédiate de B_z .
 - ✦ $\mathbf{B} = B_{z, jet}$.
 - ✦ $P + \frac{B^2}{8\pi} = \text{cst.}$
 - ✦ $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ et température constante.
2. « force free magneto-statique. »
 - ✦ Formalisme de Tanaka and Nakagawa [1973] pour le vents solaire.
 - ✦ Utilisation de fonction de Bessel.
 - ✦ Densité et pression constante.

Première étude de la propagation en milieu ambient d'un jet multi-composantes avec un coeur.

Simulations (1).

Équilibre transverse.

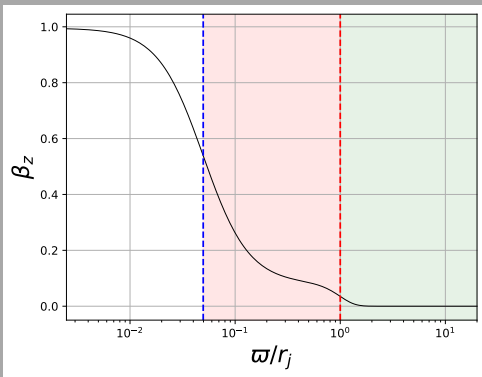
- Solution MHD cylindrique de jets (indépendant de t, z, φ).
-  Équation d'états.
-  Loin de l'axe.
- A partir d'une solution auto-similaire, on construit un profilage cohérent des quantités MHD (3 composantes) :
 - ☛ Coeur.
 - ☛ Vents de disques.
 - ☛ Milieu ambiant.
- Intègre l'équilibre transverse à partir d'une équation d'états donné (Taub-Mattews).
- Profil de coeur de jet loin de la source dépendant de paramètre déterminé prêt de la source.

Milieu ambiant.

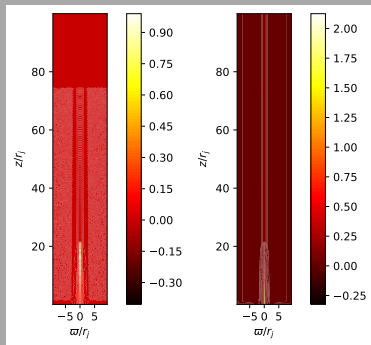
1. Propagation immédiate de B_z
 - ☛ $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{z,jet}$.
 - ☛ $P + \frac{B^2}{8\pi} = \text{cst.}$
 - ☛ $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ et température constante.
2. « force free magneto-statique. »
 - ☛ Formalisme de Tanaka and Nakagawa [1973] pour le vents solaire.
 - ☛ Utilisation de fonction de Bessel.
 - ☛ Densité et pression constante.

Première étude de la propagation en milieu ambiant d'un jet multi-composantes avec un coeur.

Simulations (2).



Profil transverse de la vitesse (en haut), isocontour du flux magnétique (en bas).



Première simulation (milieu ambiant de type 1). A gauche le profil de v_z , a droite celui de B_z .