Théorie de jauge de supergroupe: aspects non perturbatifs

Taro Kimura

Institut de Mathématiques de Bourgogne, Université Bourgogne Franche-Comté

Séminaire de Physique Théorique à IDP, 9 décembre 2021

Collaborations avec H.-Y. Chen, N. Lee, F. Nieri, V. Pestun, Y. Sugimoto

[1905.01513] [1908.04928] [2001.05735] [2003.13514] [2105.02776] (HDR mémoire [2012.11711])

Mots-clés de cet exposé

- Théorie de jauge de supergroupe : mal comportement ?
  - non unitaire, spectre illimité $\longrightarrow$ complétion non perturbatifs, théorie effective
- Super instantons et localisation de path intégrale
  - construction d'ADHM, espace des modules, fonction partition de Nekrasov
- Aspects non perturbatifs de théorie de jauge de supergroupe
  - géométrie de Seiberg–Witten, correspondence Bethe/Gauge, algèbre quantique, réalisation avec défauts d'intersection et D-branes

Table des matières

1. Introduction : Théorie de jauge de supergroupe
2. Super instanton et path intégrale
3. Aspects non perturbatifs
   - Géométrie de Seiberg–Witten
   - Défaut d'intersection et D-branes
4. Conclusion

Introduction

- Supersymètrie en physique
  - théorie de jauge, supergravité, supercordes, système aléatoire, gaz ultrafroids...
  - espace-temps vs espace-cible (espace interne)

- Super calcul
  - Super espace vectoriel : $(z_1, \ldots, z_{n_0}, \theta_1, \ldots, \theta_{n_1}) \in \mathbb{C}^{n_0|n_1} = \mathbb{C}^{n_0} \oplus \mathbb{C}^{n_1}$
  - Super matrice : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{n_0|n_1})$, $\begin{cases} A, D & \text{(pairs)} \\ B, C & \text{(impairs)} \end{cases}$
  - Super trace : $\mathrm{str}\, M = \mathrm{tr}\, A - \mathrm{tr}\, D$, Super dimension : $\mathrm{sdim}\, \mathbb{C}^{n_0|n_1} = \mathrm{str}\, \mathbb{1} = n_0 - n_1$

Théorie de jauge de supergroupe

- Théorie de jauge de supergroupe $G = \mathrm{U}(n_0|n_1)$, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{u}(n_0|n_1)$

$$
\begin{aligned}
S_{\mathsf{YM}} &= -\frac{1}{2g^2}\int \mathrm{str}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2g^2}\int \mathrm{tr}_{n_0}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \underbrace{+\frac{1}{2g^2}}_{\text{mal signature}} \int \mathrm{tr}_{n_1}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

  - Connexion : $A \in \begin{pmatrix} \mathfrak{u}(n_0)_{\mathsf{adj}} & \mathfrak{u}(n_0)\times\mathfrak{u}(n_1) \\ \mathfrak{u}(n_1)\times\mathfrak{u}(n_0) & \mathfrak{u}(n_1)_{\mathsf{adj}} \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ spin-1 boson et fermion

- spectre illimité; violation de spin-statistique $\longrightarrow$ aspects non perturbatifs ?

Table des matières

1. Introduction : Théorie de jauge de supergroupe
2. Super instanton et path intégrale
3. Aspects non perturbatifs
   - Géométrie de Seiberg–Witten
   - Défaut d'intersection et D-branes
4. Conclusion

Instanton

- Instanton = connexion ASDYM (4dim) : $*F = -F \quad (\iff F + *F =: F_+ = 0)$
  - Solution d'équation de mouvement : $D(*F) \overset{\text{ASD}}{=} -DF \overset{\text{Bianchi}}{=} 0,\ D = d + A$
  - 2ème classe de Chern : $c_2 = \dfrac{-1}{8\pi^2}\displaystyle\int \operatorname{tr} F \wedge F \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \qquad (\text{SD} : c_2 \in \mathbb{Z}_{\leq 0})$
- Path intégrale et somme des instantons
  - YM action et θ terme : $S = -\dfrac{1}{g^2}\displaystyle\int \operatorname{tr} F \wedge *F - \dfrac{\mathrm{i}\theta}{8\pi^2}\int \operatorname{tr} F \wedge F$
  - Développement autour k-instanton : $A = A_k + \delta A$ où $c_2[A_k] = k$
  - Constante complexe couplage : $\tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi^2 \mathrm{i}}{g^2} \quad (\operatorname{Im}\tau > 0),\ \ \mathfrak{q} = \exp(2\pi\mathrm{i}\tau)$

$$Z = \int DA\, \mathrm{e}^{-S[A]} = \sum_k \mathfrak{q}^k \underbrace{\int DA_k}_{\mathrm{vol}(\mathfrak{M}_{k,n})} \underbrace{\int D(\delta A) \mathrm{e}^{-S_{\text{fluc}}[\delta A]}}_{\text{perturbative}}$$

Construction d'ADHM

- Solution de k-instanton de $\mathrm{U}(n)$-YM [Atiyah–Hitchin–Drinfeld–Manin]
  - Espaces vectoriels : $K = \mathbb{C}^k$, $N = \mathbb{C}^n$
  - Variables ADHM : $B_{1,2} \in \mathrm{Hom}(K, K)$, $I \in \mathrm{Hom}(N, K)$, $J \in \mathrm{Hom}(K, N)$
  - Équation ADHM : $\mu_{\mathbb{R}} = 0$, $\mu_{\mathbb{C}} = 0$
    - Moment maps : $\mu_{\mathbb{R}} = [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J$, $\mu_{\mathbb{C}} = [B_1, B_2] + IJ$
- Espace des modules des instantons

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{k,n} &= \{A \in \Omega_1 \otimes \mathfrak{u}(n) \mid F_+ = 0,\ c_2[A] = k\}/\mathrm{U}(n) \\ &= \{(B_{1,2}, I, J) \mid \mu_{\mathbb{R}} = 0,\ \mu_{\mathbb{C}} = 0\}/\!\!/\!\!/\mathrm{U}(k)\end{aligned}$$

Construction d'ADHM

- Transforme Fourier–Mukai/Nahm (dualité T)

$$\begin{tikzcd}
k\text{-instanton} \quad \mathrm{U}(n)\text{-YM} \quad \text{sur} \quad \mathbb{T}^4 \text{ (radius } R) \arrow[r, "R\to\infty"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathbb{R}^4 \\
n\text{-instanton} \quad \mathrm{U}(k)\text{-YM} \quad \text{sur} \quad \check{\mathbb{T}}^4 \text{ (radius } R^{-1}) \arrow[r, "R\to\infty"] & \text{(pt)}
\end{tikzcd}$$

Construction d'ADHM

- Transforme Fourier–Mukai/Nahm (dualité T)

$$\begin{tikzcd}
k\text{-instanton} \quad \mathrm{U}(n)\text{-YM} \quad \text{sur} \quad \mathbb{T}^4 \text{ (radius } R) \arrow[r, "R\to\infty"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathbb{R}^4 \\
n\text{-instanton} \quad \mathrm{U}(k)\text{-YM} \quad \text{sur} \quad \check{\mathbb{T}}^4 \text{ (radius } R^{-1}) \arrow[r, "R\to\infty"] & (\text{pt})
\end{tikzcd}$$

- Généralisation pour supergroupe

$$\begin{tikzcd}
(k_0|k_1)\text{-instanton} \quad \mathrm{U}(n_0|n_1)\text{-YM} \quad \text{sur} \quad \mathbb{T}^4 \text{ (radius } R) \arrow[r, "R\to\infty"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathbb{R}^4 \\
(n_0|n_1)\text{-instanton} \quad \mathrm{U}(k_0|k_1)\text{-YM} \quad \text{sur} \quad \check{\mathbb{T}}^4 \text{ (radius } R^{-1}) \arrow[r, "R\to\infty"] & (\text{pt})
\end{tikzcd}$$

Construction d'ADHM : supergroupe

- Solution de $(k_0|k_1)$-instanton de $\mathrm{U}(n_0|n_1)$-YM [K–Pestun]
  - Espaces vectoriels : $K = \mathbb{C}^{k_0|k_1}$, $N = \mathbb{C}^{n_0|n_1}$
  - Variables ADHM : $B_{1,2} \in \mathrm{Hom}(K,K)$, $I \in \mathrm{Hom}(N,K)$, $J \in \mathrm{Hom}(K,N)$
  - Équation ADHM : $\mu_{\mathbb{R}} = 0$, $\mu_{\mathbb{C}} = 0$ $\longrightarrow$ équations des super matrices
    - Moment maps : $\mu_{\mathbb{R}} = [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J$, $\mu_{\mathbb{C}} = [B_1, B_2] + IJ$
- Charge de super instanton

$$c_2[A] = \frac{-1}{8\pi^2} \int \mathrm{str}\, F \wedge F = \mathrm{sdim}\, \mathbb{C}^{k_0|k_1} = k_0 - k_1 \in \mathbb{Z}$$

  - k_0 instantons positifs & k_1 instantons négatifs
  - Remarque : anti-instanton (SD) $\neq$ instanton negatif (ASD)

Path intégrale de théorie de jauge

- Fonction partition de Nekrasov : 4d $\mathcal{N} = 2$ théorie de jauge supersymétrique

[Nekrasov]

$$Z = \int DA\, \mathrm{e}^{-S[A]} = \sum_{k\geq 0} \mathfrak{q}^k \underbrace{\int DA_k}_{\mathrm{vol}(\mathfrak{M}_{k,n})} \underbrace{\int D(\delta A) \mathrm{e}^{-S_{\mathsf{fluc}}[\delta A]}}_{\text{perturbative}} =: \sum_{k\geq 0} \mathfrak{q}^k\, Z_k$$

- Intégrale équivariante sur espace des modules des instantons

$$Z_k(\epsilon_{1,2}; \underline{a}) = \mathrm{vol}(\mathfrak{M}_{k,n}) = \int_{\mathfrak{M}_{k,n}} 1$$

  - Paramètres équivariants : $(\epsilon_{1,2}) \in \mathfrak{u}(1)^2 \subset \mathfrak{spin}(4)$, $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{u}(1)^n \subset \mathfrak{u}(n)$
  - Expression combinatoire : somme des partitions (points fixés)

Path intégrale de théorie de jauge

- Fonction partition de supergroupe : [K–Pestun]

$$Z = \sum_{k_{0,1} \geq 0} \mathfrak{q}^{\mathsf{k}} Z_{k_0|k_1}(\epsilon_{1,2}; \underline{a}^{(0)}, \underline{a}^{(1)})$$

  - Paramètres équivariants : $(\underline{a}^{(0)}, \underline{a}^{(1)}) \in \mathfrak{u}(1)^{n_0+n_1} \subset \mathfrak{u}(n_0|n_1)$
  - Charge topologique : $\mathsf{k} = k_0 - k_1 \in \mathbb{Z}$ ⟶ série formelle $\mathbb{C}[\![\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^{-1}]\!]$
  - Limite de couplage faible $\mathfrak{q} \to 0$? ⟶ Complétion non perturbative

- Réalisation carquois : $Z[\mathrm{U}(n_0|n_1)] = Z\Big[$ $\Big]$

[Dijkgraaf–Heidenreich–Jefferson–Vafa] [K–Pestun]

  - Prolongement analytique : $(\tau^{(0)}, \tau^{(1)}) = (\tau, -\tau)$, $(\epsilon_{1,2}^{(0)}, \epsilon_{1,2}^{(1)}) = (\epsilon_{1,2}, -\epsilon_{1,2})$
  - Régime non physique : $\operatorname{Im} \tau^{(1)} < 0$ cf. modèle de supermatrice

Table des matières

1. Introduction : Théorie de jauge de supergroupe
2. Super instanton et path intégrale
3. Aspects non perturbatifs
   - Géométrie de Seiberg–Witten
   - Défaut d'intersection et D-branes
4. Conclusion

Géométrie de Seiberg–Witten

- Méthode du point col dans la limite $\epsilon_{1,2} \to 0$: [Nekrasov]

$$Z = \sum_{\lambda} Z_\lambda(\epsilon_{1,2}; \underline{a}) \xrightarrow{\epsilon_{1,2}\to 0} \exp\left(\frac{\mathcal{F}(\underline{a})}{\epsilon_1\epsilon_2} + \cdots\right)$$

  - Prépotentiel de Seiberg–Witten : $\mathcal{F}(\underline{a})$

- Équation du point col $= \{(x,y) \mid H(x,y) = 0\} =: \Sigma$: courbe de Seiberg–Witten

$$G = \mathrm{U}(n) \ : \ H(x,y) = 0 \iff y(x) + \frac{1}{y(x)} = x^n + \cdots$$

$$=: \det(x - \phi_{\mathsf{IR}})$$

  - Fonction génératrice UV : $y(x) = \det(x - \phi_{\mathsf{UV}}) + O(\mathfrak{q})$, $\phi_{\mathsf{UV/IR}} \in \mathfrak{u}(n)$

Géométrie de Seiberg–Witten

- Courbe de Seiberg–Witten pour supergroupe $G = \mathrm{U}(n_0|n_1)$

[Dijkgraaf–Heidenreich–Jefferson–Vafa] [K–Pestun]

$$\Sigma \ : \quad y(x) + \frac{1}{y(x)} = \operatorname*{sdet}_{n_0|n_1}(x-\phi) = \frac{\det_{n_0}(x-\phi^{(0)})}{\det_{n_1}(x-\phi^{(1)})} \xrightarrow{x\to\infty} x^{n_0-n_1}$$

  - Courbe hyperelliptique de genre $g = n_0 - 1$ avec $2n_1$ points (dégénérés)
  - Caractéristique d'Euler : $\chi = 2 - 2g - 2n_1 = 4 - 2(n_0 + n_1)$
  - Avec flavor symétrie $G_F = \mathrm{U}(n_0^F|n_1^F)$ $\longrightarrow$ plus de points (positifs et négatifs)

Géométrie de Seiberg–Witten

- Connexion au système intégrable :

  Branche de Coulomb de l'espace des modules des vides supersymètriques

  $=$ Espace des phases du système intégrable classique

Courbe de Seiberg–Witten	Courbe spectrale
$\mathcal{N} = 2$ $\mathrm{U}(n)$ SYM	$\widehat{A}_{n-1}$ Toda chaîne
$\mathcal{N} = 2^*$ $\mathrm{U}(n)$ SYM	A_n Calogero–Moser
$\mathcal{N} = 2$ $\mathrm{U}(n)$ SQCD	$\mathfrak{sl}_2$ spin chaîne
Théorie de jauge de Γ-carquois	$\mathfrak{g}_\Gamma$ spin chaîne

[Gorsky–Krichever–Marshakov–Mironov–Morozov] [Martinec–Warner] [Donagi–Witten]
[Gorsky–Marshakov–Mironov–Morozov] [Nekrasov–Pestun]

Géométrie de Seiberg–Witten

- Connexion au système intégrable

Courbe de Seiberg–Witten	Courbe spectrale
$\mathcal{N}=2$ $\mathrm{U}(n_0\|n_1)$ SYM	$\widehat{A}_{n_0-1\|n_1-1}$ Toda chaîne
$\mathcal{N}=2^*$ $\mathrm{U}(n_0\|n_1)$ SYM	$A_{n_0\|n_1}$ Calogero–Moser
$\mathcal{N}=2$ $\mathrm{U}(n_0\|n_1)$ SQCD	$\mathfrak{sl}_2$ chaîne (magnons negatifs)
Théorie de jauge de Γ-carquois	$\mathfrak{g}_\Gamma$ chaîne (magnons negatifs)

[K–Pestun] [Chen–K–Lee]

- Hamiltonians : $H_n = \frac{1}{n}\operatorname{tr} L^n \longrightarrow \frac{1}{n}\operatorname{str} L^n = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n_0}(p_\alpha^{(0)})^n - \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n_1}(p_\alpha^{(1)})^n$

Correspondance Bethe/Gauge

- Quantification de la correspondance [Nekrasov–Shatashvili]

$$Z \xrightarrow{\epsilon_1 \text{ fixé}, \ \epsilon_2 \to 0} \exp\left(\frac{\widetilde{\mathcal{W}}(\underline{a};\epsilon_1)}{\epsilon_2} + \cdots\right)$$

  - Twisted superpotentiel : $\widetilde{\mathcal{W}}(\underline{a};\epsilon_1)$ $\longrightarrow$ identification $\epsilon_1 = \hbar$

- Équation du point col : $\exp\left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{W}}(\underline{a};\epsilon_1)}{\partial a_\alpha}\right)_{\alpha=1,\ldots,n} = 1$ $\longrightarrow$ équation de Bethe

  - $\mathrm{U}(n)$ SYM avec $\mathrm{U}(2m)$ flavor (SQCD) : n magnons, m sites
  - $\mathrm{U}(n_0|n_1)$ SYM avec $\mathrm{U}(2m_0|2m_1)$ flavor : [Chen–K–Lee]

    n_0 magnons positifs, n_1 magnons négatifs, m_0 sites $\hbar s$ positifs, m_1 sites $\hbar s$ négatifs

$$E = \sum_{\alpha=1}^{n_0} \frac{\hbar^2 s^2}{(u_\alpha^{(0)})^2 - \hbar^2 s^2} - \sum_{\alpha=1}^{n_1} \frac{\hbar^2 s^2}{(u_\alpha^{(1)})^2 - \hbar^2 s^2}$$

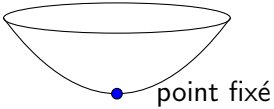
Table des matières

1. Introduction : Théorie de jauge de supergroupe
2. Super instanton et path intégrale
3. Aspects non perturbatifs
   - Géométrie de Seiberg–Witten
   - Défaut d'intersection et D-branes
4. Conclusion

Ω-background

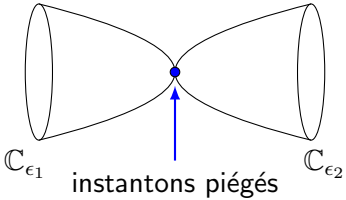
- Interprétation du paramètre ϵ

$\mathbb{C}$ (non compacte)



$\mathbb{C}_\epsilon$ (compactifié)

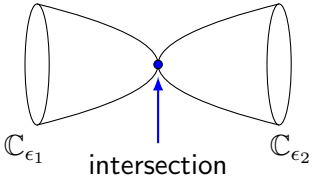
- 4 dimension avec Ω-background $\epsilon_{1,2}$



Défauts dans théorie des champs

- Solitons : vortex, kink, domain-wall,... $\longrightarrow$ réalisés dans la phase Higgs
- e.g. Vortex en d-dim (co-dim 2) $\longrightarrow$ théorie effective sur $(d-2)$-dim

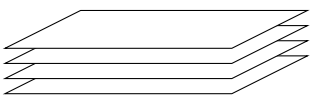
- Défauts d'intersection : n_1 vortex sur $\mathbb{C}_{\epsilon_1}$ + n_2 vortex sur $\mathbb{C}_{\epsilon_2}$



  - Symétrie de la théorie effective : $G = \mathrm{U}(n_1|n_2)$ [K–Nieri]
  - Réalisation similaire : 8 dim $\to$ 4 dim [Nekrasov] [Chen–K–Lee]

Théorie des cordes et D-branes

- Pile des D-branes et cordes ouvertes $\longrightarrow$ Théorie de jauge non abélien



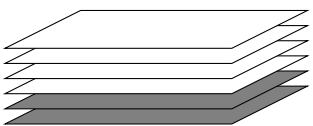
n D$_p$ branes $\longrightarrow$ U(n) YM

  - Negative (ghost) brane [Okuda–Takayanagi]

- Calcul de la fonction de Nekrasov par cordes topologiques [K–Sugimoto]

Théorie des cordes et D-branes

- Pile des D-branes et cordes ouvertes $\longrightarrow$ Théorie de jauge non abélien



n D_p^+ branes
$+\ m$ D_p^- branes
$\longrightarrow$ $\mathrm{U}(n|m)$ YM

  - Negative (ghost) brane [Okuda–Takayanagi]

- Calcul de la fonction de Nekrasov par cordes topologiques [K–Sugimoto]

Table des matières

1. Introduction : Théorie de jauge de supergroupe
2. Super instanton et path intégrale
3. Aspects non perturbatifs
   - Géométrie de Seiberg–Witten
   - Défaut d'intersection et D-branes
4. Conclusion

Conclusion

- Théorie de jauge de supergroupe : non unitaire, spectre illimité...
- Super instantons et localisation de path intégrale
  - construction d'ADHM, espace des modules, fonction partition de Nekrasov
- Aspects non perturbatifs de théorie de jauge de supergroupe
  - géométrie de Seiberg–Witten, correspondence Bethe/Gauge, défauts d'intersection
- Sujets associés : algèbre quantique (algèbre W, VOA)

Merci pour votre attention !