DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE

Étude de la T-coercitivité pour le problème de Stokes

GdR MaNu 2021

P. Ciarlet, Jr, **E. Jamelot**, A. Lefort

erell.jamelot@cea.fr

UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY, CEA, SERVICE DE THERMO-HYDRAULIQUE ET DE MÉCANIQUE DES FLUIDES, 91191, GIF-SUR-YVETTE, FRANCE

Sommaire

Contexte

Le problème de Stokes

Discrétisation non conforme

La T-coercitivité

Éléments finis mixtes non conformes de Crouzeix-Raviart ($k = 1$)

Éléments finis mixtes non conformes de Fortin-Soulié ($k = 2$)

Perspectives

Sommaire

Contexte

Le problème de Stokes

Discrétisation non conforme

La T-coercitivité

Éléments finis mixtes non conformes de Crouzeix-Raviart ($k = 1$)

Éléments finis mixtes non conformes de Fortin-Soulié ($k = 2$)

Perspectives

- Code TrioCFD : simulation d'écoulements turbulents instationnaires à faible nombre de Mach *dans des configurations industrielles.*
- Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$ tel que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}\,)\mathbf{u} + \mathbf{grad}\, p & = & \mathbf{f}, \\ \mathrm{div}\, \mathbf{u} & = & 0, \\ \mathbf{u}(t=0) & = & \mathbf{u}_0. \end{array} \right.$$

- Discrétisation en temps (schéma d'Euler semi-implicite).

  Trouver $(\underline{U}^{m+1}, \underline{P}^{m+1})$ tel que :

$$\delta t^{-1} M(\underline{U}^{m+1} - \underline{U}^m) + K\underline{U}^{m+1} + L(\underline{U}^m)\underline{U}^{m+1} + B^T \underline{P}^{m+1} = \underline{F}^{m+1} \text{ and } B\underline{U}^{m+1} = 0.$$

  1 **Étape de prédiction :** Trouver $\underline{U}^*$ tel que

$$(M + K + L(\underline{U}^m))\,\underline{U}^* = \underline{F}^{m+1} + \delta t^{-1} M \underline{U}^m + B^T \underline{P}^m \quad \text{GMRES}$$

  2 **Solveur de pression :** Trouver δP tel que

$$\begin{array}{rcll} BM^{-1}B^T\,\delta\underline{P} & = & -\delta t^{-1} B\underline{U}^*, & \text{Cholesky ou GCP} \\ \underline{P}^{m+1} & = & \underline{P}^m + \delta\underline{P} & \end{array}$$

  3 **Étape de correction :** Trouver $\underline{U}^{m+1}$ tel que

$$\delta t^{-1} M\,\underline{U}^{m+1} = \delta t^{-1} M\,\underline{U}^* + B^T \delta\underline{P} \quad \text{calcul direct}$$

La matrice de masse M est diagonale. On relaxe la condition CFL.

- Projection conforme dans $\mathbf{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$ Linke et al.

  La pression est P^0, on modifie $\underline{F}^{m+1}$, $L(\underline{U}^m)$ et M.

  Inconvénient : la matrice de masse modifiée n'est plus diagonale.
- Implémentation de la méthode des éléments finis de Galerkin discontinus.

  Monter en ordre pour modéliser plus finement les phénomènes de turbulence (tourbillons).

  Utiliser des mailles de différentes formes.

- Schéma MPFA *Multiple Points Flux Approximation*

  Thèse d'Andrew Peitavy, direction : C. Le Potier, E. Chénier ; collaboration : R. Eymard.

  Reconstruction d'un gradient de pression localement $\mathbf{H}(\mathrm{div})$-conforme.

  La pression est P^0, on modifie la matrice de couplage B.

- T-coercitivité : un outil pratique pour établir les conditions inf-sup discrètes.

  Éléments finis non conformes : stage de césure d'Albéric Lefort en 2021.

  Éléments finis de Galerkin discontinus : proposition de stage (et thèse) 2022.

Sommaire

Contexte

Le problème de Stokes

Discrétisation non conforme

La T-coercitivité

Éléments finis mixtes non conformes de Crouzeix-Raviart ($k = 1$)

Éléments finis mixtes non conformes de Fortin-Soulié ($k = 2$)

Perspectives

- On pose $\mathbf{X} = X^d$ pour $X = H_0^1(\Omega)$ ou $L^2(\Omega)$; et $\mathbb{L}^2(\Omega) = L^2(\Omega)^{d\times d}$.
- Problème continu, $\mathbf{f} \in (H^{-1}(\Omega))^d$:

  Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ tel que $\left\{ \begin{array}{rcl} -\nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{grad}\, p & = & \mathbf{f}, \\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} & = & 0. \end{array} \right.$
- Problème variationnel :

  Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{lrcl} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), & a(\mathbf{u},\mathbf{v}) - b(\mathbf{v},p) & = & \langle\, \mathbf{f}, \mathbf{v} \,\rangle_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}, \\ \forall q \in L_0^2(\Omega), & b(\mathbf{u},q) & = & 0. \end{array} \right.$$

  avec $a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \nu\,(\,\mathbf{Grad}\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{Grad}\,\mathbf{v}\,)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ et $b(\mathbf{v},p) = (\,q\,,\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,)_{L^2(\Omega)}$.

  On pose $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \,|\, \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0\}$.
- Problème bien posé si :
- a et b sont continues, a est coercitive sur $\mathbf{V}$ et la *condition inf-sup* suivante est satisfaite :

$$\exists \beta > 0 \,|\, \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{b(\mathbf{v},q)}{\|\mathbf{Grad}\,\mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

- Problème variationnel :

$$(\mathbf{u},p)\in \mathbf{H}^1_0(\Omega)\times L^2_0(\Omega)\,|\,\left\{\begin{array}{lrcl}\forall \mathbf{v}\in \mathbf{H}^1_0(\Omega), & a(\mathbf{u},\mathbf{v})-b(\mathbf{v},p) & = & \langle\,\mathbf{f},\mathbf{v}\,\rangle_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)},\\ \forall q\in L^2_0(\Omega), & b(\mathbf{u},q) & = & 0.\end{array}\right.$$

- Problème bien posé si :
- a et b sont continues, a est coercitive sur $\mathbf{V}$ et la *condition inf-sup* suivante est satisfaite :

$$\exists\beta>0\,|\,\forall q\in L^2_0(\Omega),\quad \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1_0(\Omega)}\frac{b(\mathbf{v},q)}{\|\mathbf{Grad}\,\mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}\geq\beta\|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

$$\mathbf{H}^1_0(\Omega)=\mathbf{V}\oplus\mathbf{V}^\perp,\quad\left\{\begin{array}{lcl}\mathbf{V} & := & \{\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1_0(\Omega);\quad \mathrm{div}\,\mathbf{v}=0\},\\ \mathbf{V}^\perp & = & \{(-\Delta)^{-1}\mathbf{grad}\,q;\quad q\in L^2(\Omega)\}.\end{array}\right.$$

Outil de la preuve de CIS : Girault-Raviart'86, cor. I-2.4.

1°) L'opérateur **grad** est un isomorphisme de $L^2_0(\Omega)$ dans $\mathbf{V}^0$ où

$$\mathbf{V}^0:=\left\{\mathbf{y}\in H^{-1}(\Omega)^d;\quad \langle\mathbf{y},\phi\rangle_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)}=0\quad\forall\phi\in\mathbf{V}\right\}.$$

2°) L'opérateur div est un isomorphisme de $\mathbf{V}^\perp$ dans $L^2_0(\Omega)$.

$$\forall q\in L^2_0(\Omega),\ \exists!\mathbf{v}_q\in\mathbf{V}^\perp\,|\quad \mathrm{div}\,\mathbf{v}_q=q,\quad \|\mathbf{Grad}\,\mathbf{v}_q\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\leq\widetilde{C}\|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Remarque : la constante $\widetilde{C}$ est difficile à estimer ! Voir par exemple Costabel-Dauge'15.

- Soit $(\mathcal{T}_h)_h$ une famille de triangulations conformes de Ω.

  Soit $(Q_h)_h \subset L^2(\Omega)$.

- Discrétisation conforme : $(\mathbf{X}_h)_h \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

  Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times (Q_h \cap L_0^2(\Omega))$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{lll} \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, & a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b(\mathbf{v}_h, p_h) & = \ell_{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_h), \\ \forall q_h \in Q_h, & b(\mathbf{u}_h, q_h) & = 0. \end{array} \right.$$

  Élements finis nodaux : $P^2 - P^1$ ou $P^2 - iso - P^1$ par exemple.

  Avantage : prouver que le problème discret est posé.

  Inconvénient : Couplage entre les nœuds.

- Discrétisation non conforme : $(\mathbf{X}_h)_h \not\subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

  Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times (Q_h \cap L_0^2(\Omega))$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{lll} \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, & a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b_h(\mathbf{v}_h, p_h) & = \ell_{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_h), \\ \forall q_h \in Q_h, & b_h(\mathbf{u}_h, q_h) & = 0. \end{array} \right.$$

  Avantage : Couplage entre les arêtes pour $d = 2$ ou les faces pour $d = 3$.

  Inconvénient : Erreur de consistance.

- Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times Q_h$ tel

$$\left\{ \begin{array}{lrcl} \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, & a_{(h)}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_{(h)}(\mathbf{v}_h, p_h) & = & \ell_{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_h), \\ \forall q_h \in Q_h, & b_{(h)}(\mathbf{u}_h, q_h) & = & 0. \end{array} \right.$$

- Dans les deux cas $\mathbf{V}_h \not\subset \mathbf{V}$ où:

$$\mathbf{V}_h := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \,|\, \forall q_h \in Q_h, \quad b_{(h)}(\mathbf{v}_h, q_h) = 0\}.$$

- Estimations d'erreur a priori, cas conforme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \|\mathbf{Grad}\,\mathbf{u} - \mathbf{Grad}\,\mathbf{u}_h\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} & \lesssim & \inf\limits_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \|\mathbf{Grad}\,\mathbf{u} - \mathbf{Grad}\,\mathbf{u}_h\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \inf\limits_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} & \lesssim & \inf\limits_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \|\mathbf{Grad}\,\mathbf{u} - \mathbf{Grad}\,\mathbf{u}_h\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \inf\limits_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_{L^2(\Omega)}. \end{array} \right.$$

- Estimations d'erreur a priori, cas non conforme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h & \lesssim & \inf\limits_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_h + \inf\limits_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|p - p_h\|_{Q_h} & \lesssim & \inf\limits_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_h + \inf\limits_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_{L^2(\Omega)} + \|r_h(u,p)\|_{\star,h}. \end{array} \right.$$

avec $\|\mathbf{v}_h\|_h^2 = \sum\limits_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{Grad}\,\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2$.

Sommaire

Contexte

Le problème de Stokes

Discrétisation non conforme

La T-coercitivité

Éléments finis mixtes non conformes de Crouzeix-Raviart ($k = 1$)

Éléments finis mixtes non conformes de Fortin-Soulié ($k = 2$)

Perspectives

- Domaine Ω polygonal ou polyédrique de frontière Lipschitzienne.

  Triangulation régulière de simplexes : $\mathcal{T}_h = \bigcup_{\ell=1}^{N_K} K_\ell$. Ensemble des facettes : $\overline{\mathcal{F}}_h = \bigcup_{f=1}^{\overline{N}_f} F_f$.

  Facettes intérieures : $\mathcal{F}_h = \bigcup_{f=1}^{N_f} F_f$. Facettes du bord : $\mathcal{F}_h^b = \bigcup_{f=N_f+1}^{\overline{N}_f} F_f$.

  Barycentres des facettes : $(\mathbf{x}_f)_{f=1}^{\overline{N}_f}$.

  Vecteur orthonormaux aux facettes : $(\mathbf{n}_f)_{f=1}^{\overline{N}_f}$ ($\mathbf{n}_f$ orienté vers l'extérieur si $F_f \in \partial\Omega$).
- h_K : diamètre de l'élément K, ρ_K : diamètre de la boule inscrite dans K,

$$\sigma = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\rho_K}.$$

  Pour $d = 2$, $\sigma \leq 2/\sin(\theta)$, où θ est le plus petit angle de la triangulation.

Forme bilinéaire $(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_h$ et opérateur div_h

- Fonctions régulières par morceaux.
- $\mathcal{P}_h H^1 = \left\{ v \in L^2(\Omega) \,|\, \forall K \in \mathcal{T}_h,\ v_{|K} \in H^1(K) \right\}$.

  $\forall v,\ w \in \mathcal{P}_h H^1, \quad (v, w)_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{grad}\, v, \mathbf{grad}\, w_h)_{\mathbf{L}^2(K)}, \quad \|v_h\|_h^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{grad}\, v_h\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2.$

  $\mathcal{P}_h \mathbf{H}^1 = (\mathcal{P}_h H^1)^d,$

  $\forall \mathbf{v},\ \mathbf{w} \in \mathcal{P}_h \mathbf{H}^1, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w})_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{Grad}\, \mathbf{v}, \mathbf{Grad}\, \mathbf{w}_h)_{\mathbb{L}^2(K)}, \quad \|\mathbf{v}_h\|_h^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{Grad}\, \mathbf{v}_h\|_{\mathbb{L}^2(K)}^2.$
- Sauts aux interfaces pour $v \in \mathcal{P}_h H^1$:

  Pour $F_f \in \mathcal{F}_h$, $\overline{F}_f = \overline{K}_L \cap \overline{K}_R$, $\mathbf{n}_f$ orienté de K_L vers K_R $[v_h]_{|F_f} = \left(v_{h|K_L} - v_{h|K_R} \right)_{|F_f}$.

  Pour $F_f \in \mathcal{F}_h^b$, $[v_h]_{|F_f} = v_{h|F_f}$.
- $\mathcal{P}_h \mathbf{H}(\mathrm{div}) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \,|\, \forall K \in \mathcal{T}_h,\ \mathbf{v}_{|K} \in \mathbf{H}(\mathrm{div}\,; K) \right\}$.

  Opérateur div_h :

  $$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{P}_h \mathbf{H}(\mathrm{div}),\ \forall q \in L^2(\Omega), \quad (\mathrm{div}_h\, \mathbf{v}, q) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathrm{div}\, \mathbf{v}, q)_{L^2(K)}.$$

Éléments mixtes finis non conformes (i)

- Méthode introduite dans Crouzeix-Raviart'73.
- Approximation non conforme de $H^1(\Omega)$:

$$X_h = \left\{ v_h \,|\, \forall K \in \mathcal{T}_h \quad v_{h|K} \in P_k(K) \quad \text{et} \quad \forall F \in \mathcal{F}_h,\, \forall q \in P_{k-1}(F) \quad \int_F [v_h]\, q = 0 \right\}.$$

- Approximation non conforme de $H^1_0(\Omega)$:

$$X_{0,h} = \left\{ v_h \in X_h \,|\, \forall F \in \mathcal{F}_h^b,\, \forall q \in P_{k-1}(F) \quad \int_F v_h\, q = 0 \right\}$$

Hypothèse $H2$, patch test : $v_h \to \|v_h\|_h$ est une norme sur $X_{0,h}$.

- Approximation de $\mathbf{H}^1_0 \times L^2_0(\Omega)$: $\mathbf{X}_{0,h} \times (Q_h \cap L^2_0(\Omega))$, avec :

$$\mathbf{X}_{0,h} = (X_{0,h})^d \quad \text{et} \quad Q_h = \left\{ q_h \,|\, \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad q_{h|K} \in P_{k-1}(K) \right\}.$$

Hypothèse $H1$, propriété d'approximabilité, avec $\sigma = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \dfrac{h_K}{\rho_K}$:

$$\Pi_h \in \mathcal{L}(\mathbf{H}^1_0(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega), \mathbf{X}_{0,h}) \,|\, \begin{cases} (i) & \mathrm{div}_h\, (\Pi_h \mathbf{v} - \mathbf{v}) = 0, \\ (ii) & \|\Pi_h \mathbf{v} - \mathbf{v}\|_h \le C\, \sigma^l\, h^m |\mathbf{v}|_{\mathbf{H}^{m+1}(\Omega)}, \quad 1 \le m \le k. \end{cases}$$

Éléments finis mixtes non conformes (ii)

- Convergence de la vitesse.

  Pour $(\mathbf{u}, p) \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^{k+1}(\Omega)\right) \times \left(H^k(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)\right)$, $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h &\leq C\,\sigma^l\,h^k \left(|\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)} + |p|_{H^k(\Omega)} \right), \\ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &\leq C\,\sigma^{2l}\,h^{k+1} \left(|\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)} + |p|_{H^k(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

- Convergence de la pression.

  Hypothèse $H3$, analogue discret de l'isomorphisme $\mathrm{div} : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \mapsto L_0^2(\Omega)$:

$$\forall q_h \in Q_h, \exists \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h} \,|\quad \mathrm{div}_h\,\mathbf{v}_h = q_h \text{ et } \|\mathbf{v}_h\|_h \leq C\,\sigma^{\lambda}\|\phi_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

  Pour $(\mathbf{u}, p) \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^{k+1}(\Omega)\right) \times \left(H^k(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)\right)$, $k \geq 1$:

$$\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C\,\sigma^{l+\lambda}\,h^k \left(|\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)} + |p|_{H^k(\Omega)} \right).$$

- Exemples de mise en œuvre :

  $k = 1$ pour $d = 2$ ou 3 ; $k = 3$ pour $d = 2$ Crouzeix-Raviart'73.

  $k = 2$ pour $d = 2$: Fortin-Soulié'83.

  $k = 3$ pour $d = 2$: Crouzeix-Falk'89.

  $k \geq 1$ pour $d = 2$: Matthies-Tobiska'05, Baran-Stoyan'07.

- Cas où $\mathbf{f} = \mathbf{grad}\,\phi$ avec $\phi \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$

  La solution continue est : $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{0}, \phi)$.

  Convergence de la vitesse : $\|\mathbf{u}_h\|_h \lesssim h^2 \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$.

$$\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h = -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \phi \,\mathrm{div}\, \mathbf{v}_h + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F \phi\, [\mathbf{v}_h]$$

- Le second terme agit comme une source numérique.
  Pour le supprimer (ou le réduire), on peut :

  Construire un sous-espace de $\mathbf{X}_h \cap \mathbf{H}(\mathrm{div}0; \Omega)$: Hecht'00.

  Ajouter une contrainte : thèses de Fortin'03 et Heib'06. Implémentation dans le code TrioCFD.

  $2D$: Éléments finis $\mathbf{P}^1_{nc} - (P^0 + P^1)$.

  $3D$: Éléments finis $\mathbf{P}^1_{nc} - (P^0 + P^1 + P^a)$.

  Projeter $\mathbf{v}_h$ au second membre dans un espace d'éléments finis conformes dans $\mathbf{H}(\mathrm{div}\,; \Omega)$.

  Linke et al.

$$\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \Pi_{RT} \mathbf{v}_h = -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \phi \,\mathrm{div}\, \Pi_{RT} \mathbf{v}_h = -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \phi \,\mathrm{div}\, \mathbf{v}_h.$$

  Traitement plus complexe pour les équations de Navier-Stokes.

Sommaire

Contexte

Le problème de Stokes

Discrétisation non conforme

La T-coercitivité

Éléments finis mixtes non conformes de Crouzeix-Raviart ($k = 1$)

Éléments finis mixtes non conformes de Fortin-Soulié ($k = 2$)

Perspectives

- Soient W et V deux espaces de Hilbert, $a : V \times W \to \mathbb{R}$ bilinéaire et continue et $f \in V'$.

$$(Pb) \quad \text{Trouver } u \in V \text{ tel que } \forall v \in W,\ a(u, v) = \langle f, v \rangle_V.$$

Théorème de Banach-Babuška-Nečas Ern-Guermond'21, II, Thm. 25.9 :

Le problème (Pb) est bien posé **si** a satisfait les conditions de stabilité et de solvabilité.

$$(CIS) \quad \exists \alpha > 0,\ \inf_{v \in V} \sup_{w \in W} |a(v, w)| \geq \alpha \|v\|_V \|w\|_W,$$

$$(SLV) \quad \forall w \in W, \quad [\forall v \in V,\ a(v, w) = 0] \Rightarrow [w = 0].$$

- **Définition :** $a : V \times W \to \mathbb{R}$ bilinéaire et continue est T-coercitive si

$$\exists T \in \mathcal{L}(V, W), \text{ bijectif}, \exists \alpha > 0, \forall v \in V \quad |a(v, Tv)| \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

La T-coercitivité est équivalente aux conditions $(CIS) - (SLV)$ Ciarlet Jr'12.

Pour v donné, on va construire explicitement le représentant w satisfaisant la condition (CIS).

Théorème : Soit $a(\cdot, \cdot)$ bilinéaire et continue. On suppose que a est T-coercitive.

Alors le problème (Pb) est bien posé.

- Applications : Helmholtz, Maxwell Ciarlet Jr et al, neutronique Ciarlet-Jamelot'13.

- Problème continu

  Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$ tel que : $\left\{ \begin{array}{rcl} -\nu\,\Delta\mathbf{u} + \mathbf{grad}\,p & = & \mathbf{f}, \\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} & = & 0. \end{array} \right.$

  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ avec : $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega) \mid \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0\}, \quad \mathbf{H}^1_0(\Omega) = \mathbf{V} \oplus \mathbf{V}^\perp$.

- Girault-Raviart'86 : l'opérateur div est un isomorphisme de $\mathbf{V}^\perp$ dans $L^2_0(\Omega)$.

- Problème variationnel

  On pose $\mathcal{X} = \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$, c'est un espace de Hilbert muni de la norme canonique $\|(\mathbf{u}, p)\|_{\mathcal{X}} = \left(\|\mathbf{Grad}\,\mathbf{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|p\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}$.

  On écrit la formulation variationnelle sous la forme :

  Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{X}$ tel que $\forall (\mathbf{v}, q) \in \mathcal{X}$: $a_S((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) = \langle \mathbf{f},\ \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)}$.

  $$a_S : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{X} \times \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ (\,(\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)\,) & \mapsto & \nu(\mathbf{Grad}\,\mathbf{u}, \mathbf{Grad}\,\mathbf{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - (\mathrm{div}\,\mathbf{v}, p)_{L^2(\Omega)} - (\mathrm{div}\,\mathbf{u}, q)_{L^2(\Omega)} \end{array} \right.$$

  La forme bilinéaire a_S est continue. Montrons qu'elle est T-coercitive.

- Montrons que la forme bilinéaire a_S est T-coercitive (Ciarlet'21, ENSTA, cours AMS308).

$$a_S\left((\mathbf{u},p),(\mathbf{v},q)\right) = \nu(\mathbf{Grad}\,\mathbf{u},\mathbf{Grad}\,\mathbf{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - (\mathrm{div}\,\mathbf{v},p)_{L^2(\Omega)} - (\mathrm{div}\,\mathbf{u},q)_{L^2(\Omega)}$$

- Soit $(\mathbf{u},p)\in\mathcal{X}$. $\quad \exists!\mathbf{v}_p\in\mathbf{V}^\perp \mid \mathrm{div}\,\mathbf{v}_p = p$.

1. On pose : $(\mathbf{v}^\star,q^\star) := (\beta\mathbf{u}-\mathbf{v}_p,-\beta\,p)$, avec $\beta>0$. On a :

$$a_S\left((\mathbf{u},p),(\mathbf{v}^\star,q^\star)\right) = \nu\,\beta\|\mathbf{Grad}\,\mathbf{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \nu(\mathbf{Grad}\,\mathbf{u},\mathbf{Grad}\,\mathbf{v}_p)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|p\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

2. On utilise l'inégalité de Young et la majoration $\widetilde{C}$:

$$(\mathbf{Grad}\,\mathbf{u},\mathbf{Grad}\,\mathbf{v}_p)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \le \frac{\eta}{2}\|\mathbf{Grad}\,\mathbf{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{\eta^{-1}}{2}\widetilde{C}\|p\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

3. Choisissons $\eta=\beta$, on a :

$$a_S\left((\mathbf{u},p),(\mathbf{v}^\star,q^\star)\right) \ge \frac{\nu\,\beta}{2}\|\mathbf{Grad}\,\mathbf{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \left(1-\frac{\nu\,\beta}{2}\widetilde{C}\right)\|p\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Considérons $\beta=(\nu\,\widetilde{C})^{-1}$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} a_S\left((\mathbf{u},p),(\mathbf{v}^\star,q^\star)\right) &\ge \frac{\nu^2\,\widetilde{C}}{2}\|\mathbf{Grad}\,\mathbf{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|p\|^2_{L^2(\Omega)}, \\ &\ge C_{\min}\,\|(\mathbf{u},p)\|^2_{\mathcal{X}}, \quad \text{avec} \quad C_{\min} = \min\left(\frac{\nu^2\,\widetilde{C}}{2},\,1\right). \end{aligned}$$

- La forme bilinéaire a_S est T-coercitive.

$$\begin{aligned} a_S\left((\mathbf{u},p),(\mathbf{v}^\star,q^\star)\right) &= \nu(\mathbf{Grad}\,\mathbf{u},\mathbf{Grad}\,\mathbf{v}^\star)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - (\mathrm{div}\,\mathbf{v}^\star,p)_{L^2(\Omega)} - (\mathrm{div}\,\mathbf{u},q^\star)_{L^2(\Omega)}, \\ &\geq \frac{\nu^2\,\widetilde{C}}{2}\|\mathbf{Grad}\,\mathbf{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|p\|^2_{L^2(\Omega)}, \\ &\geq C_{\min}\,\|(\mathbf{u},p)\|^2_{\mathcal{X}}, \quad \text{avec} \quad C_{\min} = \min\left(\frac{\nu^2\,\widetilde{C}}{2},\,1\right) \end{aligned}$$

- L'opérateur $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \mid T(\,(\mathbf{u},p)\,) = (\mathbf{v}^\star,q^\star)$ est linéaire et continu.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Grad}\,\mathbf{v}^\star\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|q^\star\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \nu^2\,\widetilde{C}^2\|\mathbf{Grad}\,\mathbf{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{Grad}\,\mathbf{v}_p\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \nu^2\,\widetilde{C}^2\|p\|^2_{L^2(\Omega)}, \\ &\leq \nu^2\,\widetilde{C}^2\|\mathbf{Grad}\,\mathbf{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + (\widetilde{C} + \nu^2\,\widetilde{C}^2)\|p\|^2_{L^2(\Omega)}, \\ &\leq C^2_{\max}\,\|(\mathbf{u},p)\|^2_{\mathcal{X}} \quad \text{avec} \quad C_{\max} = (\widetilde{C} + \nu^2\,\widetilde{C}^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

  L'opérateur T est bijectif : $(\mathbf{v}^\star,q^\star) = (\mathbf{0},0) \Leftrightarrow (\mathbf{u},p) = (\mathbf{0},0)$.

- Le problème (P) est bien posé !

$$a_S\,\left(\,(\mathbf{u},p),\,(\mathbf{v}^\star,q^\star)\,\right) \geq C_{\min}\,C^{-1}_{\max}\|(\mathbf{u},p)\|_{\mathcal{X}}\,\|(\mathbf{v}^\star,q^\star)\|_{\mathcal{X}}.$$

Problème discret *tout en un*

- Approximation non conforme de $H^1_0(\Omega)$:

$$\mathbf{X}_{0,h} = \left\{ \mathbf{v}_h \,|\, \mathbf{v}_{h|K} \in (P_k(K))^d \text{ et } \forall F \in \overline{\mathcal{F}}_h,\ \forall q \in P_{k-1}(F) \quad \int_F \mathbf{v}_h\, q = 0 \right\}$$

  Patch test : $\mathbf{v}_h \to \|\mathbf{v}_h\|_h$ est norme sur $\mathbf{X}_h$, avec $\|\mathbf{v}_h\|_h^2 = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|\mathbf{Grad}\,\mathbf{v}_h\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$.

  Approximation de $L^2(\Omega)$: $Q_h = \{q_h \,|\, \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad q_{h|K} \in P_{k-1}(K)\}$.

- On introduit $(\mathcal{X}_h)_h$ telle que :

$$\mathcal{X}_h := \mathbf{X}_{0,h} \times (Q_h \cap L^2_0(\Omega)), \quad \|(\mathbf{v}_h, q_h)\|_{\mathcal{X}_h} = \left(\|\mathbf{v}_h\|_h^2 + \|q_h\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

  $\mathcal{X}_h$ est un espace de Hilbert.

- On introduit la forme bilinéaire :

$$a_{S,h} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{X}_h \times \mathcal{X}_h & \to & \mathbb{R}, \\ ((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) & \mapsto & \nu\,(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_h - (\mathrm{div}_h\,\mathbf{v}, p_h) - (\mathrm{div}_h\,\mathbf{u}_h, q_h). \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} a_{S,h}\,((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) \quad = \quad & \nu \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\mathbf{Grad}\,\mathbf{u}_h, \mathbf{Grad}\,\mathbf{v}_h)_{\mathbb{L}^2(K)} \\ & - \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\mathrm{div}\,\mathbf{v}_h, p_h)_{L^2(K)} - \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\mathrm{div}\,\mathbf{u}_h, q_h)_{L^2(K)}. \end{aligned}$$

- Problème variationnel (P_h) :

  Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathcal{X}_h$ tel que $\forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathcal{X}_h, \quad a_{S,h}((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) = \ell_{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_h)$,

- Calcul du second membre :

  Pour $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\ell_{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$.

  Pour $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $\ell_{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_h) = \langle \mathbf{f}, \mathcal{I}_h(\mathbf{v}_h) \rangle_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}$ Veeser-Zanotti'18.

- Étapes pour montrer la T-coercitivité discrète.

  On cherche un représentant $(\mathbf{v}_h^\star, q_h^\star)$ de $(\mathbf{u}_h, p_h)$ réalisant la condition inf-sup.

  Soit $p_h \in Q_h \cap L_0^2(\Omega)$. On cherche $\mathbf{v}_{h,p_h} \in \mathbf{X}_h$ tel que

  $$(OI) \quad \operatorname{div}_h \mathbf{v}_{h,p_h} = p_h \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}_{h,p_h}\|_h \lesssim \|p_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

  On considère $\mathbf{v}_{p_h} \in \mathbf{V}^\perp$ tel que

  $$\operatorname{div} \mathbf{v}_{p_h} = p_h \quad \text{et} \quad \|\mathbf{Grad}\, \mathbf{v}_{p_h}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \widetilde{C} \|p_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

  On construit Π_{nc}, un opérateur d'interpolation vérifiant les conditions (OI).

  On pose $\mathbf{v}_{h,p_h} = \Pi_{nc}(\mathbf{v}_{p_h})$.

  On aura donc : $\|\mathbf{v}_{h,p_h}\|_h \leq C_{nc} \|p_h\|_{L^2(\Omega)}$, avec $\widetilde{C}_{nc} = C_{nc}\, \widetilde{C}$.

T-coercivité discrète (ii)

- Soit $(\mathbf{v}_h^\star, q_h^\star) = (\beta_{nc}\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_{h,p_h}, -\beta_{nc}p_h)$, avec $\beta_{nc} = (\nu\,\widetilde{C}_{nc})^{-1}$.

  En reprenant les étapes de la preuve de la T-coercitivité de a_S,

  on montre que la forme bilinéaire a_{S_h} est T-coercitive.

$$
\begin{aligned}
a_{S,h}\left((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h^\star, q_h^\star)\right) &= \nu(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h^\star)_h - (\mathrm{div}_h\,\mathbf{v}_h^\star, p_h) - (\mathrm{div}_h\,\mathbf{u}_h, q_h),\\
&\geq \frac{\nu^2\,\widetilde{C}_{nc}}{2}\|\mathbf{u}_h\|_h^2 + \|p_h\|_{L^2(\Omega)}^2,\\
&\geq C_{nc,\min}\,\|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{\mathcal{X}_h}^2, \quad \text{avec} \quad C_{nc,\min} = \min\left(\frac{\nu^2\,\widetilde{C}_{nc}}{2},\, 1\right)
\end{aligned}
$$

  L'opérateur $T_h : \mathcal{X}_h \to \mathcal{X}_h \mid T_h((\mathbf{u}_h, p_h)) = (\mathbf{v}_h^\star, q_h^\star)$ est linéaire et continu.

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{v}_h^\star\|_h^2 + \|q_h^\star\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq (\nu\,\widetilde{C}_{nc})^2\|\mathbf{u}_h\|_h^2 + \|\mathbf{v}_{h,p_h}\|_h^2 + (\nu\,\widetilde{C}_{nc})^2\|p_h\|_{L^2(\Omega)}^2,\\
&\leq (\nu\,\widetilde{C}_{nc})^2\|\mathbf{u}_h\|_h^2 + (\widetilde{C}_{nc} + (\nu\,\widetilde{C}_{nc})^2)\|p_h\|_{L^2(\Omega)}^2,\\
&\leq C_{nc,\max}^2\,\|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{\mathcal{X}_h}^2 \quad \text{avec} \quad C_{nc,\max} = (\widetilde{C}_{nc} + (\nu\,\widetilde{C}_{nc})^2)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

  Il est bijectif : $(\mathbf{v}_h^\star, q_h^\star) = (\mathbf{0}, 0) \Leftrightarrow (\mathbf{u}_h, p_h) = (\mathbf{0}, 0)$.

- La forme bilinéaire $a_{S,h}$ est T-coercitive, le problème (P_h) est bien posé.

$$
a_{S,h}\left((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h^\star, q_h^\star)\right) \geq C_{nc,\min}\,C_{nc,\max}^{-1}\|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{\mathcal{X}_h}\,\|(\mathbf{v}_h^\star, q_h^\star)\|_{\mathcal{X}_h}.
$$

- Analyse de convergence à l'aide du second lemme de Strang.

  Ern-Guermond'21-II, Lemma 27.15 :

$$\|(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h),(p-p_h)\|_{\mathcal{X}_h} \lesssim \inf_{(\mathbf{v}_h,q_h)\in\mathcal{X}_h} \|(\mathbf{u}-\mathbf{v}_h),(p-q_h)\|_{\mathcal{X}_h} + \epsilon_h(\mathbf{u},p),$$

  où $\epsilon_h(\mathbf{u},p)$ est l'erreur de consistance qui mesure :

$$\ell_{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_h) - \nu \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\mathbf{Grad}\,\mathbf{u}_h, \mathbf{Grad}\,\mathbf{v}_h)_{\mathbb{L}^2(K)} - \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\mathrm{div}\,\mathbf{v}_h, p_h)_{L^2(K)}.$$

Sommaire

Contexte

Le problème de Stokes

Discrétisation non conforme

La T-coercitivité

Éléments finis mixtes non conformes de Crouzeix-Raviart ($k = 1$)

Éléments finis mixtes non conformes de Fortin-Soulié ($k = 2$)

Perspectives

Éléments finis mixtes non conformes pour $k = 1$ (i)

- Espace mixte : $\mathcal{X}_{cr} = \mathbf{X}_{cr} \times (Q_{cr} \cap L^2_0(\Omega))$.

$$\mathbf{X}_{cr} = (X_{cr})^d, \quad X_{cr} = \left\{ v_h \,|\, \forall K \in \mathcal{T}_h \quad v_{h|K} \in P^1(K) \quad \text{et} \quad \forall F \in \overline{\mathcal{F}}_h \quad \int_F [v_h] = 0 \right\},$$

$$Q_{cr} = \left\{ q_h \,|\, \forall K \in \mathcal{T}_h \quad q_{h|K} \in P^0(K) \right\}.$$

$X_{cr} = \mathrm{vect}\left((\psi_f)_{f=1}^{N_F} \right)$, avec : $\psi_{f|K} := \begin{cases} 0 & \text{si } F_f \notin \partial K, \\ 1 - d\lambda_{f,K} & \text{si } F_f \in \partial K. \end{cases}$

Inégalité de Poincaré-Steklov discrète Ern-Guermond'21-II, Lemma 36.6 :

$$\exists C_{PS} \,|\, \forall v_h \in X_{cr}, \quad \|v_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C_{PS} \|v_h\|_h \text{ avec } \|v_h\|_h = \left(\sum_{K=1}^{N_K} \|\mathbf{grad}\, v_h\|^2_{\mathbf{L}^2(K)} \right)^{1/2}.$$

- Opérateur d'interpolation scalaire :

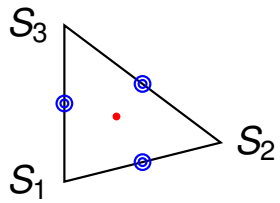
$$\pi_{cr} : \begin{cases} H^1_0(\Omega) & \to & X_{cr} \\ v & \mapsto & \displaystyle\sum_{f=1}^{N_F} \pi_f(v)\psi_f \end{cases}, \quad \pi_f(v) = \frac{1}{|F_f|} \int_{F_f} v.$$

On a : $\pi_{cr}(v - \overline{v}) = \pi_{cr}(v) - \overline{v}$, avec $\overline{v} = \dfrac{\int_\Omega v}{|\Omega|}$.

Opérateur d'interpolation vectoriel : $\Pi_{cr}(\mathbf{v}) = (\, \pi_{cr}(v_i) \,)_{i=1}^d$.

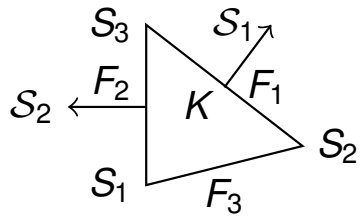
Éléments finis mixtes non conformes pour $k = 1$ (ii)

- Degrés de liberté :



Vitesse, pression.

Coordonnées barycentriques :



$\lambda_{f,K} = (d|K|)^{-1}(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}) \cdot \mathcal{S}_{f,K}$.

On a : $\mathbf{grad}\, \psi_{f|K} = -d\, \mathbf{grad}\, \lambda_{f,K} = |K|^{-1} \mathcal{S}_{f,K}$.

- Approximabilité :

Pour $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)$, on a pour tout $K \in \mathcal{T}_h$:

$$\begin{aligned} \int_K \mathrm{div}\,(\,(\Pi_{cr}(\mathbf{v}) - \mathbf{v})\,) &= \int_K \sum_{f \in \partial K} |K|^{-1} \frac{\int_F \mathbf{v} \cdot \mathcal{S}_{f,K}}{|F|} - \int_K \mathrm{div}\, \mathbf{v}, \\ &= \sum_{f \in \partial K} \int_F \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{f,K} - \int_K \mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0. \end{aligned}$$

Erreur d'approximation Ern-Guermond'21-II, Lemma 36.1.

Pour $v \in H^1_0(\Omega) \cap H^{1+r}(\Omega)$, $r > 0$, on a : $\|\pi_{cr}(v) - v\|_h \leq C_{cr}\, h^r\, \|\mathbf{grad}\, v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$.

On a donc : $\|\pi_{cr}(v)\|_h \leq \|\pi_{cr}(v) - v\|_h + \|\mathbf{grad}\, v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq (1 + C_{cr}\, h^r)\, \|\mathbf{grad}\, v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$.

On peut faire aussi une estimation directe pour $v \in H^1(\Omega)$.

Estimation de $\|\pi_{cr}(v)\|_h$ (i)

- Soit $v \in H^1(\Omega)$, et $v_h = \pi_{cr}(v) := \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \pi_F(v)\psi_F$.
- On a : $\|v_h\|_h^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{grad}\, v_h\|^2_{\mathbf{L}^2(K)}$ et pour tout K :

$$\|\mathbf{grad}\, v_h\|^2_{\mathbf{L}^2(K)} = \|\mathbf{grad}\, \tilde{v}_h\|^2_{\mathbf{L}^2(K)} \leq \|\mathbb{B}_K^{-1}\|^2 \, |J_K| \, \|\mathbf{grad}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\tilde{v}}_h\|^2_{\mathbf{L}^2(\hat{K})} ,$$

avec $\tilde{v}_h = v_h - \dfrac{\int_K v}{|K|}$ et $\mathbf{x}_{|K} = \mathbb{B}_K \hat{\mathbf{x}} + \vec{C}_K$, $J_K = \det(\mathbb{B}_K) = d!\,|K|$.

- $\|\mathbf{grad}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\tilde{v}}_h\|^2_{\mathbf{L}^2(\hat{K})} \leq C_{\hat{K}} \sum_{F \in \partial K} |\pi_F(\tilde{v})|^2$, où $C_{\hat{K}}$ ne dépend que de d.
- $|\pi_F(\tilde{v})|^2 = |F|^{-2} \left| \int_F \tilde{v} \right|^2 \leq |F|^{-1} \|\tilde{v}\|^2_{L^2(F)} = |F|^{-1} \, |J_F| \, \|\hat{\tilde{v}}\|^2_{L^2(\hat{F})} = (d-1)! \, \|\hat{\tilde{v}}\|^2_{L^2(\hat{F})}$,

avec $\mathbf{x}_{|F} = \mathbb{B}_F \hat{\mathbf{x}} + \vec{C}_f$, $J_F = \det(\mathbb{B}_F) = (d-1)!\,|F|$.

$$\|\mathbf{grad}\, v_h\|^2_{\mathbf{L}^2(K)} \leq (d-1)!\, C_{\hat{K}} \, \|\mathbb{B}_K^{-1}\|^2 \, |J_K| \sum_{\hat{F} \in \partial \hat{K}} \|\hat{\tilde{v}}\|^2_{L^2(\hat{F})}.$$

Estimation de $\|\pi_{cr}(v)\|_h$ (ii)

- Outils pour majorer $\|\hat{\hat{v}}\|_{L^2(\hat{F})}$ par $\|\mathbf{grad}\, v\|_{\mathbf{L}^2(K)}$.

  Multiplicative trace inequality Ern-Guermond'21-I, Lemma 12.15: pour $w \in H^1(K)$, $\forall F \in \partial K$

  $$\|w\|^2_{L^2(F)} \leq |F|\,|K|^{-1}\,\|w\|_{L^2(K)}\left(\|w\|_{L^2(K)} + \frac{2}{d}\ell_F^{\perp}\,\|\mathbf{grad}\, w\|_{\mathbf{L}^2(K)}\right),$$

  Poincaré-Steklov inequality in cells Ern-Guermond'21-I, Lemma 12.11: pour $w \in H^1(K)$

  $$\|w - \overline{w}\|_{L^2(K)} \leq \pi^{-1}\,h_K\,\|\mathbf{grad}\, w\|_{\mathbf{L}^2(K)}.$$

  On en déduit que :

  $$(\mathit{Trace}) \quad \|w - \overline{w}\|^2_{L^2(F)} \leq |F|\,|K|^{-1}\,\pi^{-1}\,h_K\left(\pi^{-1}\,h_K + \frac{2}{d}\ell_F^{\perp}\right)\|\mathbf{grad}\, w\|^2_{\mathbf{L}^2(K)}.$$

  On l'applique à $\hat{\hat{v}}$ dans $\hat{K}$, avec $C_{\hat{F}}$ ne dépend que de d :

  $$\|\hat{\hat{v}}\|^2_{L^2(\hat{F})} \leq C_{\hat{F}}\,\|\mathbf{grad}_{\hat{\mathbf{x}}}\,\hat{v}\|^2_{\mathbf{L}^2(\hat{K})} \leq C_{\hat{F}}\,\|\mathbb{B}_K\|^2\,|J_K|^{-1}\,\|\mathbf{grad}\, v\|^2_{\mathbf{L}^2(K)}.$$

- $\|\mathbf{grad}\, v_h\|^2_{\mathbf{L}^2(K)} \leq (d-1)!\,C_{\hat{K}}\,(d+1)\,C_{\hat{F}}\,\|\mathbb{B}_K^{-1}\|^2\,\|\mathbb{B}_K\|^2\,\|\mathbf{grad}\, v\|^2_{\mathbf{L}^2(K)}$.

- On a les majorations Ern-Guermond'21-I, Lemma 11.1 : $\|\mathbb{B}_K\| \leq \dfrac{h_K}{\hat{\rho}_d}$, $\quad \|\mathbb{B}_K^{-1}\| \leq \dfrac{\hat{h}_d}{\rho_K}$.

Estimation de $\|\pi_{cr}(\mathbf{v})\|_h$ (iii)

- Majoration obtenue pour $\|\pi_{cr}(\mathbf{v})\|_h$:

$$\|\mathbf{grad}\,\pi_{cr}(v)\|_{\mathbf{L}^2(K)} \leq C_d\,\frac{h_K}{\rho_K}\,\|\mathbf{grad}\,v\|_{\mathbf{L}^2(K)},$$

$$\text{d'où : } \|\pi_{cr}(\mathbf{v})\|_h \leq C_{cr}\,\|\mathbf{Grad}\,\mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \quad \text{avec } C_{cr} = C_d\,\sigma.$$

- Soit $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathcal{X}_h$. On pose $(\mathbf{v}_h^\star, p_h^\star) = (\beta_{cr}\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_{h,p_h}, -\beta_{cr}p_h)$ où $\mathbf{v}_{h,p_h} = \Pi_{cr}(\mathbf{v}_{p_h})$.

  On a :

$$a_{S,h}(\,(\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h^\star, p_h^\star)\,) \geq C_{cr,\min}\,C_{cr,\max}^{-1}\,\|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{\mathcal{X}_h}\,\|(\mathbf{v}_h^\star, p_h^\star)\|_{\mathcal{X}_h},$$

  avec : $C_{cr,\min} = \min\left(\dfrac{\nu^2\,\widetilde{C}_{cr}}{2}\,,\,1\right)$ et $C_{cr,\max} = (\widetilde{C}_{cr} + (\nu\,\widetilde{C}_{cr})^2)^{1/2}$.

Sommaire

Contexte

Le problème de Stokes

Discrétisation non conforme

La T-coercitivité

Éléments finis mixtes non conformes de Crouzeix-Raviart ($k = 1$)

Éléments finis mixtes non conformes de Fortin-Soulié ($k = 2$)

Perspectives

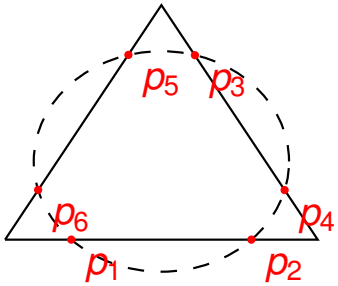
Éléments finis mixtes non conformes pour $k = 2$ (i)

- Espace mixte : $\mathcal{X}_{fs} = \mathbf{X}_{fs} \times (Q_{fs} \cap L^2_0(\Omega))$.

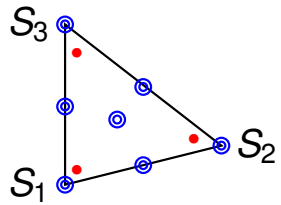
$$\mathbf{X}_{fs} = (X_{fs})^d,\ X_{fs} = X_{0h} \oplus \Phi_h, \qquad Q_{fs} = \left\{ q_h \,|\, \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad q_h \in P^1(K) \right\}.$$

On a :
$$\begin{cases} X_{0h} = \left\{ v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \,|\, \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad v_{h|K} \in P^2(K),\ v_{h|\partial\Omega=0} \right\}, \\ \Phi_h = \left\{ \phi_h \,|\, \phi_{h|K} = \alpha_K \phi_K \right\}, \quad \phi_K = 2 - 3 \sum_{F_f \in \partial K} \lambda^2_{f,K}. \end{cases}$$

Points de Gauss-Legendre :



Degrés de liberté :



Vitesse, pression.

- Opérateur d'interpolation scalaire :

$\mathcal{M}_i = \{K \in \mathcal{T}_h | S_i \in K\}$, $\pi_{\mathcal{M}_i}$ = projection de $L^2(\mathcal{M}_i) \to P^2(\mathcal{M}_i)$.

$$\tilde{\pi}_K : H^1(K) \to P^2(K), \quad \begin{cases} \forall i \in \{1,2,3\}, \quad (\tilde{\pi}_K(v))(S_{i,K}) = \pi_{\mathcal{M}_i}(v)(S_{i,K}), \\ \forall f \in \{1,2,3\}, \quad \displaystyle\int_{F_{f,K}} \tilde{\pi}_K(v) = \int_{F_{f,K}} v. \end{cases}$$

L'opérateur $\pi_{fs} : H^1(\Omega) \to X_{fs}$ est tel que : $(\pi_{fs}(v))_{|K} = \pi_K(v)$ où

$$\pi_K : H^1(K) \to P^2(K), \quad \pi_K(v) = \tilde{\pi}_K(v) + \alpha_k \phi_K, \quad \text{avec} \int_K \pi_K v = \int_K v.$$

Éléments finis mixtes non conformes pour $k = 2$ (ii)

- Opérateur d'interpolation vectoriel :

  L'opérateur $\Pi_{fs} : \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{X}_{fs}$ est tel que : $(\Pi_{fs}(\mathbf{v}))_{|K} = \Pi_K(\mathbf{v})$ où

$$\Pi_K : \mathbf{H}^1(K) \to \mathbf{P}^2(K), \quad \left\{ \Pi_K(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \pi_K(v_1) + \alpha_{K,1}\phi_K \\ \pi_K(v_2) + \alpha_{K,2}\phi_K \end{pmatrix} \right.$$

  avec pour $i = 1, 2$, $\displaystyle\int_K \mathrm{div}\,(\,\Pi_K(\mathbf{v})\,)\,x_i = \int_K \mathrm{div}\,(\mathbf{v})\,x_i.$

- Soit $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$. On a bien $\mathrm{div}_h\,(\Pi_K(\mathbf{v})) = \mathrm{div}_h(\mathbf{v})$:

$$\begin{aligned} \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \int_K \mathrm{div}\,(\Pi_{fs}(\mathbf{v})) &= \sum_{F\in\partial K} \int_F \Pi_{fs}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}_F = \sum_{F\in\partial K} \int_F \Pi_K(\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}_F, \\ &= \sum_{F\in\partial K} \int_F \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_F = \int_K \mathrm{div}\,(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

$$\int_K \mathrm{div}\,(\Pi_{fs}(\mathbf{v}))\,x_i = \int_K \mathrm{div}\,(\Pi_K(\mathbf{v}))\,x_i = \int_K \mathrm{div}\,(\mathbf{v})\,x_i$$

- A l'aide de l'inégalité (*Trace*), on peut montrer l'estimation :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega),\ \|\Pi_{fs}(\mathbf{v})\|_h \le C_{fs}\,\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

  C_{fs} dépend de $\dfrac{\max_K h_K}{\min_K \rho_K}$ et de θ, le plus petit angle de la triangulation.

- La forme bilinéaire $a_{S,h}$ est T-coercitive sur $\mathcal{X}_{fs}$.

Sommaire

Contexte

Le problème de Stokes

Discrétisation non conforme

La T-coercitivité

Éléments finis mixtes non conformes de Crouzeix-Raviart ($k = 1$)

Éléments finis mixtes non conformes de Fortin-Soulié ($k = 2$)

Perspectives

Poursuite de l'étude de la T-coercivité discrète :

- Éléments finis de Fortin-Soulié : étudier le cas $d = 3$.
- Éléments finis $\mathbf{P}^1_{nc} - (P^0 + P^1)$ (code TrioCFD).
- Éléments finis de Galerkin discontinus (proposition de stage de M2 et sujet de thèse).

  Étudier les méthodes de projection de Kreuzer-Verfürth-Zanotti'21.

Élements finis de Crouzeix-Raviart : intérêt de la projection Π_{RT_0}

- Problème de Navier-Stokes avec comme solution un vortex stationnaire (code TrioCFD).
- $\Omega = (0,1)^3, \quad \nu = 1, \quad \mathbf{f} = (Re-1)\,(0, 2y-1, 2z-1)^t.$

$$\mathbf{u} = (0\,,\ -2z+1\,,\ 2y-1)^t, \quad p = Re\left(\frac{(2y-1)^2+(2z-1)^2}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

- Valeurs de $\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_0$ pour $Re = 1$

nb DDL	$\mathbf{P}^1_{nc} - P^0$	$\mathbf{P}^1_{nc} - P^0 + \Pi_{RT_0}$	$\mathbf{P}^1_{nc} - P^0 P^1$
$7.71\,e+03$	$1.00\,e-03$	$3.22\,e-05$	$6.08\,e-03$
$1.53\,e+04$	$5.62\,e-03$	$1.77\,e-05$	$3.80\,e-03$
$3.05\,e+04$	$3.16\,e-04$	$8.77\,e-06$	$2.45\,e-03$
$6.11\,e+04$	$1.78\,e-04$	$4.42\,e-06$	$1.72\,e-03$
τ	2.5	2.8	1.7

- Valeurs de $\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_0$ pour $Re = 100$

nb DDL	$\mathbf{P}^1_{nc} - P^0$	$\mathbf{P}^1_{nc} - P^0 + \Pi_{RT_0}$	$\mathbf{P}^1_{nc} - P^0 P^1$
$7.71\,e+03$	$1.02\,e-01$	$3.19\,e-05$	$6.10\,e-03$
$1.53\,e+04$	$5.58\,e-01$	$1.75\,e-05$	$3.83\,e-03$
$3.05\,e+04$	$3.15\,e-02$	$8.75\,e-06$	$2.43\,e-03$
$6.11\,e+04$	$1.76\,e-02$	$4.39\,e-06$	$1.74\,e-03$
τ	2.5	2.8	1.7

- Limitation de Π_{RT_0} : schéma implicite en temps uniquement.
- Projet : faire les développements pour Π_{BDM}, travail sur la solveur de pression.
- Dans TrioCFD, dossier `P1NCPORT`, mot-clef : `PO RT`.

Élements finis de Fortin-Soulié : intérêt de la projection Π_{RT_1}

- Stage de M2 de Marhan Rihani en 2018.
- EF de Fortin-Soulié, projection sur les EF de Raviart-Thomas d'ordre 1 Π_{RT_1}.
- *Vitesse nulle,* $h = 0.05$, $N_{\mathbf{u}} = 6\,486$, $N_p = 3\,152$.

  $\Omega = (0,1)^2$, $p = x^3 - \frac{1}{4}$, $\mathbf{f} = \mathbf{grad}\left(x^3\right)$:

	$\|\mathbf{u}_h\|_0$	$\|\mathbf{u}_h\|_h$	$\|p - p_h\|_0$
FS	$2.6\,e-07$	$3.7\,e-05$	$2.9\,e-03$
$FS + \Pi_{RT_1}$	$9.7\,e-19$	$3.3\,e-17$	$2.9\,e-03$

- *Vortex,* $h = 0.1$, $N_{\mathbf{u}} = 1\,534$, $N_p = 726$:

  $\Omega = (0,1)^2$, $\mathbf{u} = \mathbf{rot}\left(x^2(1-x)^2\,y^2(1-y)^2\right)$, $p = x^3 + y^3 - 1/2$.

	ν	$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0$	$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h$	$\|p - p_h\|_0$
FS	$1.0\,e-0$	$1.5\,e-5$	$9.2\,e-4$	$2.1\,e-3$
	$1.0\,e-2$	$2.8\,e-4$	$2.0\,e-2$	$1.9\,e-3$
	$1.0\,e-4$	$9.4\,e-2$	$1.9\,e-0$	$1.9\,e-3$
$FS + \Pi_{RT_1}$	$1.0\,e-0$	$1.7\,e-5$	$1.1\,e-4$	$2.8\,e-3$
	$1.0\,e-4$	$1.7\,e-5$	$1.1\,e-4$	$2.8\,e-3$
	$1.0\,e-8$	$1.7\,e-5$	$1.1\,e-4$	$2.8\,e-3$

Merci !