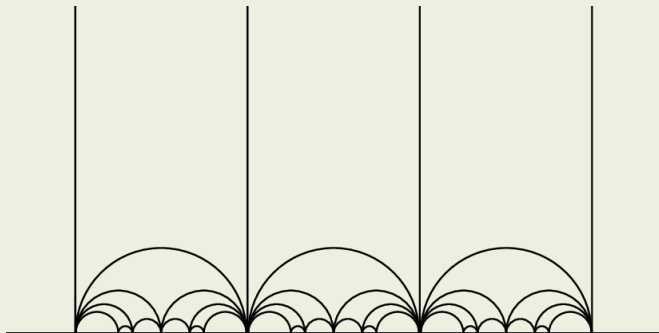


# Symboles modulaires, arrangements d'hyperplans et fonctions elliptiques



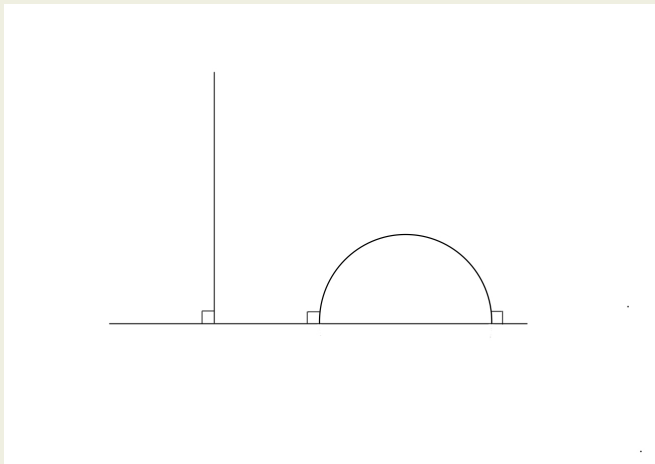
Basé sur un travail en cours avec  
**Pierre Charollois, Luis Garcia et Akshay Venkatesh.**

— | —

## Symboles modulaires

Soit

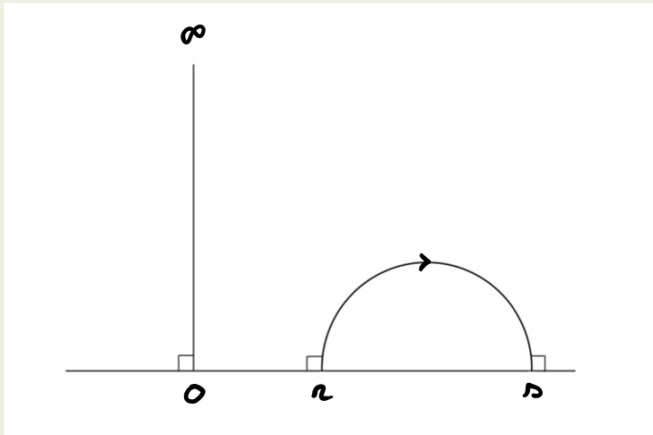
$$\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} : \text{Im}(z) > 0\}.$$



Soit

$$\{r, s\} \subset \mathbf{H}^* = \mathbf{H} \cup (\mathbf{Q} \cup \{\infty\})$$

l'adhérence dans  $\mathbf{H}^*$  de la droite (géodésique) orientée joignant  $r$  à  $s$ .



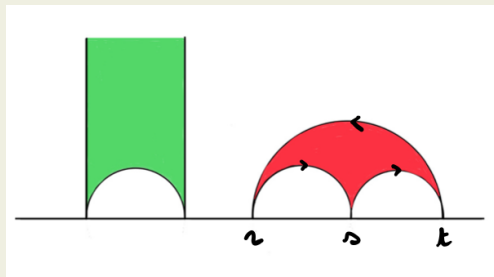
Soit

$$\{r, s\} \subset \mathbf{H}^* = \mathbf{H} \cup (\mathbf{Q} \cup \{\infty\})$$

l'adhérence dans  $\mathbf{H}^*$  de la droite (géodésique) orientée joignant  $r$  à  $s$ .

Soit

$$\Delta = \mathbf{Z}[\{r, s\} : r, s \in \mathbf{Q} \cup \{\infty\}] / \langle \{r, s\} + \{s, t\} + \{t, r\} \rangle.$$



La classe  $[r, s]$  de  $\{r, s\}$  est un **symbole modulaire**; on dit qu'il est **unimodulaire** si

$$\{r, s\} = \gamma \cdot \{\infty, 0\} = \left\{ \frac{a}{c}, \frac{b}{d} \right\}$$

avec  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ .

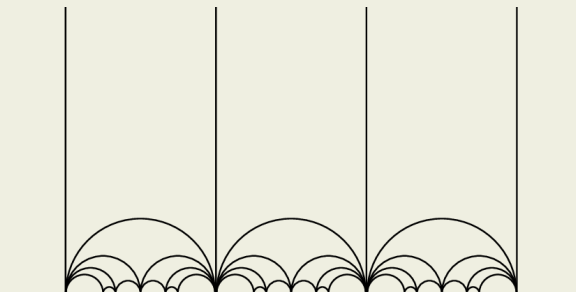
La classe  $[r, s]$  de  $\{r, s\}$  est un **symbole modulaire**; on dit qu'il est **unimodulaire** si

$$\{r, s\} = \gamma \cdot \{\infty, 0\} = \left\{ \frac{a}{c}, \frac{b}{d} \right\}$$

avec  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ .

– **Lemme.**— *Le  $\mathbf{Z}$ -module  $\Delta$  est engendré par des symboles unimodulaires.*

On considère la **triangulation de Farey**



$$\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \cdot \{\infty, 0\}$$

$$\left\{ \frac{p}{q}, \frac{p'}{q'} \right\}$$

$$(pq' - qp' = \pm 1).$$





En général, on a :

$$\{\infty, s\} = \sum_{k=1}^n \partial\left\{\infty, \frac{p_k}{q_k}, \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right\} - \sum_{k=0}^n \gamma_k \cdot \{\infty, 0\}$$

avec

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} -p_0 & 1 \\ -q_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} -p_1 & p_0 \\ -q_1 & q_0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \gamma_n = \begin{pmatrix} -p_n & p_{n-1} \\ -q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

où  $p_0/q_0, p_1/q_1, \dots, p_n/q_n$  sont les quotients partiels de la décomposition en **fraction continue**

$$s = b_0 - \frac{1}{b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{\dots}}}, \quad (b_0 = \frac{p_0}{q_0}, \quad q_0 = \pm 1).$$

Exemple :  $\frac{3}{5} = 1 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2}}$  avec  $\frac{p_0}{q_0} = 1, \frac{p_1}{q_1} = \frac{2}{3},$  et  $\frac{p_2}{q_2} = \frac{3}{5}.$

— || —

## Des symboles modulaires aux fonctions trigonométriques

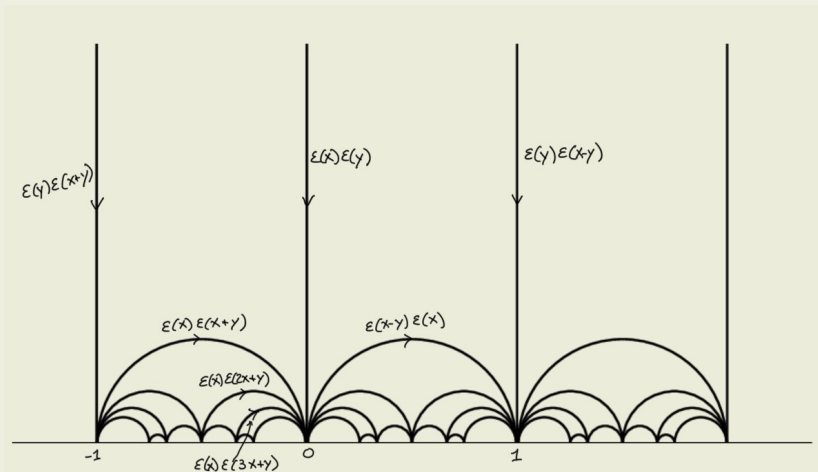
Soit

$$\overline{\mathcal{M}}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2) = \mathcal{M}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2)/\text{constantes.}$$

– **Observation.**– L'application  $\mathbf{c} : \Delta \rightarrow \overline{\mathcal{M}}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2)$  définies sur les *symboles unimodulaires* par

$$\mathbf{c}([\gamma])(x, y) = \varepsilon(dx - by)\varepsilon(-cx + ay) \left( \begin{array}{l} \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbf{C}^2 \\ \varepsilon(x) = \cot(\pi x) \end{array} \right)$$

est bien définie et  $SL_2(\mathbf{Z})$ -équivariante.



- L'application  $\mathbf{c}$  est une version élémentaire de tout un zoo d'applications

symboles modulaires (partiels)  $\longrightarrow$  K-théorie

géométrie/topologie  $\rightsquigarrow$  algèbre/arithmétique

étudiées par Stevens, Busuioc, Sharifi, Goncharov, Brunault...

- L'application  $\mathbf{c}$  est une version élémentaire de tout un zoo d'applications

symboles modulaires (partiels)  $\longrightarrow$  K-théorie

géométrie/topologie  $\rightsquigarrow$  algèbre/arithmétique

étudiées par Stevens, Busuioc, Sharifi, Goncharov, Brunault...

- Une question naturelle dans ce contexte est celle de son comportement vis à vis des **opérateurs de Hecke**.

Considérons  $\mathbf{T}_p$  avec  $p = 2$ . Alors

$$\begin{aligned}(\mathbf{T}_2 \mathbf{c})([\text{Id}])(x, y) &= \varepsilon(2x)\varepsilon(y) + \varepsilon(x)\varepsilon(2y) \\ &\quad + \varepsilon(2x)\varepsilon(x+y) + \varepsilon(2y)\varepsilon(x+y).\end{aligned}$$

On peut montrer que

$$(\mathbf{T}_2 - 2[2]^* - 1) \circ \mathbf{c} = 0.$$



Considérons  $\mathbf{T}_p$  avec  $p = 3$ . Alors

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_3 \mathbf{c})([\text{Id}])(x, y) &= \varepsilon(3x)\varepsilon(y) + \varepsilon(x)\varepsilon(3y) \\ &\quad + \varepsilon(3x)\varepsilon(x + y) + \varepsilon(3y)\varepsilon(x + y) \\ &\quad + \varepsilon(3x)\varepsilon(y - x) + \varepsilon(3y)\varepsilon(x - y). \end{aligned}$$

On peut montrer que

$$(\mathbf{T}_3 - 3[3]^* - 1) \circ \mathbf{c} = 0.$$

Considérons  $\mathbf{T}_p$  avec  $p = 5$ . Alors

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{T}_5 \mathbf{c})([\text{Id}])(x, y) &= \varepsilon(5x)\varepsilon(y) + \varepsilon(x)\varepsilon(5y) + \varepsilon(5x)\varepsilon(x+y) \\
 &\quad + \varepsilon(5y)\varepsilon(x+y) + \varepsilon(5x)\varepsilon(y-2x) + \varepsilon(5y)\varepsilon(x+2y) \\
 &\quad - \varepsilon(y-2x)\varepsilon(x+2y) + \varepsilon(5x)\varepsilon(y+2x) + \varepsilon(5y)\varepsilon(x+3y) \\
 &\quad + \varepsilon(y+2x)\varepsilon(x+3y) + \varepsilon(5x)\varepsilon(y-x) + \varepsilon(x-y)\varepsilon(5y).
 \end{aligned}$$

On peut montrer que

$$(\mathbf{T}_5 - 5[5]^* - 1) \circ \mathbf{c} = 0.$$

— III —

## Quelques questions et un théorème

- Démonstration/explication de  $(\mathbf{T}_p - p[p]^* - 1) \circ \mathbf{c} = 0$  ?
- Peut-on relever l'application  $\mathbf{c}$  à  $\mathcal{M}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2)$  ?
- Que dire des produits de  $n$  fonctions trigonométriques ?
- Que dire des fonctions elliptiques ?

# Des symboles modulaires à la cohomologie

- L'application  $\bar{\mathbf{S}} : g \mapsto \mathbf{c}([\infty, g \cdot \infty])$  définit un 1-cocycle de  $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$  à valeurs dans  $\overline{\mathcal{M}}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2)$ .

# Des symboles modulaires à la cohomologie

- L'application  $\bar{\mathbf{S}} : g \mapsto \mathbf{c}([\infty, g \cdot \infty])$  définit un 1-cocycle de  $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$  à valeurs dans  $\overline{\mathcal{M}}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2)$ .
- Autrement dit, on a

$$\bar{\mathbf{S}}(gh) = \bar{\mathbf{S}}(g) + g \cdot \bar{\mathbf{S}}(h).$$

– **Théorème.**– *Il existe un 1-cocycle  $\mathbf{S}$  of  $SL_2(\mathbf{Z})$ , à valeurs dans  $\mathcal{M}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2)$ , vérifiant les propriétés suivantes.*

① *On a*

$$[\mathbf{S}] = [\overline{\mathbf{S}}] \neq 0 \quad \text{dans} \quad H^1(SL_2(\mathbf{Z}), \overline{\mathcal{M}}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2)).$$

② *Pour tout entier  $p$  premier, on a*

$$(\mathbf{T}_p - p[p]^* - 1)[\mathbf{S}] = 0.$$

- En augmentant le niveau, on peut **lisser**  $S$  et obtenir un cocycle explicite qui s'exprime en termes de sommes de Dedekind généralisées.



- En augmentant le niveau, on peut **lisser**  $\mathbf{S}$  et obtenir un cocycle explicite qui s'exprime en termes de sommes de Dedekind généralisées.
- Soit  $N$  un entier strictement positif et soit

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) : b \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

- En augmentant le niveau, on peut **lisser**  $\mathbf{S}$  et obtenir un cocycle explicite qui s'exprime en termes de sommes de Dedekind généralisées.
- Soit  $N$  un entier strictement positif et soit

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) : b \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

- Pour tout  $\delta = \sum_{d|N} n_d [d]$  (somme formelle), soit  $\mathbf{S}_\delta$  le 1-cocycle of  $\Gamma_0(N)$  défini par

$$\mathbf{S}_\delta(g) = \sum_{d|N} n_d d \pi_d^* \mathbf{S}(\pi_d g \pi_d^{-1}), \quad (\pi_d = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

– **Théorème.**– Si  $\sum_{d|N} n_d d = 0$ , alors  $\mathbf{S}_\delta$  est cohomologue au 1-cocycle  $\mathbf{S}_\delta^*$  défini par

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbf{S}_\delta^* \left( \begin{array}{cc} a & * \\ Nc & * \end{array} \right) \right] (x, y) \\ &= \sum_{d|N} \frac{n_d d}{d'c} \sum_{j=0}^{d'c-1} \varepsilon \left( \frac{1}{d'c} (y + j) \right) \varepsilon \left( dx - \frac{a}{d'c} (y + j) \right), \end{aligned}$$

avec  $dd' = N$ .

– **Théorème.**– Si  $\sum_{d|N} n_d d = 0$ , alors  $\mathbf{S}_\delta$  est cohomologue au 1-cocycle  $\mathbf{S}_\delta^*$  défini par

$$\left[ \mathbf{S}_\delta^* \left( \begin{array}{cc} a & * \\ Nc & * \end{array} \right) \right] (x, y) \\ = \sum_{d|N} \frac{n_d d}{d'c} \sum_{j=0}^{d'c-1} \varepsilon \left( \frac{1}{d'c} (y + j) \right) \varepsilon \left( dx - \frac{a}{d'c} (y + j) \right),$$

avec  $dd' = N$ .

- “Résidu en  $(0, 0)$ ”  $\rightsquigarrow$  morphismes de Dedekind–Rademacher

$$\Phi_\delta : \Gamma_0(N) \rightarrow \mathbf{Z}.$$

- Je veux voir **S** comme une version archimédienne du “cocycle rigide”  $J_{\text{DR}}$  de Darmon–Vonk. Espoir : aller vers une théorie explicite du corps des classes pour les corps quadratiques réels.

- Je veux voir  $\mathbf{S}$  comme une version archimédienne du “cocycle rigide”  $J_{\mathrm{DR}}$  de Darmon–Vonk. Espoir : aller vers une théorie explicite du corps des classes pour les corps quadratiques réels.
- Soit  $\Gamma \subset \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$  un sous-groupe d’indice fini. Il existe des  $(n - 1)$ -cocycles analogues  $\mathbf{S}_{\mathrm{trig}}$  et  $\mathbf{S}_{\mathrm{ell}}$  à valeurs respectives dans les  $n$ -formes méromorphes sur respectivement  $\mathbf{C}^n/\mathbf{Z}^n$  et  $E^n$  où  $E \rightarrow S$  est une famille de courbes elliptiques.

— IV —

Origine topologique des cocycles  $S_{\text{trig}}$  et  $S_{\text{ell}}$

- Soit  $A \rightarrow S$  une famille lisse de groupes algébriques commutatifs dont les fibres sont connexes et de dimension 1 et soit  $T = A^n \rightarrow S$  le produit fibré de  $n$  copies de  $A$  au-dessus de  $S$ . Le groupe  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$  opère sur  $T$  par multiplication matricielle



- Soit  $A \rightarrow S$  une famille lisse de groupes algébriques commutatifs dont les fibres sont connexes et de dimension 1 et soit  $T = A^n \rightarrow S$  le produit fibré de  $n$  copies de  $A$  au-dessus de  $S$ . Le groupe  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$  opère sur  $T$  par multiplication matricielle
- Soit  $c$  un entier supérieur à 1. Un **0-cycle invariant** de  $c$ -torsion sur  $T$  est une combinaison linéaire formelle à coefficients entiers de points de  $c$ -torsion sur  $T$  qui est invariante par un sous-groupe  $\Gamma \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ , autrement dit un élément

$$D \in H_{\Gamma}^0(T[c]).$$

- L'isomorphisme de Thom induit

$$H_{\mathbb{F}}^0(T[c]) \xrightarrow{\sim} H_{\mathbb{F}}^{2n}(T, T - T[c]).$$

- On a une suite exacte (associée à la paire  $(T, T - T[c])$ ) :

$$H_{\mathbb{F}}^{2n-1}(T) \rightarrow H_{\mathbb{F}}^{2n-1}(T - T[c]) \rightarrow H_{\mathbb{F}}^{2n}(T, T - T[c]) \rightarrow H_{\mathbb{F}}^{2n}(T).$$

- L'isomorphisme de Thom induit

$$H_{\mathbb{F}}^0(T[c]) \xrightarrow{\sim} H_{\mathbb{F}}^{2n}(T, T - T[c]).$$

- On a une suite exacte (associée à la paire  $(T, T - T[c])$ ) :

$$H_{\mathbb{F}}^{2n-1}(T) \rightarrow H_{\mathbb{F}}^{2n-1}(T - T[c]) \rightarrow H_{\mathbb{F}}^{2n}(T, T - T[c]) \rightarrow H_{\mathbb{F}}^{2n}(T).$$

– **Lemme.**— *L'image de  $[D]$  dans  $H_{\mathbb{F}}^{2n}(T)$  est **rationnellement nulle** si  $A$  est le groupe multiplicatif ou si  $D$  est de degré 0.*

# Une classe de cohomologie équivariante

- Si  $A$  est le groupe multiplicatif ou si  $D$  est de degré 0, on peut relever  $D$  en un élément de  $H_{\Gamma}^{2n-1}(T - T[c])$ . Toutefois, en général ce relevé n'est pas uniquement déterminé.

# Une classe de cohomologie équivariante

- Si  $A$  est le groupe multiplicatif ou si  $D$  est de degré 0, on peut relever  $D$  en un élément de  $H_{\Gamma}^{2n-1}(T - T[c])$ . Toutefois, en général ce relevé n'est pas uniquement déterminé.
- Soit  $s$  un entier tel que  $[s]_*(D) = D$ . Le 0-cycle  $D$  possède un **relevé privilégié**

$$S[D] \in H_{\Gamma}^{\bullet}(T - T[c])^{(1)} \subset H_{\Gamma}^{\bullet}(T - T[c])$$

(sous-espace caractéristique de  $[s]_*$  associé à la valeur propre 1).

L'étape suivante part de la

– **Remarque.**– *Supposons que  $Y/\mathbf{C}$  soit une variété affine, de dimension  $n$ , sur laquelle un groupe  $G$  opère, et supposons donnée une classe de cohomologie équivariante  $\alpha \in H_G^{2n-1}(Y(\mathbf{C}))$ . Puisque  $H^i(Y(\mathbf{C}))$  s'annule pour  $i > n$ , la suite spectrale pour la cohomologie équivariante donne une application*

$$H_G^{2n-1}(Y(\mathbf{C})) \rightarrow H^{n-1}(G, H^n(Y(\mathbf{C}))).$$

*Elle permet donc d'associer à  $\alpha$  une classe de cohomologie du groupe  $G$ .*

- La variété  $T - T[c]$  n'est pas affine, mais on peut restreindre la classe  $S[D]$  à un ouvert affine  $U$ . On voudrait aussi que  $U$  soit invariant par  $\Gamma$ ; malheureusement un tel  $U$  n'existe pas. 😊

- La variété  $T - T[c]$  n'est pas affine, mais on peut restreindre la classe  $S[D]$  à un ouvert affine  $U$ . On voudrait aussi que  $U$  soit invariant par  $\Gamma$ ; malheureusement un tel  $U$  n'existe pas. ☹
- On peut toutefois formellement prendre

$$U := "T - \bigcup_{\chi, a} \chi^{-1}(a)".$$





- La variété  $T - T[c]$  n'est pas affine, mais on peut restreindre la classe  $S[D]$  à un ouvert affine  $U$ . On voudrait aussi que  $U$  soit invariant par  $\Gamma$ ; malheureusement un tel  $U$  n'existe pas.
- Soit  $\Xi$  un ensemble fini de couples  $(\chi, a)$  où  $\chi : T \rightarrow A$  est un morphisme primitif et  $a \in A[c]$  est un point de torsion. On pose

$$U_{\Xi} = T - \cup_{(\chi, a) \in \Xi} \chi^{-1}(a).$$

On associe à  $S[D]$  une classe dans le groupe

$$H^{n-1}(\Gamma, \varinjlim_{\Xi} H^j(U_{\Xi})).$$

- Elle consiste à représenter  $\varinjlim_{\Xi} H^j(U_{\Xi})$  par des formes méromorphes.

- Elle consiste à représenter  $\varinjlim_{\Xi} H^j(U_{\Xi})$  par des formes méromorphes.
- Pour  $T = \mathbf{C}^n$  cela résulte d'un théorème célèbre de Arnold–Brieskorn–Orlik–Solomon :

$$\varinjlim_L H^j(\mathbf{C}^n - \cup_{\ell \in L} \ell^{-1}(0)) = \begin{cases} 0, & j > n, \\ \Omega_{\text{mer}}^n(\mathbf{C}^n), & j = n. \end{cases}$$

Soit  $\Upsilon$  un arrangement d'hyperplans dans  $T$ .

- Une forme méromorphe  $\omega$  sur  $T$  est à pôles logarithmiques le long de  $\Upsilon$  si au voisinage de chaque point  $p \in T$  on peut décomposer  $\omega$  comme combinaison linéaire sur  $\mathbf{C}$  de formes du type

$$\nu \wedge \bigwedge_J \frac{df_j}{f_j}$$

où  $\nu$  est une forme holomorphe au voisinage de  $p$  et chaque indice  $j \in J$  paramètre un hyperplan de  $\Upsilon$  passant par  $p$  défini par une équation linéaire locale  $f_j = 0$ .

Soit  $\Upsilon$  un arrangement d'hyperplans dans  $T$ .

- Une forme méromorphe  $\omega$  sur  $T$  est à pôles logarithmiques le long de  $\Upsilon$  si au voisinage de chaque point  $p \in T$  on peut décomposer  $\omega$  comme combinaison linéaire sur  $\mathbf{C}$  de formes du type

$$\nu \wedge \bigwedge_J \frac{df_j}{f_j}$$

où  $\nu$  est une forme holomorphe au voisinage de  $p$  et chaque indice  $j \in J$  paramètre un hyperplan de  $\Upsilon$  passant par  $p$  défini par une équation linéaire locale  $f_j = 0$ .

- $\rightsquigarrow$  complexe de faisceaux d'espaces vectoriels complexes sur  $T$

$$\Omega_{\langle T, \Upsilon \rangle}^\bullet$$

- Dans sa thèse **Clément Dupont** montre que l'inclusion entre complexes de faisceaux

$$\Omega_{\langle T, \Upsilon \rangle}^\bullet \hookrightarrow j_* \Omega_{T - \Upsilon}^\bullet,$$

où  $j$  désigne l'inclusion de  $T - \Upsilon$  dans  $T$ , est un quasi-isomorphisme.

- Dans sa thèse **Clément Dupont** montre que l'inclusion entre complexes de faisceaux

$$\Omega_{\langle T, \Upsilon \rangle}^\bullet \hookrightarrow j_* \Omega_{T-\Upsilon}^\bullet,$$

où  $j$  désigne l'inclusion de  $T - \Upsilon$  dans  $T$ , est un quasi-isomorphisme.

– **Proposition.** – *Supposons  $T - \Upsilon$  affine. L'application naturelle*

$$H^0(T, \Omega_{\langle T, \Upsilon \rangle}^j)^{(1)} \rightarrow H^j(T - \Upsilon)^{(1)}$$

*est un isomorphisme pour tout degré  $j \leq n = \dim(T)$ .*

- Dans sa thèse **Clément Dupont** montre que l'inclusion entre complexes de faisceaux

$$\Omega_{\langle T, \Upsilon \rangle}^\bullet \hookrightarrow j_* \Omega_{T-\Upsilon}^\bullet,$$

où  $j$  désigne l'inclusion de  $T - \Upsilon$  dans  $T$ , est un quasi-isomorphisme.

– **Proposition.** – *Supposons  $T - \Upsilon$  affine. L'application naturelle*

$$H^0(T, \Omega_{\langle T, \Upsilon \rangle}^j)^{(1)} \rightarrow H^j(T - \Upsilon)^{(1)}$$

*est un isomorphisme pour tout degré  $j \leq n = \dim(T)$ .*

$$\rightsquigarrow \mathbf{S}[D] \in H^{n-1}(G, \Omega_{\text{mer}}^n(T)).$$



# Le monde des “cocycles d'Eisenstein”

Type	Additif	Trigonometrique	Elliptique
Groupe	$GL_n(\mathbf{C})^\delta$	$GL_n(\mathbf{Z})$	$GL_n(\mathbf{Z})$
Espace	$\mathbf{C}^n$	$(\mathbf{C}/\mathbf{Z})^n$	$(\mathbf{C}/\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z})^n$
$(n - 1) - \text{cocycle}$	$\mathbf{S}_{\text{aff}}$	$\mathbf{S}_{\text{trig}}$	$\mathbf{S}_{\text{ell}}$
Formes “d'Eisenstein”	$\frac{dz}{z}$	$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{dz}{z+n}$	$\sum_{\lambda \in \mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z}} \frac{dz}{z+\lambda}$

— IV —

## Premières applications

Après évaluation en un point de  $N$ -torsion le cocycle  $\mathbf{S}_{\text{ell}}$  donne lieu à des homomorphismes

$$H_{n-1}(\Gamma, \mathbf{Z}) \longrightarrow M_n(Y(N))$$

geometrie/topologie  $\rightsquigarrow$  arithmétique

- Si  $E$  est à multiplication par  $\mathcal{O}_k$ , le cocycle  $\mathbf{S}_{\text{ell}}$  s'étend aux sous-groupes de congruence  $\Gamma \subset \text{GL}_n(\mathcal{O}_k)$ .

$\rightsquigarrow$  classes dans  $H^{n-1}(\Gamma, \overline{\mathbf{Q}})$ .

- Si  $E$  est à multiplication par  $\mathcal{O}_k$ , le cocycle  $\mathbf{S}_{\text{ell}}$  s'étend aux sous-groupes de congruence  $\Gamma \subset \text{GL}_n(\mathcal{O}_k)$ .

$\rightsquigarrow$  classes dans  $H^{n-1}(\Gamma, \overline{\mathbf{Q}})$ .

- Soit  $L/k$  une extension de degré  $n$ . Soit  $\phi$  un caractère de Hecke algébrique et soit

$$L(\phi, s) = \sum_{\mathfrak{a}} \phi(\mathfrak{a}) N\mathfrak{a}^{-s}$$

sa fonction  $L$  (définie par Hecke), où la somme porte sur les idéaux entiers de  $L$  qui sont premiers relativement au conducteur de  $\phi$ .

- **Théorème. (Conjecturé par Szzech and Colmez)** –  
*Les valeurs critiques de  $L(\phi, s)$  s'expriment comme des polynômes (explicites) en des séries de Kronecker–Eisenstein évaluées en des points d'ordre fini sur des courbes elliptiques à multiplication complexe par  $k$ .*

– **Théorème. (Conjecturé par Szzech and Colmez)** –  
*Les valeurs critiques de  $L(\phi, s)$  s'expriment comme des polynômes (explicites) en des séries de Kronecker–Eisenstein évaluées en des points d'ordre fini sur des courbes elliptiques à multiplication complexe par  $k$ .*

– **Corollaire. (Harder, Kings–Sprang)** – *Les valeurs critiques de  $L(\phi, s)$  appartiennent à*

$$\Omega_{\infty}^{na} \pi^{nb} \overline{\mathbb{Q}},$$

*où  $a$  et  $b$  sont des entiers qui dépendent du type à l'infini de  $\phi$  et du point critique  $s$ , et  $\Omega_{\infty}$  est la période réelle d'une courbe elliptique à multiplication complexe par  $k$ .*