1. Cohomologie des courbes modulaires

$N \geq 3$ $\quad Y(N)_{/\mathbb{Q}}$ courbe $= \left\{ (E, \eta_N) \,\middle|\, \begin{array}{l} E \text{ courbe elliptique} \\ \eta_N : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \xrightarrow{\sim} E[N] \end{array} \right\}$

Tour $\quad (Y(N))_{N \geq 3}$ $\quad Y(N) \to Y(M)$ $\quad M \mid N$.

finie étales.

p premier $\quad H^1_{ét!}(Y(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p) = \mathrm{Im}(H^1_c \to H^1)$.

$$H^1_!(\mathbb{Q}_p) = \varinjlim_N H^1_{ét!}(Y(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p).$$

- $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ action localement finie
- $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ action lisse, stabilisateurs ouverts.

$\cup$

$GL_2(\mathbb{Q})$ agit sur la tour des courbes.

$\gamma \in GL_2(\mathbb{Q})$, $\quad Y(N) \xrightarrow{\gamma} Y(M)$ si $\gamma \Gamma(N) \gamma^{-1} \subset \Gamma(M)$

Décomposition de l'action de $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \times \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Notion de représentation automorphe cuspidale de $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$.

π représentation topologiquement irréductible de $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ sur un espace de Hilbert $\simeq$ facteur direct

$$L^2\left(GL_2(\mathbb{Q}) \backslash GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}), \omega \right)$$

et qui ne sont pas de dimension finie

$\pi \simeq \pi_f \widehat{\otimes} \pi_\infty$ $\quad$ où π_f est une rep irréductible lisse (sur $\mathbb{C}$) de $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$

$\pi_f \circlearrowleft GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$, $\quad \pi_\infty \circlearrowleft GL_2(\mathbb{R})$

$k \geq 2$. $\quad \pi_{\infty,k}$ $\quad$ "série discrète de poids k de $GL_2(\mathbb{R})$"

$$\mathcal{A}_k = \{ \pi_f \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{irr}} GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \mid \pi_f \otimes \pi_{\infty,k} \text{ est automorphe cuspidale} \}.$$

Théorème (Langlands-Deligne-Carayol).

$\mathbb{C} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_p$ $\left\{ \quad H^1_!(\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}}_p \simeq \bigoplus_{\pi_f \in \mathcal{A}_2} (\pi_f \otimes \rho) \right.$ où $\rho : Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ "associée" à π_f.

"associée" : $\pi_f \simeq \bigotimes'_{\ell \text{ premiers}} \pi_\ell$ $\quad \pi_\ell$ rep irréd sur $\mathbb{C}$ de $GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$.

et $\forall \ell \neq p$. $\left\{ \pi_\ell \xleftrightarrow[LL]{} (\rho|_{Gal(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathbb{Q}_\ell)})^{F\text{-}ss} \right\}$

où LL : $Rep^{irr}\, GL_2(\mathbb{Q}_\ell) \simeq \left\{ \rho : Gal(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathbb{Q}_\ell) \to GL_2(\overline{\mathbb{Q}}_p) \right.$ (Frob-semisimple) $\left. \right\}$.

<u>Ex</u> : $\quad Ind_{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}}^{GL_2}(1\!\!1 \chi_1 \otimes \chi_2) \longleftrightarrow \chi_1 \oplus \chi_2$

si $\chi_1 \chi_2^{-1} \notin \{\chi_{cyc}, \chi_{cyc}^{-1}\}$.

<u>Variante avec coefficients</u>

$$E_N \downarrow Y(N) \qquad V_k = Sym^{k-2}(R^1 f_* \mathbb{Q}_p) \qquad k \geq 2.$$

$$H^1_!(V_k) = \varinjlim_N H^1_!(Y(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, V_k).$$

Même type de décomposition en termes de rep aut cusp de $\mathcal{A}_k$

<u>Remarques</u> 1) $\pi_f \in \mathcal{A}_k \longleftrightarrow$ formes modulaires paraboliques de poids $k \geq 2$, propres nouvelles.

$\rho : Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est modulaire

si $Hom_{Gal}(\rho \otimes \chi_{cyc}^m, H^1_!(V_k)) \neq 0$ pour un $k \geq 2$.

2) ρ modulaire $\Rightarrow \rho|_{Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ est de de Rham et de poids

de Hodge-Tate $\neq 0$ + ρ est non ramifiée en presque tout ℓ.

Conj de Fontaine-Mazur : la réciproque est vraie.

<u>Pbs</u> : · ne permet pas de rendre compte de congruences modulo p entre formes modulaires de poids $\neq$.

· $\ell = p$. $\quad \underset{GL_2(\mathbb{Q}_p)}{\circlearrowright}\pi_p \overset{?}{\longleftrightarrow} \rho|_{Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$

$\quad \xleftarrow[\text{Saito}]{}$

2. Cohomologie complétée p-adique

$H^1(\mathbb{Q}_p) = \varinjlim_N H^1_{ét}(Y(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p)$ contient un $\mathbb{Z}_p$-réseau stable par $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \times Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$

$H^1(\mathbb{Z}_p) = \varinjlim_N H^1_{ét}(Y(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}_p)$

C'est la boule unité d'une norme p-adique sur $H^1(\mathbb{Q}_p)$

$\hat{H}^1(\mathbb{Q}_p)$ = complété de $H^1(\mathbb{Q}_p)$ pour cette norme.

(Emerton, Breuil suivant Ohta)

$$\hat{H}^1(\mathbb{Q}_p) = \left(\varprojlim_m \varinjlim_N H^1_{ét}(Y(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\right) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

espace de Banach p-adique muni d'une norme invariante par $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \times Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Théorème (Emerton) $k \geq 2$.

$$(\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{Q}_p^2)' \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^1(V_k) \hookrightarrow \hat{H}^1(\mathbb{Q}_p)$$

$GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \times Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ - équivariante

($GL_2(\mathbb{Q}_p)$ agit diagonalement à gauche).

Preuve : $H^1(Y(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, V_k) = \left(\varprojlim_m H^1(Y(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathrm{Sym}^{k-2} R^1 f_*(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}))\right) \otimes \mathbb{Q}_p$

$\underbrace{R^1 f_*(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})}_{\simeq E[p^m]^\vee}$ trivial dès que $p^m | N$.

$$H^1(Y(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, V_k) \hookrightarrow \left(\varprojlim_m \varinjlim_N \left(H^1(Y(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{Z}_p^2)\right)\right) \otimes \mathbb{Q}_p$$

$\square$

Mieux : $H^1(V_k) = \varinjlim_{K \subset GL_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Hom}_K\left((\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{Q}_p^2)^\vee, \hat{H}^1(\mathbb{Q}_p)\right)$

K compact ouvert.

$H^1(V_k)$ correspond à des vecteurs "localement algébriques" dans la cohomologie complétée.

En général on considère une variante :

$N \geq 3$ premier à p, $K(N) = \mathrm{Ker}(GL_2(\hat{\mathbb{Z}}) \to GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$

$$\hat{H}^1(N) = \hat{H}^1(\mathbb{Q}_p)^{K(N)} = \left(\varprojlim_m \varinjlim_n H^1(Y(Np^n), \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\right) \otimes \mathbb{Q}_p.$$

$\circlearrowleft$

$GL_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

<u>Décomposition de $\hat{H}^1(\mathbb{Q}_p)$ comme représentation de $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \times \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.</u>

On ne peut pas espérer de décomposition en somme directe.

$$\tilde{H}^1(\mathbb{Q}_p) = \varinjlim_N \hat{H}^1(N) \underset{\text{dense}}{\subset} \hat{H}^1(\mathbb{Q}_p).$$

$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_2(L) \subset GL_2(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ $\quad L/\mathbb{Q}_p$ finie.

$$\tilde{H}^1(\mathbb{Q}_p)[\rho] = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}}(\rho, \tilde{H}^1(\mathbb{Q}_p)) \circlearrowleft GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}).$$

<u>Théorème</u> (Emerton (~2010), Berger, Breuil Colmez, Kisin, Paškūnas).

Supposons que ρ est abs irréductible et impaire
(+ hyp techniques)

$$\tilde{H}^1(\mathbb{Q}_p)[\rho] \simeq \Big(\bigotimes_{\ell \neq p}{}' \underset{\underset{GL_2(\mathbb{Q}_\ell)}{\circlearrowleft}}{\pi_\ell}\Big) \otimes_L \Pi_p$$

Π_p ↳ espace de Banach p-adique muni d'une action unitaire de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$

où $\pi_\ell \overset{LL}{\longleftrightarrow} \rho|_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell/\mathbb{Q}_\ell)}$ ($\ell \neq p$)

$\Pi_p \overset{pLL}{\longleftrightarrow} \rho|_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ $\quad$ pLL correspondance de Langlands p-adique.

$$\left\{\begin{matrix}\text{rep de dim } 2\\ \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to GL_2(L)\\ \text{(continue)}\end{matrix}\right\}/\sim \quad \overset{\text{(Colmez)}}{\hookrightarrow} \quad \left\{\begin{matrix}\text{rep unitaires de } GL_2(\mathbb{Q}_p)\\ \text{sur des espaces de Banach}\\ p\text{-adiques, de longueur finie}\\ \text{“admissibilité”}\end{matrix}\right\}/\sim$$

$$\rho \longmapsto \Pi_p(\rho)$$

$$\cup \qquad\qquad\qquad \cup$$

$$\{\text{abs irréd}\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{top abs irred}\\ \text{et cuspidales}\end{matrix}\right\}$$

(De plus, ρ de Rham à poids de HT $\neq$
$\iff$ $\Pi_p(\rho)$ contient des vecteurs loc alg.)

Si ρ est de Rham (HT $\neq 0$)
$\Rightarrow$ $\tilde{H}^1(\mathbb{Q}_p)[\rho]$ contient des vecteurs loc algébrique

$\Downarrow$

$\exists k \geq 2$ $\quad H^1(V_k)[\rho \otimes x_{cyc}^{m}] \neq 0$

$\Rightarrow$ $\rho \otimes x_{cyc}^{m}$ est associée à une forme modulaire de poids $k \geq 2$.

$GL_2(\mathbb{Q}_p) \qquad GL_2(F) \qquad F/\mathbb{Q}_p$.