Une nouvelle preuve du Théorème de Représentation du gradient MFG dans l'espace de Wasserstein

- **Chloé Jimenez** (Univ Brest, LMBA)
- Antonio Marigonda (Università di Verona, Department of Computer Science)
- Marc Quincampoix (Univ Brest, LMBA)

Mots-clé : Espace de Wasserstein, Dérivation MFG, Transport Optimal.

Résumé : Dans leurs travaux sur les jeux à champs moyen (voir [5] et [3]), J.-M. Lasry et P.-L. Lions définissent le gradient d'une application $u : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ où $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ est l'espace de Wasserstein muni de la distance de Wasserstein W_2.

Pour ce faire, ils considèrent un espace probabilisé $(\Omega, B(\Omega), \mathbb{P})$ choisi de telle sorte que toute probabilité μ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ peut s'exprimer comme la loi d'une variable aléatoire $X \in L^2_{\mathbb{P}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, c'est à dire:

$$X\sharp\mathbb{P} = \mu, \quad \int_\Omega \varphi(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)d\mu(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d).$$

Ceci permet d'associer à u son relévement $U : X \in L^2_{\mathbb{P}}(\Omega, \mathbb{R}^d) \mapsto u(X\sharp\mathbb{P})$. On pose alors:

Définition 1 *On dit que $u : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ est différentiable en $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ si il existe $X \in L^2_{\mathbb{P}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ tel que $X\sharp\mathbb{P} = \mu$ et U soit différentiable en X. On note $DU(X) = p \circ X$.*

Le Théorème de Représentation a été démontré par J.-M. Lasry et P.-L. Lions dans le cas où U est de classe C^1 puis il a été généralisé par W. Gangbo et A. Tudorascu [4]:

Théorème 1 *Supposons que le relévement U de u est differentiable en X tel que $X\sharp\mathbb{P} = \mu$. Alors il existe $p \in L^2_\mu(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ tel que $DU(X) = p \circ X$. De plus si X_1 est également de loi μ alors $DU(X_1) = p \circ X_1$.*

En outre, dans [4], les auteurs montrent que la fonction p du théorème est dans l'espace tangent $\mathcal{T}_\mu(\mathbb{R}^d)$, défini dans [1] par:

$$\mathcal{T}_\mu(\mathbb{R}^d) := \overline{\{\nabla\varphi : \ \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)\}}^{L^2_\mu(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)}.$$

La démonstration de ce théorème par W. Gangbo et A. Tudorascu est assez technique et utilise un résultat puissant de L. Caravenna et S. Daneri [2] permettant de décomposer la mesure de Lebesgue.

Nous proposons une nouvelle preuve très différente utilisant des plans et trois-plans c'est-à-dire des probabilités sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dont on fixe certaines marges. Elle n'utilise pas le résultat de [2] et permet de faire le lien avec une notion de sous-différentiel introduite dans [1].

Références :

[1] L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré. Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures. *2nd ed., Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag*, 2008.

[2] L. Caravenna and S. Daneri. The disintegration of the Lebesgue measure on the faces of a convex function. *J. Funct. Anal. 258*, (2010), 3604-3661.

[3] P. Cardaliaguet. Notes on Mean Field Games. Unpublished notes (2013).

[4] W. Gangbo, A. Tudorascu. On differentiability in the Wasserstein space and well-posedness for Hamilton-Jacobi equations. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 125, p. 119–174, (2019).

[5] J.-M. Lasry, P.-L. Lions. Mean Field Games. *Jpn. J. Math. 2*, (2007), no. 1, 229–260.