Éloignement maximal dans les normés

- **Florent Nacry** (Université Perpignan Via Domitia)
- Lionel Thibault (Université Montpellier)

Mots-clé : Analyse variationnelle unilatérale, fonction distance, points les plus éloignés, sous-différentiabilité, cônes normaux, forte/faible convexité.

Résumé : La fonction distance d'un point $x \in X$ à partie $C \subset X$ d'un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$, i.e., la quantité

$$d_C(x) := \inf_{c \in C} \|x - c\|$$

joue un rôle fondamental en mathématiques et tout particulièrement en optimisation (voir, par exemple, [1]). Cet exposé est consacré à la fonction "jumelle" de d_C définie pour C borné par

$$\mathrm{dfar}_C(x) := \sup_{c \in C} \|x - c\|.$$

Cette distance appelée *la plus éloignée de x sur C* est évidemment convexe, 1-Lipschitz et est invariante par passage à la fermeture ou à l'enveloppe convexe de C. Comme pour la distance usuelle, les (éventuels !) points réalisant dfar (communément appelés *points les plus éloignés*) i.e., les points formant l'ensemble

$$\mathrm{Far}_C(x) := \{c \in C : \|x - c\| = \mathrm{dfar}_C(x)\}$$

sont d'une importance considérable dans l'étude de dfar. Notons que (contrairement à dfar) on a en général $\mathrm{Far}_C \neq \mathrm{Far}_{\overline{\mathrm{co}}\, C}$. Les points les plus éloignés sont connus pour la **conjecture**

$$\mathrm{Far}_C(x) \text{ est un singleton pour tout } x \in X \Rightarrow C \text{ est un singleton,} \tag{1}$$

énoncée par V. Klee en 1961 ([4]) dans un cadre hilbertien. Dans cet article, Klee relie ce problème à la convexité des Chebyshev via une méthode dite *d'inversion* attribuée à Ficken. La conjecture ci-dessus *des points les plus éloignés* est résolue **partiellement** à ce jour :

- Dans certains types d'espaces (l^1, L^1, c^0, $C(K)$...).
- Avec des hypothèses supplémentaires sur C (compacité, existence de sous-suites maximisantes convergentes,...).
- A l'aide d'hypothèses additionnelles sur la multi-application Far.
- Par l'affirmative à renormage (équivalent) près.

A l'instar de l'excellent survey [3], nous adopterons tout au long de notre présentation le point de vue de l'analyse variationnelle ([1, 5, 6]). Nous étudierons les propriétés de différentiabilité et de sous-différentiabilité de $\mathrm{dfar}_C(\cdot)$, les minimums globaux de dfar (*centre de Chebyshev*), la régularité de la multi-application Far et nous donnerons des conditions suffisantes assurant la non-vacuité de l'ensemble $\mathrm{Far}_C(x)$. Nous reviendrons également sur l'implication-conjecture (1).

Nous conclurons cet exposé avec nos nouveaux résultats concernant les ensembles fortement convexes (voir, par exemple, [2] et les références à l'intérieur) pour lesquels la fonction dfar est différentiable.

Références :

[1] F.H. Clarke, Optimization and Nonsmooth Analysis. *Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts*, 1983

[2] G.E. Ivanov, Farthest points and the strong convexity of sets (Russian) Mat. Zametki 87 :382-395 2010 ; translation in Math. Notes 87 :355-366 2010.

[3] J.-B. Hiriart-Urruty, La conjecture des points les plus éloignés revisitée. *Ann. Sci. Math. Québec*, 29 :197-214, 2005.

[4] V. Klee, Convexity of Chevyshev sets. Math. Ann. 142 :292-304 1960/61.

[5] R.T. Rockafellar, R.J.-B. Wets, Variational Analysis. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer*, 1998.

[6] L. Thibault, Unilateral Variational Analysis in Banach spaces : part I & part II. *To appear.*