

Régularisation en norme p en assimilation de données avec $1 < p < 2$; bénéfices et minimisation de l'algorithme du 4DVar avec pénalisation

- **Antoine Bernigaud** (Université de Toulouse, INP, IRIT, France)
- Serge Gratton (Université de Toulouse, INP, IRIT, France)
- Ehouarn Simon (Université de Toulouse, INP, IRIT, France)

Mots-clé : Assimilation de données, Optimisation, 4DVar, Régularisation, norme L_p .

Résumé : L'assimilation de données vise à faire un compromis entre, d'une part, un modèle numérique provenant d'équations décrivant un phénomène et, d'autre part, des observations bruitées effectuées sur une période dite d'assimilation. Elle est particulièrement utilisée en météorologie ou en océanographie, où les variables issues de ces domaines ont une taille de l'ordre de 10^8 à 10^9 . De plus, le nombre d'observations est souvent inférieur aux nombres de variables à estimer ([2]). Si la solution attendue est creuse dans une certaine base, comme dans le cas de l'étude de fronts météorologiques ([3]), ou des zones de glaces dans la mer ([4]), les erreurs numériques peuvent être atténuées grâce à une pénalisation en norme L_p sur la fonctionnelle à minimiser issue du 4DVar.

Le cas $p = 2$ (régularisation de Tikhonov) rend la solution du 4DVar très oscillante, tandis que la norme L_1 (problème LASSO) promet une solution creuse, mais rend la minimisation plus difficile en empêchant par exemple l'utilisation d'algorithmes de minimisation lisse sans contrainte pour un problème de très grande taille. Cependant les signaux intervenants en assimilation de données peuvent être « quasi-creux ». Parmi les différentes méthodes proposées pour pallier ce problème, nous suggérons d'utiliser une norme L_p avec $1 < p < 2$ comme terme de régularisation. Au-delà de la volonté de faire un compromis entre les normes L_1 et L_2 , nous montrons dans [1] que la régularisation en norme L_p peut s'interpréter statistiquement comme l'imposition pour les variables d'état de suivre une loi normale généralisée, ce qui se produit réellement pour, par exemple, la dérivée de l'épaisseur de la glace dans la mer ([4]).

Nous proposons donc un algorithme de gradient conjugué non linéaire dans l'espace dual pour la minimisation du problèmes des moindres carrés non linéaire avec régularisation en norme L_p . Nous prouvons la convergence de ce nouvel algorithme et étudions son comportement sur un problème d'assimilation de données en 2 dimensions basé sur les équations de Barré de Saint-Venant. Le choix du paramètre de régularisation est encore une question ouverte et se fait en pratique via « the Morozov's discrepancy principle ». La condition initiale que l'on cherche à retrouver est parcimonieuse dans une base d'ondelettes et deux fenêtres d'assimilation sont considérées. Nous montrons les avantages de cette modélisation et comparons cet algorithme à d'autres similaires tel que celui proposé dans [6].

Références :

- [1] A. Bernigaud and S. Gratton and F. Lenti and E. Simon and O. Sohab Lp-norm regularization in variational data assimilation *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 147 :2067-2081, 2021.
- [2] M. Tonani and M. Balmaseda and L. Bertino and E. Blockley and G. Brassington and F. Davidson and Y. Drillet and P. Hogan and T. Kuragano and T. Lee and A. Mehra and F. Paranathara and C.A.S. Tanajura and H. Wang Status and future of global and regional prediction systems *Journal of Operational Oceanography*, 8(S2) :s201-s220, 2015.
- [3] M.A. Freitag and N.K. Nichols and C.J. Budd Resolution of sharp fronts in the presence of model error in variational data assimilation *Quarterly journal of the royal meteorological society*, 139 :742-757, 2013.
- [4] Nazanin Asadi and K. Andrea Scott and David A. Clausi Data fusion and data assimilation of ice thickness observations using a regularisation framework *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography*, 2019.
- [5] T. Bonesky and K.S. Kazimierski and P. Maass and F. Schöpfer and T. Schuster Minimization of Tikhonov functional in Banach spaces *Abstract and applied analysis*, 2008 :1-18, 2007.
- [6] Claudio Estatico and Serge Gratton and Flavia Lenti and David Titley-Peloquin A conjugate gradient like method for p-norm minimization in functional spaces *Numerische Mathematik*, 137(4) :895-922, 2017.