Synthèse optimal de problèmes de Navigation de Zermelo dans le plan

- Bernard Bonnard (INRIA Sophia Antipolis, McTAO team, Valbonne, France)
- Olivier Cots (ENSEEIHT, IRIT, Toulouse, France)
- Joseph Gergaud (ENSEEIHT, IRIT, Toulouse, France)
- **Boris Wembe** (ENSEEIHT, IRIT, Toulouse, France)

Mots-clé : Contrôle optimal Geométrique, Problèmes de navigation de Zermelo, Lieux conjugués et de coupure, géodésiques anormales, points cusp et points de séparation non-isochrone.

Résumé : Considérant un problème de navigation de Zermelo qui, d'un point de vue contrôle optimal, se défini comme un problème de temps minimal donné par :

$$\begin{aligned}
&t_f \mapsto \min \\
&\dot{q} = F_0(q) + \sum_{i=1}^{2} u_i \, F_i(q), \quad q(t) \in M, \quad u = (u_1, u_2), \quad \|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \leq 1 \qquad (1) \\
&q(0) = q_0, \quad q(t_f) = q_f.
\end{aligned}$$

où M est une variété riemannienne de dimension 2, $F_0(q)$ un champ de vecteurs définissant le courant, qui sera *faible* si $\|F_0(q_0)\|_g < 1$ et *fort* si $\|F_0(q_0)\|_g > 1$, le cas limite étant le cas dit modéré où $\|F_0(q_0)\|_g = 1$. On s'intéresse dans ce travail à la construction d'une *synthèse optimale* du problème (1) dans un *voisinage adapté*. Cette objectif se résume dans l'étude de la régularité et la description des lignes de niveaux de la *fonction valeur* définie dans ce cas par

$$V_{q_0}(q_f) = \inf \{ t_f \mid q(0) = q_0, \; q(t_f) = q_f, \text{ où } q \text{ et le contrôle associé } u \text{ sont solutions de (1)} \} . \qquad (2)$$

La difficulté principale de ce travail réside dans l'existence de *directions anormales* dans le cas où le courant est fort. En effet celles-ci entraîneront la perte de contrôlabilité locale en q_0, la perte de régularité de la fonction valeur, la déformation des *petites boules*[1], l'apparition de nouvelles branches dans le *lieu de coupure*[2], etc.

L'analyse de ces nouveaux phénomènes en lien avec la *continuité de la fonction valeur* et la *perte d'optimalité des solutions* nous permet d'établir un résultat de caractérisation des points de coupure, extension du résultat existant en géométrie Riemannienne et Finslérienne. Grâce au résultat établit, on met en place un algorithme efficace pour le calcul du lieu de coupure dans le cas d'un courant fort, ce qui est in fine le point essentiel pour la construction de la synthèse optimale du problème.

Enfin, on présentera quelques cas d'étude analysés en détail dans [4] en lien avec le déplacement d'une particule passive au voisinage d'un vortex en hydrodynamique et un toy modèle en mécanique spatiale lié au transfert orbital avec une faible impulsion.

Références :

[1] C. Carathéodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order, Part 1, Part 2.* Holden-Day, San Francisco, California, 1965-1967; Reprint: 2nd AMS printing, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, USA (2001), 412 pages.

[2] B. Bonnard, O. Cots & B. Wembe, *A Zermelo Navigation Problem with a Vortex Singularity*, ESAIM: COCV, **27** (2021) no 10, pp: 1-37.

[3] B. Bonnard, O. Cots, J. Gergaud, B. Wembe, *Abnormal Geodesics in 2D-Zermelo Navigation Problems in the Case of Revolution and the Fan Shape of the Small Time Balls.* In revision at System Control & Letters, hal-02437507 (2021).

[4] B. Wembe, *Méthodes Géométriques et Numériques en Contrôle Optimal et Problèmes de Zermelo sur les Surfaces de Révolution - Applications*, Phd thesis, Université Toulouse Paul Sabatier, Toulouse, 2021.

[1] La boule (ouverte) en un temps t_f donné est l'ensemble des sous-niveaux $t < t_f$ de la fonction valeur.
[2] Ensemble des points où les trajectoires solutions perdent leur optimalités globale