Optimisation sur les trajectoires d'un système dynamique en temps discret

- **Assalé Adjé** (LAMPS, Université de Perpignan Via Domitia, France, assale.adje@univ-perp.fr)

Mots-clé : Systèmes dynamiques en temps discret, Ensemble d'états atteignables, Optimisation sur des suites, Fonctions de Lyapunov.

Résumé : Nous étudions ici un problème de maximisation dont l'ensemble des contraintes est l'ensemble des états atteignables d'un système dynamique en temps discret pour lequel le vecteur d'état possède d coordonnées et la condition initiale n'est pas fixée mais est supposé être dans un compact connu. L'ensemble des états atteignables est donc l'union des images successives de ce compact initial par la dynamique du système. La solution optimale du problème est donc constituée d'un vecteur du compact initial et un entier k tel que la k-ième image du vecteur initial optimal maximise la fonction objectif.

Initialement, ce problème apparaît dans la vérification formelle de programmes et de systèmes dynamiques; par exemple, pour l'analyse des pics [1] ou plus généralement pour la vérification de bornitude, d'évitement d'ensemble interdit ou de la garantie de rester dans un certain ensemble [2]. Ce problème est également étudié dans un contexte plus théorique [3] avec des restrictions sur la fonction objectif (linéaire) et sur le système dynamique (affine par morceaux).

La difficulté du problème réside, d'une part, dans l'impossibilité de représenter l'ensemble des états atteignables même dans des cas où la dynamique est affine; et d'autre part, dans sa non-convexité. Une manière d'attaquer le problème est de résoudre une suite de problèmes de maximisation où, pour chaque terme, l'ensemble des contraintes est la k-ième image du compact initial (la fonction objectif ne change pas). Le problème revient alors à déterminer un nombre minimal K de problèmes de maximisation à résoudre pour résoudre le problème d'optimisation initial. En effet, il faut assurer que, dans la suite finie de problèmes de maximisation résolus, se trouve la solution optimale.

Dans un contexte général, la recherche de la solution optimale du problème initial peut induire la résolution d'un nombre infini de problèmes de maximisation (la valeur optimale est atteinte en prenant la limite supérieure). Pour garantir l'existence de ce nombre minimal K, nous introduisons des conditions suffisantes sur le système dont le plus contraignante est l'existence d'une fonction de Lyapunov. Ainsi, nous pouvons construire une fonction qui, à chaque fonction de Lyapunov, associe un entier sur-approximant le nombre K de problèmes de maximisation à résoudre. Cette fonction est donnée de manière explicite. Pour trouver le nombre minimal K, il faut résoudre un nouveau problème de minimisation sur l'ensemble des fonctions de Lyapunov du système.

Nous présenterons un travail spécifique [4] dans le cas des systèmes dynamiques à dynamique affine et des fonctions objectif quadratiques. Dans ce cadre, nous pouvons donner un algorithme de résolution complet. Le nombre minimal K se sur-approxime grâce à des objets classiques calculable d'algèbre numérique matricielle. Enfin, nous pouvons exprimer des conditions du premier et second ordre pour la recherche de fonctions de Lyapunov candidates pour tenter de s'approcher du nombre minimal K.

Références :

[1] Balakrishnan, V. and Boyd, S. On computing the worst-case peak gain of linear systems. *Systems & Control Letters*, 19(4):265–269, 1992.

[2] Adjé, A., Garoche, P. L. and Magron, V. Property-based polynomial invariant generation using sums-of-squares optimization. In International Static Analysis Symposium (pp. 235-251), 2015.

[3] Ahmadi, A. A. and Gunluk, O. Robust-to-dynamics optimization. *arXiv preprint*, arXiv:1805.03682, 2018.

[4] Adjé, A. Quadratic Maximization of Reachable Values of Affine Systems with Diagonalizable Matrix. *Journal of Optimization Theory and Applications* 189.1: 136-163, 2021.