Des jeux à champ moyen variationnels à l'optimisation de trajectoires dans L^1

• **Filippo Santambrogio** (Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1)

Mots-clé : équilibres de Nash continus, jeux de congestion, contrôle impulsionnel, problème de Bolza, régularité

Résumé :

Je présenterai d'abord les idées générales de la théorie des jeux à champ moyen, comme elle a été introduite il y a une quinzaine d'années par J.-M. Lasry et P.-L. Lions, en me concentrant en particulier sur le cas où les agents cherchent à éviter la congestion due à une densité trop élevée, ce qui se retrouve dans plusieurs modèles de trafic routier ou piétonnier. Sous certaines hypothèses sur le structure du coût, le jeu est un jeu à potentiel, où l'équilibre peut être trouvé en minimisant une énergie globale, typiquement convexe. Notamment, lorsque le coût minimisé par chaque agent contient l'intégrale de sa vitesse au carré, on obtient un problème variationnel dans l'espace de Wasserstein W_2 qui rappelle beaucoup la formulation dynamique à la Benamou-Brenier du problème du transport optimal. Après l'introduction, j'expliquerai en particulier pourquoi il est crucial que de prêter attention à la régularité des solutions pour associer rigoureusement à chaque solution du problème variationnel un équilibre, et en quel sens.

Ensuite, motivé par la recherche d'un modèle pour le marché immobilier, je présenterai une variante - qui fait l'objet d'une étude en cours avec A. Dumas, doctorante à Lyon - dans laquelle le coût minimisé par les agents est de nature assez différente : leurs trajectoires sont contraintes d'être constantes par morceaux et le coût inclut le nombre de sauts (cela représente l'évolution des agents dans l'espace physique, et chaque saut un déménagement). Le problème variationnel correspondant fait apparaître, à la place de la distance de Wasserstein, la distance de variation totale entre les mesures ou, lorsqu'on a affaire à des mesures à densité, la distance L^1. Je reviendrai ensuite sur des questions de régularité, qui sont très pertinentes pour le modèle pour plusieurs raisons : non seulement pour l'équivalence entre optimiseurs et équilibres, mais aussi pour prouver que, malgré le comportement discontinu des trajectoires des agents, la densité des agents évolue de manière lisse, conformément à l'expérience.

Références :

[1] J.-M. Lasry, P.-L. Lions, Mean field games, *Jpn. J. Math.*, 2 (2007), no. 1, 229–260.

[2] J-D. Benamou, G. Carlier, F. Santambrogio, Variational Mean Field Games. *Chapitre de l'ouvrage Active Particles, Volume 1*, 2017.

[3] F. Santambrogio, Lecture notes on Variational Mean Field Games, Chapter 2 in *Mean Field Games,* P. Cardaliaguet and A. Porretta (eds.), C.I.M.E. Foundation Subseries, Lecture Notes in Mathematics, 2281, 2021.

[4] A. Dumas, F. Santambrogio, travail en préparation