Régularité en optimisation de forme sous contrainte de convexité

R. Prunier, J. Lamboley
IMJ-PRG Sorbonne Université, IMJ-PRG Sorbonne Université

Email : raphael.prunier@imj-prg.fr

Mots Clés : Calcul des variations, optimisation de forme, problème isopérimétrique, convexité.

Biographie – Après une Licence et un Master de préparation à l'agrégation de mathématiques à Sorbonne Université, j'ai suivi un Master 2 de mathématiques de la modélisation au sein de la même université. J'ai entamé en octobre 2020 une thèse à l'IMJ-PRG sous la direction de Jimmy Lamboley, co-dirigée par Dorin Bucur, intitulée "Régularité et stabilité en optimisation de forme sous contrainte géométrique". Elle est financée par l'école doctorale de Paris-Centre (ED 386).

Resumé : Cet exposé présente les résultats obtenus avec J. Lamboley dans [4]. Ils s'inscrivent dans le domaine de l'optimisation de forme, dont l'objet d'étude est le problème de minimisation

$$\inf\{J(\Omega),\ \Omega \in \mathcal{F}_{\mathrm{ad}}\}, \tag{1}$$

où l'ensemble des formes admissibles $\mathcal{F}_{\mathrm{ad}}$ est une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ et $J : \mathcal{F}_{\mathrm{ad}} \to \mathbb{R}$. Les questions naturellement associées à ce type de problème sont d'abord celles du calcul de variations et de l'optimisation : en premier lieu, existe-t-il une forme optimale pour le problème (1) ? Une deuxième question, qui est celle qui nous occupe dans cet exposé, concerne la régularité des formes optimales : une solution Ω^* de (1) est-elle régulière ? Dans le meilleur des cas il s'agit de montrer que le bord de Ω^* peut être localement paramétré par une fonction d'une certaine régularité (par exemple de régularité hölderienne $C^{k,\alpha}$).

Nous nous intéressons plus particulièrement à des problèmes soumis à une contrainte de convexité, c'est-à-dire pour lesquels $\mathcal{F}_{\mathrm{ad}} \subset \mathcal{K}^d$, où $\mathcal{K}^d$ désigne l'ensemble des ouverts convexes non vides de $\mathbb{R}^d$. Dans ce contexte, une solution Ω^* de (1) est *a priori* au moins lipschitzienne, puisque Ω^* s'écrit localement comme le graphe d'une fonction convexe. Malgré cette régularité initiale, la rigidité de la contrainte de convexité rend l'écriture d'une condition d'optimalité et son exploitation délicates ([3]). La difficulté pour monter en régularité réside alors dans la construction de perturbations admissibles de Ω^* - de formes Ω convexes "proches" de Ω^* en un certain sens - qui soient appropriées. Une technique souvent efficace consiste à "couper" Ω^* ([1], [2]), c'est-à-dire à tester l'optimalité de Ω^* contre le compétiteur $\Omega^* \cap H^+$ où H^+ est un demi-espace bien choisi.

Nous étudions dans [4] le problème

$$\inf\{P(\Omega) + R(\Omega),\ \Omega \in \mathcal{K}^d\} \tag{2}$$

où P désigne le périmètre et R est une fonctionnelle générale satisfaisant certaines hypothèses. R est à penser comme un "reste", en le sens où l'on s'attend à ce qu'elle ne perturbe pas l'effet régularisant du périmètre souvent observé en optimisation de forme (voir par exemple [5]). Un tel problème est dit de type isopérimétrique, en référence au problème isopérimétrique usuel

$$\inf\{P(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^d \text{ mesurable},\ |\Omega| = 1\}$$

dont l'unique solution est la boule de volume 1 (on a noté $|\cdot|$ la fonctionnelle volume). Le premier résultat obtenu est le suivant.

Théorème 1 *Soit $d \geq 2$. Supposons que R soit lipschitzienne pour le volume, i.e.*

$$\exists C > 0, \forall (\Omega, \Omega' \in \mathcal{K}^d),\ |R(\Omega) - R(\Omega')| \leq C|\Omega \Delta \Omega'|, \tag{3}$$

Alors toute solution de (2) *est $C^{1,1}$.*

Une des ambitions de ce résultat est de donner une condition assez générale sur R pour obtenir la régularité d'un problème isopérimétrique en toute dimension (la régularité ayant été souvent obtenue en dimension 2 : [2], [3]). Sa preuve repose sur une méthode qui a été développée dans [1] pour démontrer un résultat de régularité en calcul des variations : si ω est un ouvert convexe borné de $\mathbb{R}^{d-1}$, une solution u^* de

$$\inf \left\{ \int_\omega |\nabla u|^2 + 2fu,\ u : \omega \to \mathbb{R} \text{ convexe},\ u \in H^1(\omega) \right\},\ \text{où } f \in L^\infty(\omega) \text{ avec } \int_\omega f = 0$$

est $C^{1,1}_{\text{loc}}(\omega)$. La stratégie de [1] repose sur une méthode de coupure. Dans notre problème (2), $P(\Omega)$ joue le rôle de $\int_\omega |\nabla u|^2$ et $R(\Omega)$ celui de $\int_\omega 2fu$. Cette idée est fondée sur la formule

$$\mathcal{H}^{d-1}(G_u) = \int_\omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2},\ \text{où } G_u := \{(x, u(x)), x \in \omega\}$$

avec $\sqrt{1 + |\nabla u|^2}$ (localement) fortement convexe en ∇u, où on a noté $\mathcal{H}^{d-1}$ la mesure de Hausdorff $(d-1)$-dimensionnelle. Deux difficultés se présentent pour passer de [1] au Théorème 1 :

- "Remplacer" $\int_\omega |\nabla u|^2$ par $\int_\omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$, où $u : \omega \to \mathbb{R}$ paramètre $\partial\Omega$ près de $x \in \partial\Omega$.
- Comprendre pourquoi $P(\Omega)$ se comporte comme $\int_\omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$. Ce deuxième point est plus délicat et demande de gérer en particulier le fait que $G_u \subsetneq \Omega$.

Nous déduisons du Théorème 1 des exemples et applications variés, selon la fonctionnelle R. Nous nous concentrons plus particulièrement sur des termes d'énergie issus de la théorie des EDP : les valeurs propres respectives λ_k et μ_k du problème des laplaciens Dirichlet et Neumann. Une partie importante du travail consiste à montrer que ces deux types de fonctionnelles vérifient (3). Nous obtenons également un résultat analogue au Théorème 1 avec l'ajout d'une contrainte de volume (pour éviter l'aplatissement des suites minimisantes) et d'une contrainte de boîte extérieure (pour éviter la perte de masse à l'infini des suites minimisantes), sans lesquelles l'existence n'est pas assurée en général. L'un des principaux énoncés est le suivant.

Théorème 2 *Soient $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne, $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et $0 < v_0 < |D|$. Toute solution du problème*

$$\inf \left\{ P(\Omega) + F(\lambda_1(\Omega), ..., \lambda_n(\Omega), \mu_1(\Omega), ..., \mu_n(\Omega)),\ \Omega \in \mathcal{K}^d,\ |\Omega| = v_0,\ \Omega \subset D \right\}$$

est $C^{1,1}$.

Références

[1] L. A. Caffarelli, G. Carlier, and P.L. Lions. $\mathcal{C}^{1,\alpha}$-regularity for variational problems with a convexity constraint and related issues. *En préparation.*

[2] M. Goldman, M. Novaga, and B. Ruffini. On minimizers of an isoperimetric problem with long-range interactions under a convexity constraint. *Analysis & PDE*, 11(5):1113–1142, 2018.

[3] J. Lamboley, A. Novruzi, and M. Pierre. Regularity and singularities of optimal convex shapes in the plane. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 205(1):311–343, 2012.

[4] J. Lamboley and R. Prunier. Regularity in calculus of variations and shape optimization under convexity constraint. *En préparation.*

[5] F. Maggi. *Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems.* Cambridge University Press, 2012.