Schéma de type Godunov qui capture tous les états stationnaires pour le modèle de Saint-Venant.

Meissa M'BAYE

Université de Nantes, France,
Université Cheikh Anta Diop de Dakar, Sénégal

Supervisé par: **Christophe BERTHON**,
LMJL, Université de Nantes.

Co-Supervisé par : **Minh Hoang LE**,
Laboratoire d'hydraulique Saint-Venant (LHSV), France.

Co-Supervisé par : **Diaraf SECK**,
NLAGA, Université Cheikh Anta Diop de Dakar.

Huitième école **EGRIN**

Mardi 25 Mai 2021

Sommaire

Sommaire

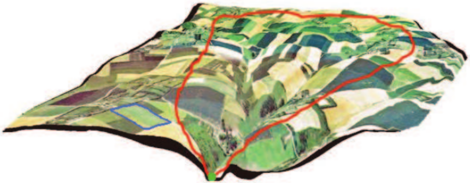


FIGURE – Bassin versant de Bourville

(a)

(b)

FIGURE – Exemples de Rupture de barrage (2a) et de tsunami (2b)

Sommaire

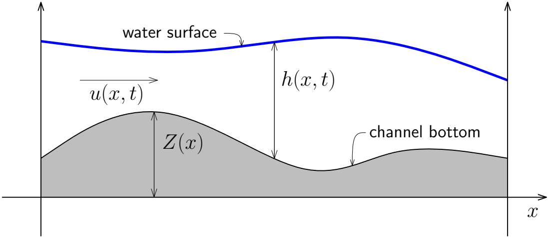


FIGURE – Schématisation des variables du système de Saint-Venant

Le système est défini par :

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(hu) &= P - I, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) &= gh(S_0 - S_f), \text{ où } S_0 = -\partial_x z \end{aligned}$$

Saint-Venant avec terme source

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \partial_t hu + \partial_x \left(hu^2 + g\dfrac{h^2}{2} \right) = -gh\partial_x z, \end{cases} \tag{1}$$

États stationnaires

On est en état stationnaire si on a :

$$\partial_t h = \partial_t q = 0.$$

Les solutions stationnaires sont définies par :

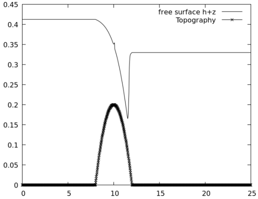
$$\begin{cases} \partial_x (hu) = 0, \\ \partial_x \left(hu^2 + g\dfrac{h^2}{2} \right) = -gh\partial_x z. \end{cases} \tag{2}$$

Les solutions stationnaires sont caractérisées par les deux relations suivantes :

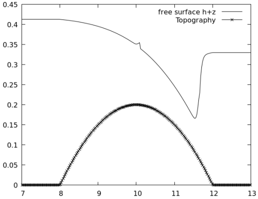
$$hu = Q, \text{ et } \mathcal{B}(w, z) = B,$$

où $\mathcal{B}(w, z) = \frac{u^2}{2} + g(h + z)$.

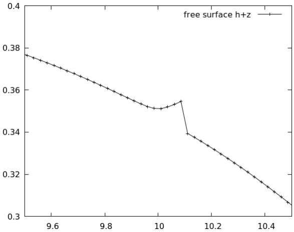
Exemple d'écoulement transcritique avec choc



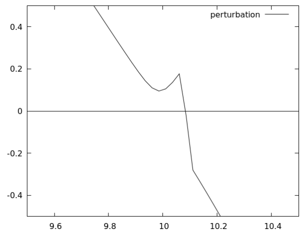
(a)



(b)



(c)



(d)

Sommaire

Schéma de type Godunov pour le modèle de Saint-Venant avec terme source

Au temps t^n, nous supposons connue une approximation constante par morceaux de la solution de (1) comme suit :

$$w_\Delta^n(x, t^n) = w_i^n \qquad \text{if } x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}).$$

Mise à jour

$$w_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} w_\Delta^n(x, t^n + \Delta t)\, dx, \tag{3}$$

Solveur de Riemann à chaque interface

$$w_\Delta^n(x, t^n + t) = \widetilde{w}_{\mathcal{R}}\left(\frac{x - x_{i+1/2}}{t}; w_i^n, w_{i+1}^n, z_i, z_{i+1}\right)$$

si $(x, t) \in (x_i, x_{i+1}) \times (0, \Delta t)$.

Schéma de type Godunov pour le modèle de Saint-Venant avec terme source

$\widetilde{w}_{\mathcal{R}}\left(\frac{x}{t}; w_L, w_R, z_L, z_R\right)$ désigne une approximation appropriée de la solution de Riemann de (1) associée aux données initiale

$$(w, z)(x, t = 0) = \begin{cases} (w_L, z_L) & \text{if } x < 0, \\ (w_R, z_R) & \text{if } x > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Condition de Consistance intégrale

Le solveur de Riemann approché doit satisfaire la condition de consistance intégrale suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \widetilde{w}_{\mathcal{R}}\left(\frac{x}{t}; w_L, w_R, z_L, z_R\right) dx = \\ &\qquad \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} w_{\mathcal{R}}\left(\frac{x}{t}; w_L, w_R, z_L, z_R\right) dx, \end{aligned} \tag{5}$$

Schéma de type Godunov pour le modèle de Saint-Venant avec terme source

L'intégration de (1) sur le domaine $(-\Delta x/2, \Delta x/2) \times (0, \Delta t)$, donne

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} w_{\mathcal{R}}(\frac{x}{t}; w_L, w_R, z_L, z_R)\, dx = \frac{1}{2}(w_L + w_R) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f(w_R) - f(w_L)) \\ - \frac{g}{\Delta x}\int_0^{\Delta t}\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \widetilde{(h\partial z)}_{\mathcal{R}}(\frac{x}{\Delta t}, w_L, w_R, z_L, z_R)\, dx. \tag{6}$$

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \widetilde{w}_{\mathcal{R}}(\frac{x}{t}; w_L, w_R, z_L, z_R)\, dx = \\ \frac{1}{2}(w_L + w_R) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f(w_R) - f(w_L)) + \Delta t \bar{S}_{LR}, \tag{7}$$

où $\bar{S}_{LR} = \bar{S}_{LR}(w_L, w_R, z_L, z_R)$ doit être définie selon une discrétisation consistant de $(0, -gh\partial_x z)^T$.

Schéma de type Godunov pour le modèle de Saint-Venant avec terme source

$$\begin{aligned} w_i^{n+1} &= w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_\Delta(w_i^n, w_{i+1}^n, z_i, z_{i+1}) - f_\Delta(w_{i-1}^n, w_i^n, z_{i-1}, z_i)\right) \\ &+ \frac{\Delta t}{2}\left(\bar{S}_{i+1/2} + \bar{S}_{i-1/2}\right), \end{aligned} \tag{8}$$

$$f_\Delta(w_R, w_L, z_L, z_R) = \frac{1}{2}(f(w_R) + f(w_L)) - \frac{\Delta x}{4\Delta t}(w_R - w_L) + \frac{\Delta x}{2\Delta t}\left(I_{LR}^+ - I_{LR}^-\right.$$

$$\bar{S}_{i+1/2} := \bar{S}_{LR}(w_i^n, w_{i+1}^n, z_i, z_{i+1}),$$

$$I_{LR}^+ = \frac{1}{\Delta x}\int_0^{\Delta x/2} \widetilde{w}_{\mathcal{R}}\left(\frac{x}{\Delta t}; w_L, w_R, z_L, z_R\right) dx,$$

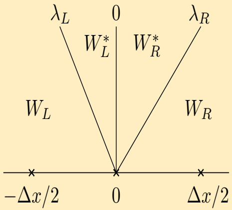
$$I_{LR}^- = \frac{1}{\Delta x}\int_{-\Delta x/2}^{0} \widetilde{w}_{\mathcal{R}}\left(\frac{x}{\Delta t}; w_L, w_R, z_L, z_R\right) dx.$$

Sommaire

Définition

$$\widetilde{w}_{\mathcal{R}}(x/t; w_L, w_R) = \begin{cases} w_L & \text{if } \frac{x}{t} < \lambda_L, \\ w_L^* & \text{if } \lambda_L < \frac{x}{t} < 0, \\ w_R^* & \text{if } 0 < \frac{x}{t} < \lambda_R, \\ w_R & \text{if } \frac{x}{t} > \lambda_R, \end{cases} \tag{9}$$

Exemple



$$\lambda_L \leq \min(-|u_L| - \sqrt{gh_L}, -|u_R| - \sqrt{gh_R}),$$
$$\lambda_R \geq \max(|u_L| + \sqrt{gh_L}, |u_R| + \sqrt{gh_R}),$$

$$\lambda_L(h_L^* - h_L) + \lambda_R(h_R - h_R^*) = q_R - q_L, \tag{10}$$
$$\lambda_L(q_L^* - q_L) + \lambda_R(q_R - q_R^*) = \left(h_R u_R^2 + \frac{1}{2} g h_R^2\right) - \left(h_L u_L^2 + \frac{1}{2} g h_L^2\right) + \Delta x \bar{S}_{LR}^q. \tag{11}$$

$$
\begin{aligned}
h^{HLL} &= \frac{\lambda_R h_R - \lambda_L h_L}{\lambda_R - \lambda_L} - \frac{q_R - q_L}{\lambda_R - \lambda_L}, && (12)\\
q^{HLL} &= \frac{\lambda_R q_R - \lambda_L q_L}{\lambda_R - \lambda_L} \\
&\quad - \frac{1}{\lambda_R - \lambda_L}\left(\left(h_R u_R^2 + \frac{1}{2} g h_R^2\right) - \left(h_L u_L^2 + \frac{1}{2} g h_L^2\right)\right). && (13)
\end{aligned}
$$

Condition de consistance intégrale (bis)

$$
\begin{aligned}
\lambda_R h_R^* - \lambda_L h_L^* &= (\lambda_R - \lambda_L) h^{HLL}, && (14)\\
\lambda_R q_R^* - \lambda_L q_L^* &= (\lambda_R - \lambda_L) q^{HLL} + \Delta x \bar{S}_{LR}^q. && (15)
\end{aligned}
$$

Solution localement stationnaire

Une solution localement stationnaire est définie comme suit :

$$
h_L u_L = h_R u_R, \qquad \textit{and} \qquad \mathcal{B}(w_L, z_L) = \mathcal{B}(w_R, z_R), \tag{16}
$$

Solveur de Riemann approché

Concernant le débit intermédiaire on adopte les égalités suivantes

$$q_L^* = q_R^* = q^*. \tag{17}$$

Débit intermédiaire

$$q^* = q^{HLL} + \frac{\Delta x \bar{S}_{LR}^q}{(\lambda_R - \lambda_L)}. \tag{18}$$

Linéarisation de $\mathcal{B}(w_L^*, z_L) = \mathcal{B}(w_R^*, z_R)$

$$h_R^* - h_L^* = \frac{\Delta x \bar{S}_{LR}^q}{\alpha_{LR}}, \tag{19}$$

où

$$\alpha_{LR} = g\bar{h} - \frac{\overline{q^2}}{h_L h_R}, \tag{20}$$

Solveur de Riemann approché

Nous suggérons l'amélioration suivante :

$$h_R^* - h_L^* = \frac{\alpha_{LR} \Delta x \bar{S}_{LR}^q}{\alpha_{LR}^2 + \varepsilon_{LR} \Delta x^k}. \tag{21}$$

où $0 < k < \frac{3}{2}$ est un paramètre à fixer et

$$\varepsilon_{LR} = \sqrt{|\mathcal{B}(w_R, z_R) - \mathcal{B}(w_L, z_L)| + |q_R - q_L|}. \tag{22}$$

La solution est directement donnée par

$$h_L^* = h^{HLL} + \frac{\lambda_R \Delta x \bar{S}_{LR}^q \alpha_{LR}}{(\lambda_R - \lambda_L)(\alpha_{LR}^2 + \varepsilon_{LR} \Delta x^k)}, \tag{23}$$

$$h_R^* = h^{HLL} + \frac{\lambda_L \Delta x \bar{S}_{LR}^q \alpha_{LR}}{(\lambda_R - \lambda_L)(\alpha_{LR}^2 + \varepsilon_{LR} \Delta x^k)}. \tag{24}$$

Sommaire

$\bar{S}_{LR}$ doit être fixée de telle sorte que $\widetilde{w}_{\mathcal{R}}(x/\Delta t; w_L, w_R, z_L, z_R)$ reste stationnaire ; à savoir

$$\widetilde{w}_{\mathcal{R}}(x/\Delta t, w_L, w_R, z_L, z_R) = \begin{cases} w_L & \text{if} \quad x < 0, \\ w_R & \text{if} \quad x > 0. \end{cases} \tag{25}$$

tel que (w_L, w_R, z_L, z_R) vérifie (16).

La condition de consistance intégrale, pour une solution stationnaire sous la forme (25), se réécrit comme suit :

$$\Delta x \bar{S}_{LR} = f(w_R) - f(w_L).$$

Avec $\bar{S}_{LR} = (\bar{S}^h_{LR}, \bar{S}^q_{LR})^T$, on obtient

$$\Delta x \bar{S}^h_{LR} = 0,$$

$$\Delta x \bar{S}^q_{LR} = (h_R u_R^2 + g\frac{h_R^2}{2}) - (h_L u_L^2 + g\frac{h_L^2}{2}). \tag{26}$$

Discrétisation du terme source

Lemme.1

Soit $\bar{F}_r^2 = \frac{\overline{q^2}\,\bar{h}}{g h_L^2 h_R^2}$, où $\bar{h} = \frac{1}{2}(h_L + h_R)$ et $\overline{q^2} = h_L h_R |u_L u_R|$, l'approximation du nombre de Froude. La discrétisation du terme source $\Delta x \bar{S}_{LR}^q$ se réécrit comme suit :

$$\Delta x \bar{S}_{LR}^q = -g\bar{h}(z_R - z_L) + \frac{\overline{q^2}}{4h_L^2 h_R^2} \times \frac{(h_R - h_L)(z_R - z_L)^2}{(1 - \bar{F}_r^2)^2 + \varepsilon_{LR}\Delta x^k}. \quad (27)$$

Lemme.2

Considérons (w_L, w_R, z_R, z_L) localement stationnaire de telle sorte que $\bar{S}_{LR}^q$ est donné par (27). Alors on a

$$\lim_{\bar{F}_r \to 1} \bar{S}_{LR}^q = \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

Sommaire

Principales propriétés du schéma

Théorème

Supposons la restriction de type CFL suivante :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} \left(|\lambda^L_{i+1/2}|, |\lambda^R_{i+1/2}| \right) \leq \frac{1}{2}. \tag{28}$$

Le schéma (8) est consistant avec (1). Soit w_i^n appartenant à Ω pour tout $i \in \mathbb{Z}$. L'état suivant w_i^{n+1} donné par le schéma (8), satisfait les propriétés suivantes :

1. Préservation de la positivité : $h_i^{n+1} > 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$,
2. Préservation de tous les états d'équilibres : $w_i^{n+1} = w_i^n$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ tant que $(w_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$ vérifie

$$q_i^n = Q \qquad \text{et} \qquad \frac{(q_i^n)^2}{2(h_i^n)^2} + g(h_i^n + z_i) = B \qquad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}, \tag{29}$$

   pour les constantes Q et B données.

3. Une inégalité d'entropie incomplète sous la forme :

$$\frac{\eta_i^{n+1} - \eta_i^n}{\Delta t} + \frac{G_{i+1/2} - G_{i-1/2}}{\Delta x} \leq -\bar{S}_i^\eta + \mathcal{O}(\Delta x), \tag{30}$$

Principales propriétés du schéma

Cette inégalité d'entropie est satisfaite tant que

$$h^{HLL}_{i+1/2} + \frac{\lambda^L_{i+1/2}\Delta x \bar{S}^q_{i+1/2}\alpha_{i+1/2}}{\alpha^2_{i+1/2} + \varepsilon_{i+1/2}\Delta x^k} > 0 \text{ et } h^{HLL}_{i+1/2} + \frac{\lambda^R_{i+1/2}\Delta x \bar{S}^q_{i+1/2}\alpha_{i+1/2}}{\alpha^2_{i+1/2} + \varepsilon_{i+1/2}\Delta x^k} > 0, \quad (31)$$

$$G_{i+1/2} = \frac{1}{2}(G(w^n_{i+1}) + G(w^n_i)) + \frac{\Delta x}{4\Delta t}(\eta(w^n_{i+1}) - \eta(w^n_i)) + \frac{\Delta x}{2\Delta t}(I^{\eta^+}_{i+1/2} - I^{\eta^-}_{i-1/2}), \quad (32)$$

avec

$$I^{\eta^+}_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta x}\int_0^{\Delta x/2} \eta(\widetilde{w}_{\mathcal{R}}(\frac{x}{\Delta t}; w^n_i, w^n_{i+1}, z_i, z_{i+1}))\, dx, \quad (33)$$

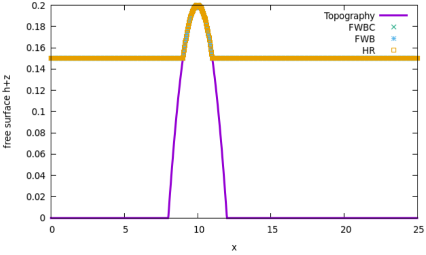
$$I^{\eta^-}_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta x}\int_{-\Delta x/2}^{0} \eta(\widetilde{w}_{\mathcal{R}}(\frac{x}{\Delta t}; w^n_i, w^n_{i+1}, z_i, z_{i+1}))\, dx, \quad (34)$$

et

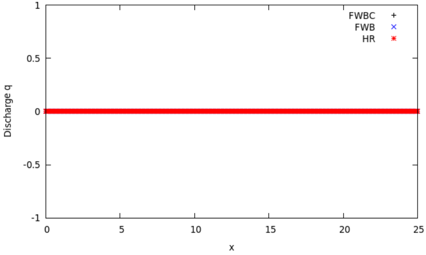
$$\bar{S}^\eta_i = \frac{1}{2}\left(\frac{h^n_{i-1} + h^n_i}{2}\frac{q^{HLL}_{i-1/2}}{h^{HLL}_{i-1/2}}(\frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta x}) + \frac{h^n_i + h^n_{i+1}}{2}\frac{q^{HLL}_{i+1/2}}{h^{HLL}_{i+1/2}}(\frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta x})\right). \quad (35)$$

Sommaire

Lac au repos avec un fond émergé



(e)



(f)

FIGURE – Surface libre (4e) et débit (4f) pour la simulation d'un lac repos avec un fond émergé.

Lac au repos avec un fond émergé

	$h+z$		
	L^1_{error}	L^2_{error}	L^∞_{error}
HR scheme	2.78e-19	2.78e-18	2.78e-17
FWB scheme	3.11e-17	5.01e-17	8.33e-17
FWBC scheme	2.11e-19	2.81e-18	3.33e-18

TABLE – Erreur de l'approximation du surface libre pour un lac au repos avec un fond émergé.

	q		
	L^1_{error}	L^2_{error}	L^∞_{error}
HR scheme	2.60e-17	2.89e-17	4.58e-17
FWB scheme	2.72e-17	3.69e-17	1.02e-16
FWBC scheme	2.75e-19	3.01e-18	3.82e-18

TABLE – Erreur l'approximation du débit pour un lac au repos avec un fond émergé.

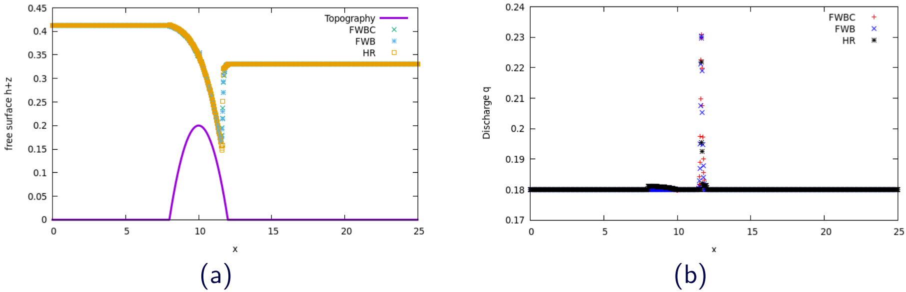


FIGURE – Surface libre (5a) et débit (5b) pour la simulation d'un écoulement transcritique avec choc.

Écoulement transcritique avec choc

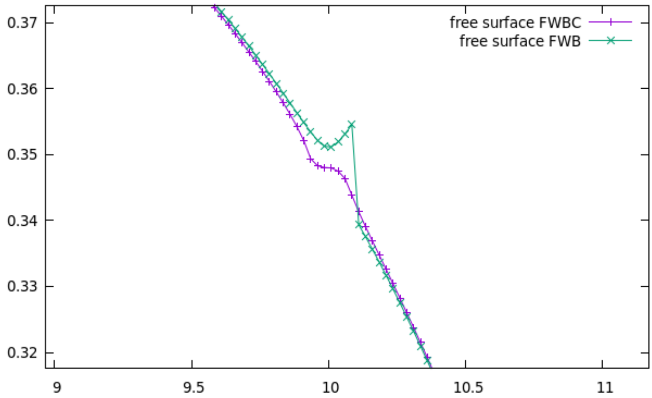
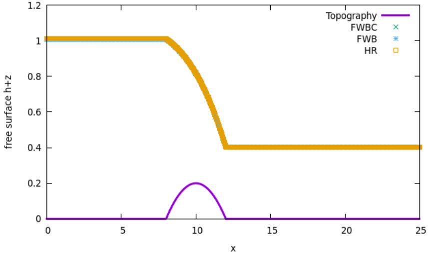
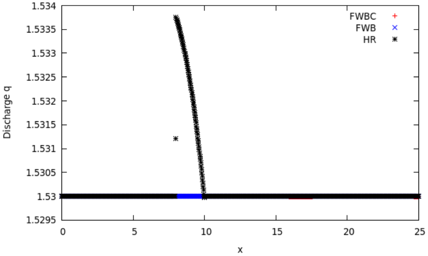


FIGURE – Zoom de la perturbation parasite de la hauteur d'eau produite par la quantité mal posée $\mathcal{P} = g\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2} - \frac{(q_i^n)^2 + (q_{i+1}^n)^2}{2h_i^n h_{i+1}^n}$ par rapport à la correction apportée.

Écoulement transcrtique sans choc



(a)



(b)

FIGURE – Surface libre (7a) et débit (7b) pour la simulation d'un écoulement transcrtique sans choc.

Écoulement transcrtique sans choc

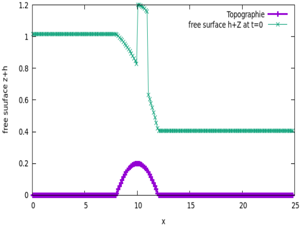
	$h+z$		
	L^1_{error}	L^2_{error}	L^∞_{error}
HR-scheme	4.79e-02	6.07e-02	8.12e-02
FWB-scheme	1.67e-14	2.13e-14	4.26e-14
FWBC-scheme	1.27e-14	1.67e-14	3.14e-14

TABLE – Erreur de l'approximation du surface libre pour l'écoulement transcritique sans choc.

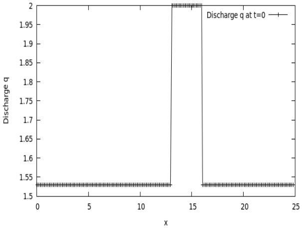
	q		
	L^1_{error}	L^2_{error}	L^∞_{error}
HR-scheme	8.28e-04	3.30e-03	1.82e-02
FWB-scheme	1.47e-14	1.58e-14	2.04e-14
FWBC-scheme	1.27e-14	1.48e-14	1.98e-14

TABLE – Erreur de l'approximation du débit pour l'écoulement transcritique sans choc.

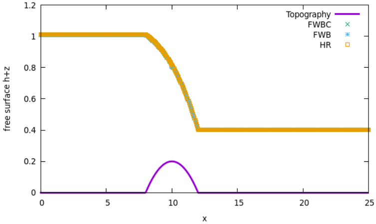
Perturbation d'un écoulement transcritique sans choc



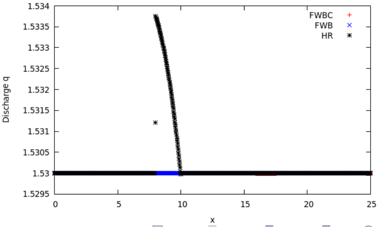
(a)



(b)



(c)



(d)

Perturbation d'un écoulement transcritique sans choc

	$h+z$		
	L^1_{error}	L^2_{error}	L^∞_{error}
HR-scheme	4.89e-02	6.17e-02	8.22e-02
FWB-scheme	2.79e-14	2.85e-14	4.20e-14
FWBC-scheme	2.77e-14	2.87e-14	4.14e-14

TABLE – Erreurs du surface libres pour l'écoulement transcritique perturbé sans choc.

	q		
	L^1_{error}	L^2_{error}	L^∞_{error}
HR-scheme	8.38e-04	3.43e-03	1.98e-02
FWB-scheme	1.62e-14	1.85e-14	2.18e-14
FWBC-scheme	1.58e-14	1.75e-14	2.08e-14

TABLE – Erreurs du débit pour l'écoulement transcritique perturbé sans choc.

Merci de votre attention !

Bargny, Sénégal.