

# Suspensions de sphères rigides: congestion et migration.

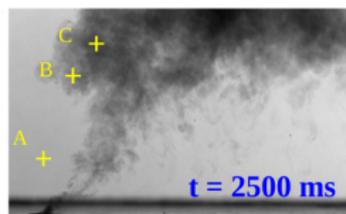
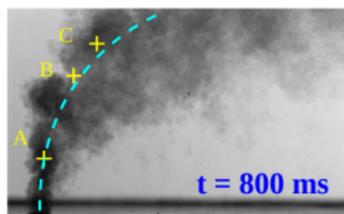
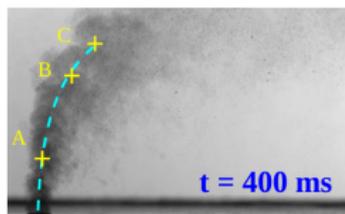
Olivier Ozenda <sup>1</sup>, Pierre Saramito <sup>2</sup>, Guillaume Chambon <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univ. Grenoble Alpes, INRAE, U.R. ETNA, Grenoble

<sup>2</sup> CNRS et Lab. J. Kuntzmann, Grenoble

# Migration : entre régimes hydrodynamique et granulaire

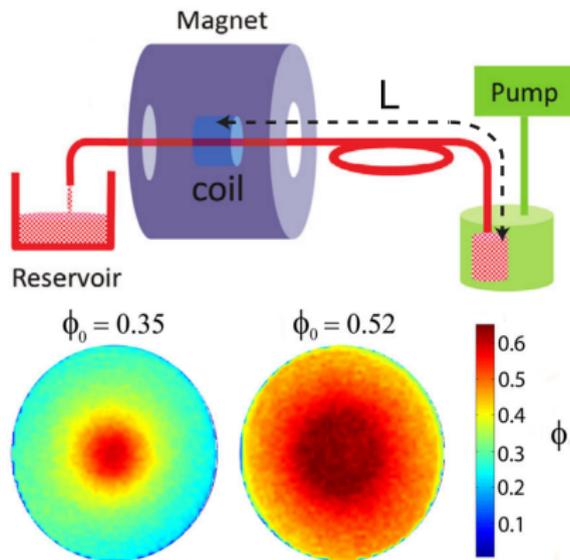
- Suspensions non colloïdales : interaction hydrodynamiques et interactions de contact.
- Nombreux exemples mélangeant des zones semi-diluées (fluide complexe) et très concentrées (solide déformable).
- Caractériser mathématiquement et prédire numériquement les contours de ces zones.



Octau *et al*, 2020

# Comparaisons : Poiseuille axisymétrique

- Problème stationnaire, uniforme selon la coordonnée axiale.
- Conditions de Dirichlet en vitesse pour les deux phases.
- Chaque zone, cisailée ou congestionnée d'aire non nulle.



Oh *et al*, 2015

- ① Introduction
- ② **Modèle diphasique congestionné**
- ③ Méthode numérique et convergence
- ④ Etude qualitative et comparaison
- ⑤ Conclusion

# Grandeurs physiques mises en jeu

## ① Inconnues du problème :

- Vitesse du mélange :  $\mathbf{u}$ , vitesse relative granulaire :  $\mathbf{w}$
- Pression du mélange :  $p_b$ , pression de contact :  $p_c$
- fraction volumique :  $\phi$

## ② Grandeurs modélisées :

- Tenseur de contrainte particulaire :  $\tau_p$
- Trainée de la phase granulaire :  $\mathbf{f}_d$

## Originalités :

- Système bi-fluide + interactions hydro. dominantes.
- $p_c \rightarrow$  condition de non pénétration au niveau continu.

**(P<sub>1</sub>)** Trouver  $\mathbf{u}$ ,  $p_b$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\phi$  et  $p_c$  tels que :

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$$

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) - \operatorname{div}(2\eta_0 D(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\tau}_p - p_b \mathbf{I}) = \mathbf{f}$$

$$\partial_t \phi + \operatorname{div}((\mathbf{u} + \mathbf{w})\phi) = 0$$

$$\begin{aligned} \rho\phi(\partial_t(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + ((\mathbf{u} + \mathbf{w}) \cdot \nabla)(\mathbf{u} + \mathbf{w})) \\ - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_p - p_c \mathbf{I}) + \mathbf{f}_d + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_r) = 0 \end{aligned}$$

$$0 \leq (\phi_m - \phi) \perp p_c \geq 0$$

+ C.B. + C.I. + équations constitutives pour  $\boldsymbol{\tau}_p$ ,  $\mathbf{f}_d$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_r$

$$0 \leq (\phi_m - \phi) \perp p_c \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \phi_m - \phi \geq 0 \\ p_c \geq 0 \\ (\phi_m - \phi)p_c = 0 \end{cases}$$

- Equations constitutives Miller, Morris, 2006 :

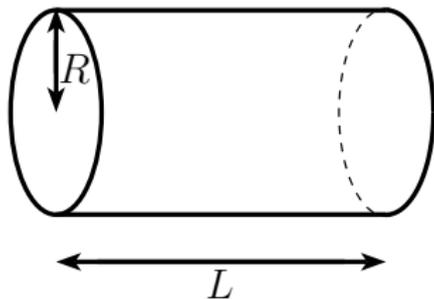
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_p &= 2\eta_s(\phi)D(\mathbf{u}) - \eta_n(\phi)|2D(\mathbf{u})|\mathbf{Q} \\ \mathbf{f}_d &= -\frac{s(\phi)\mathbf{w}}{r_p^2}\end{aligned}$$

- Fermeture parabolique :

$$\boldsymbol{\sigma}_r = 2s(\phi)D(\mathbf{w})$$

- Remarque :  $D(\mathbf{u}) = D(\mathbf{w}) = 0$  pour  $\phi = \phi_m$  : zone congestionnée non déformable.

# Écoulement de Poiseuille cylindrique



$$R \ll L$$

rayon particule :  $r_p \ll R$

$$\boldsymbol{\tau}_p = \begin{pmatrix} \eta_n(\phi) |\partial_r u_z| Q_{rr} & 0 & \eta_s(\phi) \partial_r u_z \\ 0 & \eta_n(\phi) |\partial_r u_z| Q_{\theta\theta} & 0 \\ \eta_s(\phi) \partial_r u_z & 0 & \eta_n(\phi) |\partial_r u_z| Q_{zz} \end{pmatrix}$$

$$p_b = p_z(z, t) \quad p_c = p_{c,r}(r, t) + p_{c,z}(z, t) \quad \phi = \phi(r, t)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_z(r, t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_r(r, t) \\ 0 \\ w_z(r, t) \end{pmatrix}$$

**(P<sub>2</sub>)** Trouver  $u_z, w_z, p_z, p_{c,z}, w_r, \phi, p_{c,r}$  tels que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \partial_t u_z &= \frac{\partial_r}{r} (r(\eta_0 + \eta_s(\phi)) \partial_r u_z) - \partial_z p_z \\ \phi \operatorname{Re} \partial_t (u_z + w_z) &= \frac{\partial_r}{r} (r \eta_s(\phi) \partial_r u_z) \\ &\quad - \frac{s(\phi)}{\varepsilon^2} w_z + \left( \frac{\partial_r}{r} (r s(\phi) \partial_r w_z) \right) - \partial_z p_{c,z} \\ \int_0^1 u_z(t, r) r dr &= \frac{1}{4} \\ \int_0^1 (u_z(t, r) + w_z(t, r)) \phi(t, r) r dr &= \frac{\phi_0}{4} \end{aligned}$$

$$\phi Re \partial_t w_r = \frac{\partial_r}{r} (r \eta_n(\phi) Q_{rr} |\partial_r u_z|) - \frac{\eta_n(\phi) Q_{\theta\theta} |\partial_r u_z|}{r} - \frac{s(\phi)}{\varepsilon^2} w_r + \left( \frac{\partial_r}{r} (rs(\phi) 2 \partial_r w_r) \right) - \partial_r p_{c,r}$$

$$\partial_t \phi = -\frac{\partial_r}{r} (r w_r \phi)$$

$$0 \leq (\phi_m - \phi) \perp p_{c,r} \geq 0$$

+ conditions de Dirichlet pour  $u_z$ ,  $w_z$ ,  $w_r$  + C.I.

Avec  $\varepsilon = \frac{r_p}{R}$  et  $Re = \frac{2\rho q}{\pi R \eta_0}$ .

# Différences avec le dispositif expérimental

- Problème en temps dans un tuyau infini  
→ transitoires non comparables.
- Phase granulaire non compressible lorsque  $\partial_z u_z = 0$   
→  $\phi_m < \phi < \phi_{rcp}$  non admissible.

- ① Introduction
- ② Modèle diphasique congestionné
- ③ **Méthode numérique et convergence**
- ④ Etude qualitative et comparaison
- ⑤ Conclusion

- ① A chaque pas de temps, deux boucles imbriquées, point fixe appelant une méthode de descente (Uzawa).
- ② Point fixe :
  - $u_z$  et  $w_z$  : solutions de systèmes linéaires.
  - $w_r$  et  $p_{c,r}$  problème non linéaire (obstacle)
  - $\phi$  : résolution explicite
- ③ Uzawa : résolution du problème de l'obstacle  $\rightarrow w_r$  et  $p_{c,r}$

# Point fixe : problème linéaire pour $u_z$

Trouver  $u_z^{(n,k)} : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\lambda_z^{(n,k)} \in \mathbb{R}$  tels que

$$\frac{Re}{\Delta t} \left( u_z^{(n,k)} - u_z^{(n-1)} \right) - \frac{\partial_r}{r} \left( r \eta_0 + \eta_s \left( \phi^{(n,k-1)} \right) \partial_r u_z^{(n,k)} \right) + \lambda_z^{(n,k)} = 0$$

$$\int_0^1 u_z^{(n,k)} r \, dr = \frac{1}{4}$$

$$\partial_r u_z^{(n,k)}(r=0) = u_z^{(n,k)}(r=1) = 0$$

# Point fixe : problème linéaire pour $w_z$

Trouver  $w_z^{(n,k)} : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\lambda_{c,z}^{(n,k)} \in \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{Re} \phi^{(n,k-1)}}{\Delta t} \left( w_z^{(n,k)} - w_z^{(n-1)} - \left( u_z^{(n,k)} - u_z^{(n-1)} \right) \right) \\ & + \varepsilon^{-2} s \left( \psi^{(n,k-1)} \right) w_z^{(n,k)} - \frac{\partial_r}{r} \left( r s \left( \psi^{(n,k-1)} \right) \partial_r w_z^{(n,k)} \right) + \lambda_{c,z}^{(n,k)} = 0 \\ & \int_0^1 \left( u_z^{(n,k)} + w_z^{(n,k)} \right) \psi^{(n,k-1)} r \, dr = \frac{\psi_0}{4} \\ & \partial_r w_z^{(n,k)}(r=0) = w_z^{(n,k)}(r=1) = 0 \end{aligned}$$

# Point fixe : Decouplage entre $\phi$ et $p_c$

Carastéristiques approchées à l'ordre 1 :

$$X^{(n,k-1)}(r) = r - \Delta t w_r^{(n,k-1)}(r)$$

Résolution explicite pour  $\phi$  :

$$\psi^{(n,k)} = \psi^{(n-1)} \circ X^{(n,k-1)} \left( 1 + \Delta t \frac{\partial_r}{r} \left( r w_r^{(n,k)} \right) \right)^{-1}$$

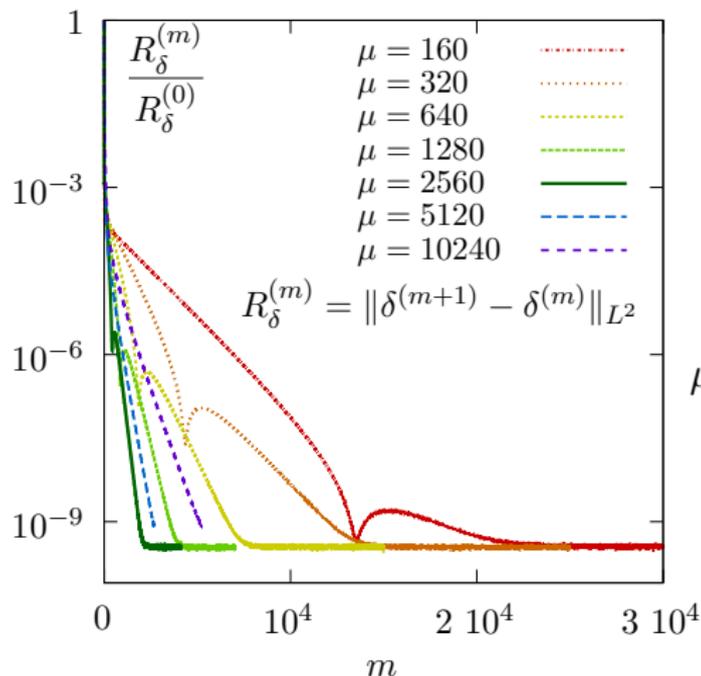
# Point fixe : complémentarité entre $p_{c,r}$ et $w_r$

Trouver  $w_r^{(n,k)} : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $p_{c,0}^{(n,k)} : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{Re}\phi^{(n,k-1)}}{\Delta t} \left( w_r^{(n,k)} - w_r^{(n-1)} \right) + \varepsilon^{-2} s \left( \psi^{(n,k-1)} \right) w_r^{(n,k)} \\ & \quad - \frac{\partial_r}{r} \left( 2 r s \left( \phi^{(n,k-1)} \right) \partial_r w_r^{(n,k)} \right) + \partial_r p_{c,0}^{(n,k)} \\ = & \frac{\partial_r}{r} \left( r \eta_{n,r} \left( \phi^{(n,k-1)} \right) \left| \partial_r u_z^{(n,k)} \right| \right) - \frac{1}{r} \eta_{n,\theta} \left( \phi^{(n,k-1)} \right) \left| \partial_r u_z^{(n,k)} \right| \\ & - \frac{1}{\Delta t} \left( 1 - \frac{\phi^{(n,k-1)} \circ \chi^{(n,k-1)}}{\phi_m} \right) \leq \frac{\partial_r}{r} \left( r w_r^{(n,k)} \right) \perp p_{c,0}^{(n,k)} \geq 0 \\ & w_r^{(n,k)}(r=0) = w_r^{(n,k)}(r=1) = 0 \end{aligned}$$

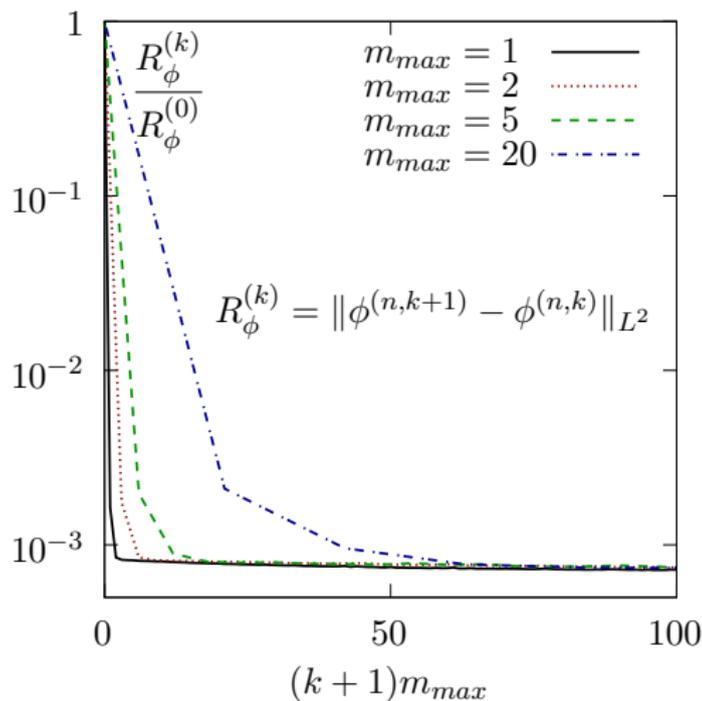
# Convergence de la boucle interne : Lagrangien augmenté

Usage : trouver  $w_r^{(n,k)}$  et  $p_{c,0}^{(n,k)}$ .



$\delta(r)$  : inconnue auxiliaire  
→ direction de descente,  
 $\mu$  : paramètre d'augmentation,  
 $m$  : index des itérations.

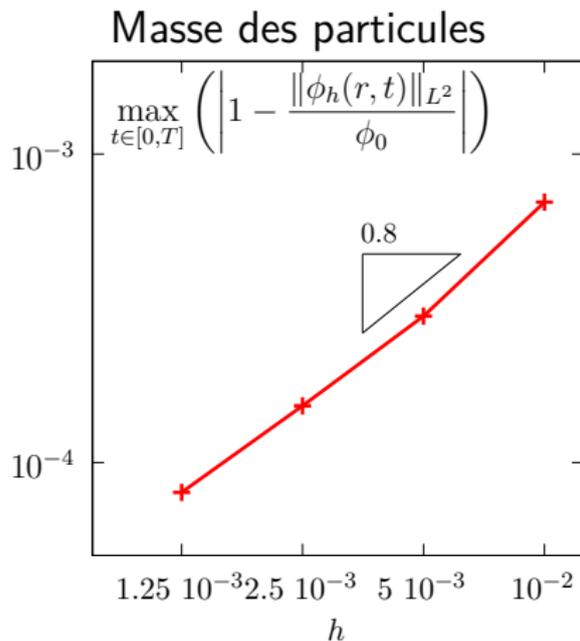
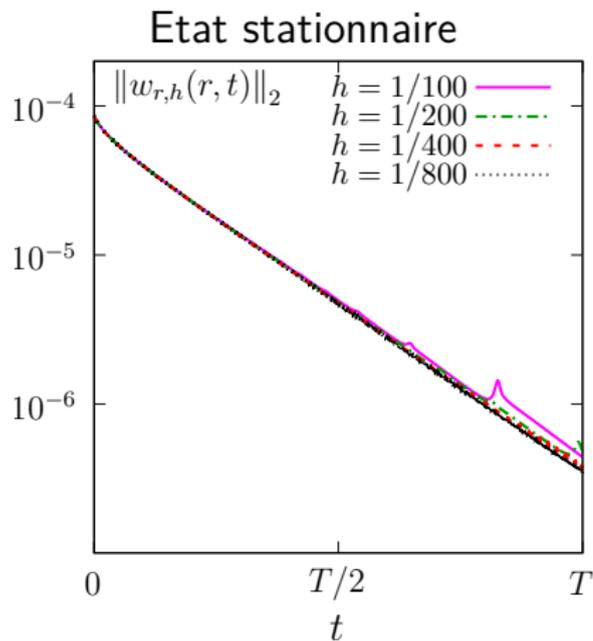
# Convergence de la boucle point fixe



$m_{max}$  : nombre maximum  
d'itérations du Lagrangien  
 $k$  : index des itérations.

$m_{max} = 1$  optimal.

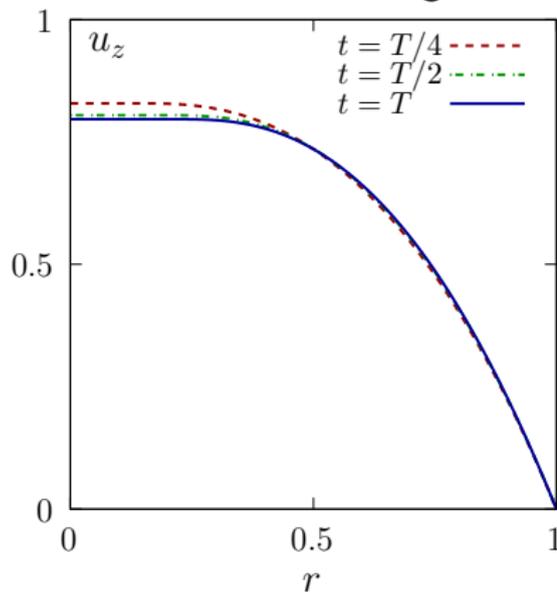
# Convergence en maillage



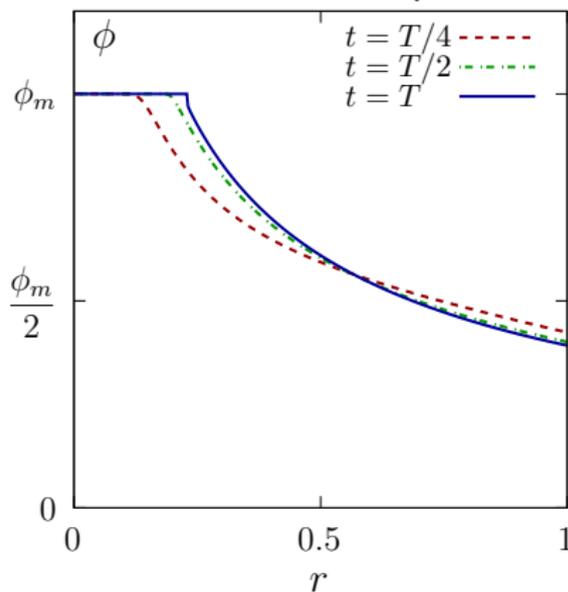
$h$  : diamètre de la maille.

- ① Introduction
- ② Modèle diphasique congestionné
- ③ Méthode numérique et convergence
- ④ **Etude qualitative et comparaison**
- ⑤ Conclusion

## Vitesse du mélange

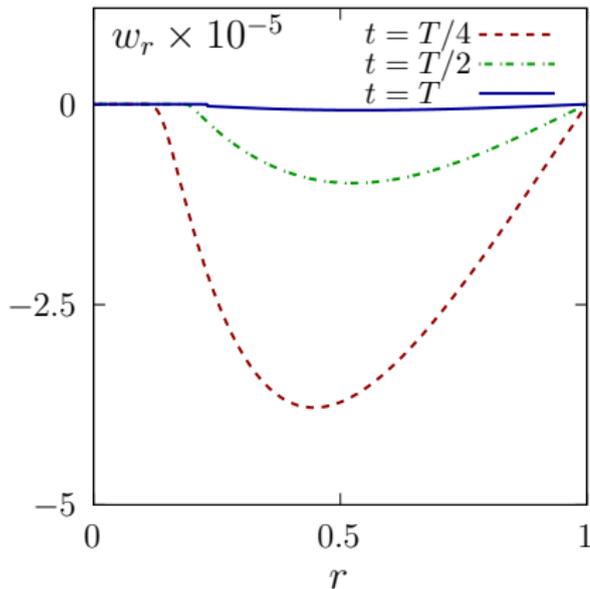


## Fraction volumique

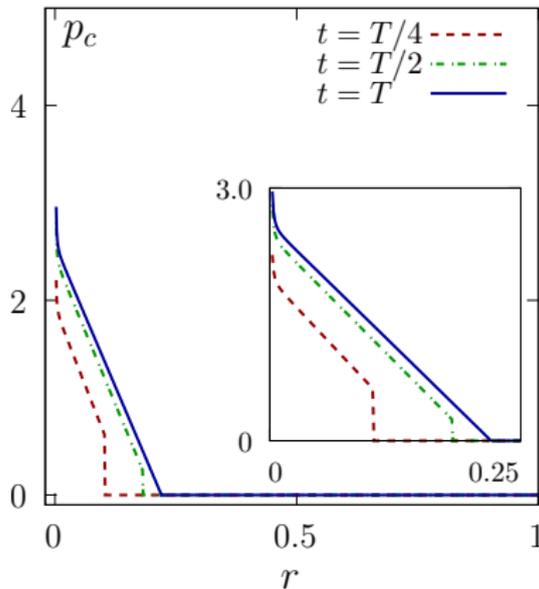


$$\phi_0 = 0.32 \quad \phi_m = 0.585$$

## Vitesse de migration

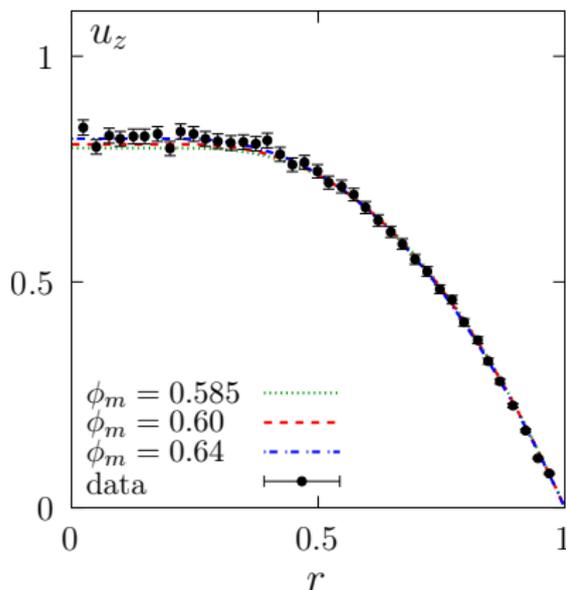
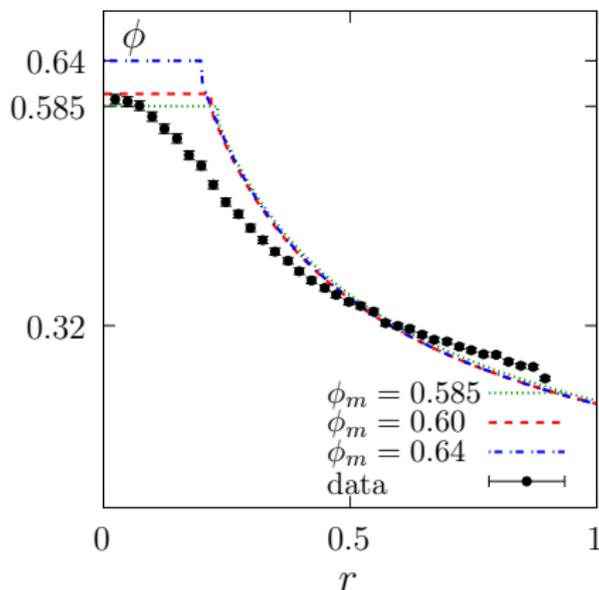


## Pression de contact



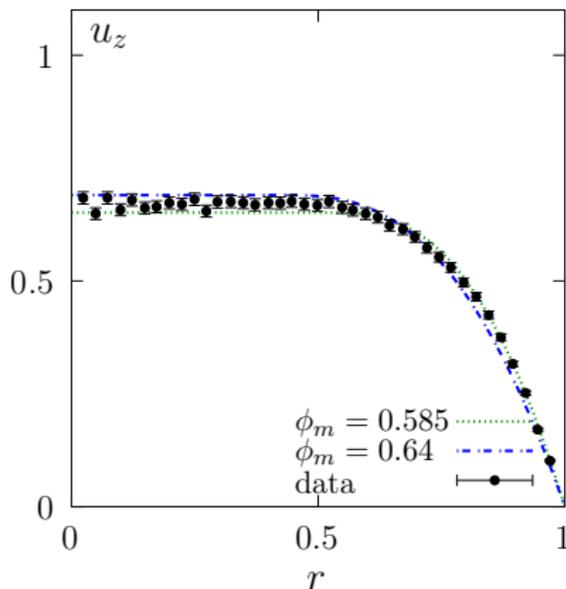
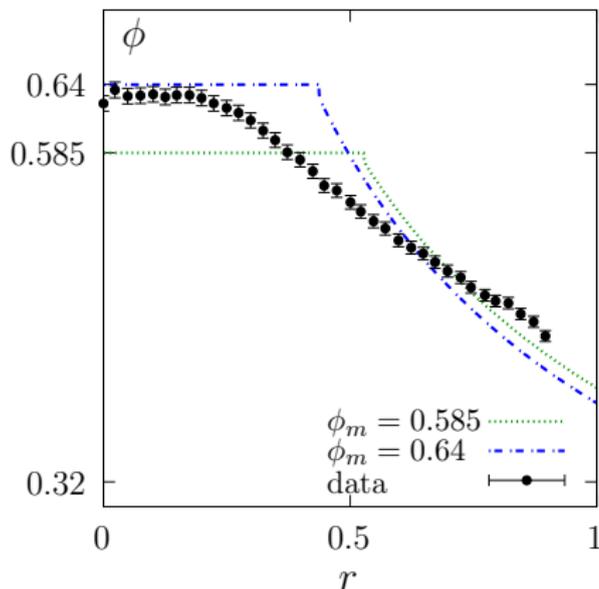
$$\phi_0 = 0.32 \quad \phi_m = 0.585$$

# Comparaisons en stationnaire, cas semi-dillué



$\phi_0 = 0.32$  Données : Oh *et al*, 2015

# Comparaisons en stationnaire, cas concentré



$\phi_0 = 0.50$  Données : Oh *et al*, 2015

- Condition de complémentarité + formulation diphasique :  
→ zones semi-concentrées à très concentrées.
- Paramètres numériques optimisables.
- Convergence des boucles internes et en maillage.
- Etat stationnaire atteint, masse des grains conservée.
- Représentation de grandeurs difficiles à mesurer.
- Prédiction quantitative en 1D :  
→ moyenne et forte concentration.

- Résoudre la relation de complémentarité entre  $\phi$  et  $p_c$ .
- Zones cisailées  
→ rhéologie a tenseur de texture. (O. *et al*, 2020)
- Zones non cisailées  
→ compressibilité de la phase granulaire.
- Géométries complexes.