Combinatoire et géométrie algébrique

Antoine Chambert-Loir (**Université de Paris**)

Réga, 16 décembre 2020

Sommaire

Introduction : géométrie et combinatoire

Polytopes convexes : parties compactes et non vides P d'un espace réel qui sont intersection d'une famille finie de demi-espaces affines.

Dimension : dim(P) est la dimension de l'espace affine engendré.

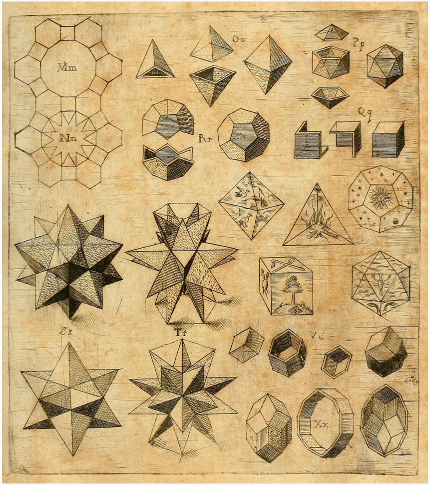
Faces : lieux du polytope où une forme linéaire donnée est maximale (ce sont des polytopes convexes)

Sommets : faces de dimension 0.

Théorème

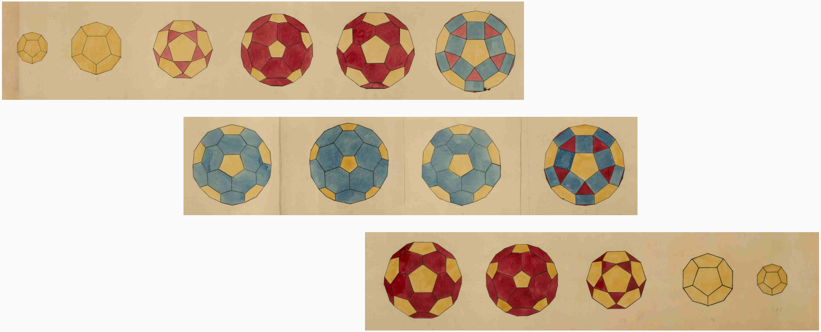
Toute face est l'enveloppe convexe de l'ensemble des sommets qu'elle contient.

Johannes Kepler — *Harmonices Mundi* (1619)



Source : Wikipedia

Alicia Boole-Stott



Représentation, par Alicia Boole-Stott, des sections d’un polytope de dimension 4 ayant 120 faces de dimension 3
Source : Irene Polo-Blanco, Wikipedia

Combinatoire

Soit f_m le nombre de faces de dimension m : sommets, arêtes,...

polytope	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4
carré	4	4	1		
hexagone	6	6	1		
tétraèdre	4	6	4	1	
icosaèdre	12	30	20	1	
dodécaèdre	20	30	12	1	
hypercube	15	32	24	8	1
120-cell	600	1200	710	120	1

Relation d’Euler

Soit P un polytope convexe, soit d sa dimension.

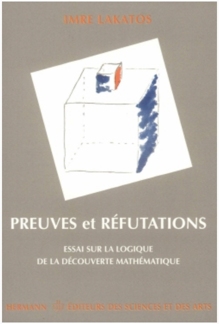
f_m = nombre de faces de P de dimension m.

Convention : $f_{-1} = 1$

On a $f_d = 1$ (connexité).

$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \cdots + (-1)^d f_d = 1.$$

Imre Lakatos, *Preuves et réfutations*
— Essai sur la logique
de la découverte mathématique



Relations de Dehn–Sommerville

Polytopes **simpliciaux** : toutes les faces de codimension 1 sont des simplexes.

$$\sum_{i=m}^{d-1} (-1)^i \binom{i+1}{m+1} f_i = (-1)^{d-1} f_m.$$

Relations de Dehn–Sommerville

Polytopes **simpliciaux** : toutes les faces de codimension 1 sont des simplexes.

$$\sum_{i=m}^{d-1} (-1)^i \binom{i+1}{m+1} f_i = (-1)^{d-1} f_m.$$

Reformulation (P. McMullen) : vecteur h : $h(\mathrm{P}) = (h_0, \dots, h_d)$

$$\sum_{i=0}^{d} h_i \mathrm{T}^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1} (\mathrm{T}-1)^{d-i}.$$

$$h_i = h_{d-i}$$

Vecteur f, vecteur h : exemples

Carré, hexagone :

$$
\begin{array}{cccc}
 & & 1 & 4 \\
 & 1 & 3 & 4 \\
1 & 2 & 1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc}
 & & 1 & 6 \\
 & 1 & 5 & 6 \\
1 & 4 & 1 &
\end{array}
$$

Vecteur f, vecteur h : exemples

Carré, hexagone :

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & 4 \\ & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & 1 & 6 \\ & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & \end{array}$$

Tétraèdre, icosaèdre, dodécaèdre :

$$\begin{array}{ccccc} & & & 1 & 4 \\ & & 1 & 3 & 6 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & & 1 & 12 \\ & & 1 & 11 & 30 \\ & 1 & 10 & 19 & 20 \\ 1 & 9 & 9 & 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & & 1 & 20 \\ & & 1 & 19 & 30 \\ & 1 & 18 & 11 & 12 \\ 1 & 17 & -7 & 1 & \end{array}$$

La conjecture de Motzkin (1957)

111. T. S. Motzkin: *Comonotone curves and polyhedra.*

A curve without common points, except the point of contact, with its osculating hyperplanes is called comonotone; if it has no hyperosculating hyperplanes it is strictly comonotone. The convex hull of m points on a strictly comonotone curve in real n-space is a comonotone polyhedron; the m osculating hyperplanes determine a comonotone dissection of projective space (e.g. the dissection of the set of all real polynomials of given degree by a finite set of real numbers excluded as roots). Comonotone dissections and polyhedra and their duals appear to be the most important types definable for every m and n. Among their prominent features are a simple enumeration and characterization of faces of d dimensions $d=1, 2, \cdots$; highest number f of faces for polyhedra, namely $f=\sum_{j=[d/2]+1}^{n/2} (m/j)\binom{m-j-1}{j-1}\binom{j}{d-j+1}$ for even n, $f(n, m, d) = (m+1)/(d+1)f(n+1, m+1, d+1)$ for odd n; greatest skewness of f as function of d, with maximum arbitrarily near to $d=3n/4$; the fact, that every $[n/2]$ vertices are neighbors (form a simplicial face), which distinguishes these polyhedra uniquely for even n; connection with variation-diminishing transformations. (Received October 3, 1956.)

La conjecture de Motzkin (1957)

Polytope cyclique : sommets de la forme $(t, t^2, \ldots, t^d)$ — situés sur la « courbe moment ». Leur type combinatoire ne dépend pas du choix des sommets.

Motivation : programmation linéaire, méthode du symplexe.

Conjecture (« Upper bound conjecture »)

À nombre de sommets égaux, les polytopes cycliques sont ceux qui ont le plus de faces de dimension donnée.

Prouvée par P. McMullen (1970)

Sommaire

Question de McMullen (1971)

Peut-on caractériser les vecteurs f des polytopes ?

Il se restreint au cas des **polytopes simpliciaux** : toutes les faces de dimension $< d$ sont des simplexes.

Cas dual des **polytopes simples** : de chaque sommet part un même nombre d'arêtes.

Question de McMullen (1971)

Peut-on caractériser les vecteurs f des polytopes ?

Il se restreint au cas des **polytopes simpliciaux** : toutes les faces de dimension $< d$ sont des simplexes.

Cas dual des **polytopes simples** : de chaque sommet part un même nombre d'arêtes.

Intérêt des polytopes simpliciaux : leur combinatoire est « stable », invariante par petit déplacement des sommets.

Lemme (Lemme de Macaulay–Kruskal)

Soit m, h des entiers. Il existe un unique entier $k \leq m$ et une unique suite strictement croissante $(n_k, \dots, n_m)$ telles que $k \leq n_k$ et

$$h = \binom{n_m}{m} + \binom{n_{m-1}}{m-1} + \cdots + \binom{n_k}{k}.$$

Notation

$$h^{\langle m \rangle} = \binom{n_m + 1}{m+1} + \binom{n_{m-1} + 1}{m} + \cdots + \binom{n_k + 1}{k+1}.$$

Conjecture de McMullen

$(f_{-1} = 1, f_0, f_1, \dots, f_d = 1)$ suite d'entiers,

$(h_0, \dots, h_d)$ donnée par $\sum_{i=0}^{d} h_i \mathrm{T}^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(\mathrm{T}-1)^{d-i}$

$(g_0, \dots, g_{d-1})$ donnée par $g_k = h_{k+1} - h_k$

Conjecture (P. McMullen, 1971)

$(f_{-1}, \dots, f_d)$ est le vecteur f d'un polytope simplicial si et seulement si :

1. ***Relations de Dehn–Sommerville :*** *$h_k = h_{d-k}$ pour tout k ;*
2. *Pour tout $k \leq \lfloor d/2 \rfloor - 1$, on a $g_k \leq g_{k-1}^{\langle k \rangle}$;*
3. *Le vecteur h est **unimodal** :*

$$h_0 \leq h_1 \leq \cdots \leq h_{\lfloor d/2 \rfloor} \geq h_{\lceil d/2 \rceil} \geq \cdots \geq h_{d-1} \geq h_d.$$

Traduction algébrique

Soit k un corps et $\mathrm{R} = \bigoplus_{d\in\mathbf{N}} \mathrm{R}_d$ une k-algèbre graduée.

Sa **fonction de Hilbert** est définie par

$$\mathrm{H}_\mathrm{R}(m) = \dim_k(\mathrm{R}_m).$$

Théorème (Macaulay, 1927 ; Stanley, 1978)

Soit k un corps et $h\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une application. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. *Il existe une k-algèbre graduée R, engendrée par ses éléments de degré 1, de fonction de Hilbert h, et telle que $\mathrm{R}_0 = k$.*
2. *On a $h_0 = 1$ et $h_{n+1} \leq h_n^{\langle n\rangle}$ pour tout entier $n \geq 0$.*

Suffisance

Étant donnée une suite $(f_{-1} = 1, f_0, \dots, f_d = 1)$ satisfaisant les conditions de McMullen, il s'agit de construire un polytope ayant cette combinatoire.

Démontré par Billera et Lee (1980).

Nécessité : Traduction cohomologique

Soit P un polytope simplicial. Pour démontrer les conditions de McMullen pour P, Stanley (1981) construit une variété algébrique X_P de dimension d dont la cohomologie est engendrée par $H^2(X_P)$ et vérifie $h_m = \dim(H^{2m}(X_P))$.

Relations de Dehn–Sommerville $\Leftrightarrow$ dualité de Poincaré

Unimodalité du vecteur h
$\Leftarrow$ Théorème de Lefschetz « difficile ».

Cohomologies de Weil

Soit X une variété projective lisse géométriquement connexe sur un corps k, de dimension d.

$H^*(X)$ sa cohomologie (singulière/Betti, étale…), à coefficients dans un corps F de caractéristique zéro ; c'est une algèbre graduée de dimension finie sur F

$H^0(X) = F$.

Dualité de Poincaré (Poincaré ; Grothendieck)

$H^{2d-i}(X) \simeq H^i(X)^\vee$.

Corollaire

$\dim(H^i(X)) = \dim(H^{2d-i}(X))$.

Théorème de Lefschetz « difficile » (Lefschetz, Hodge ; Deligne)

Soit $\omega \in H^2(X)$ la classe de Chern d'un fibré ample sur X. L'application

$$H^i(X) \to H^{2d-i}(X), \quad \xi \mapsto \omega^{d-i}\xi$$

est un isomorphisme.

Corollaire

Les suites $(\dim(H^0(X)), \dim(H^2(X)), \dots)$ *et* $(\dim(H^1(X)), \dim(H^3(X)), \dots)$ *sont unimodales.*

Sommaire

Exemple : Grassmanniennes

Considérons la grassmannienne $X = G_{d,n}$ qui paramètre les sous-espaces vectoriels de dimension d d'un espace vectoriel de dimension n.

D'après EHRESMANN, sa cohomologie vérifie :
$\dim(H^{2i}(X)) = p(i, d, n-d)$, nombre de partitions de i en $\leq d$ parties, chacune de taille au plus $n-d$; $\dim(H^{2i+1}(X)) = 0$.

L'unimodalité de la suite $p(0, d, m), p(1, d, m), \dots$ est un théorème de SYLVESTER.

On ne connaît apparemment pas de preuve purement combinatoire.

Variétés toriques

On considère un polytope $P \subset \mathbf{R}^d$ et on fait les hypothèses suivantes

- Les sommets de P appartiennent à $\mathbf{Q}^d$;
- L'origine est dans l'intérieur de P.

(polytope **rationnel**).

Trois hypothèses éventuelles supplémentaires :

- Les sommets de P sont dans $\mathbf{Z}^d$ (polytope **entier**);
- Chaque face (stricte) de P est un simplexe (polytope **simplicial**);
- À scalaire près, les sommets de chaque face (stricte) de P sont partie d'une base de $\mathbf{Z}^d$ (polytope **lisse**).

Variétés toriques : une première construction

Soit $S \subset \mathbf{Z}^d$ une partie finie engendrant affinement $\mathbf{R}^d$.

On considère $m \in \mathbf{Z}^d$ comme un monôme $T^m = T_1^{m_1} \dots T_d^{m_d}$.

Le tore algébrique $\mathbf{G}_\mathrm{m}^d$ agit sur l'espace projectif $\mathbf{P}_{(S)}$ de dimension $\mathrm{Card}(S) - 1$ par :

$$t \cdot x = [t^s x_s]_{s \in S}, \quad t = (t_1, \dots, t_d), \quad x = [x_s].$$

Définition

La variété torique X_S *est l'adhérence de Zariski de l'orbite du point* $[1 : 1 : \cdots : 1]$.

C'est une variété projective, de dimension d, munie d'une action du tore $\mathbf{G}_\mathrm{m}^d$, avec une orbite dense.

Variétés toriques : construction duale

Soit k un corps. Pour toute face stricte F de P, on considère successivement :

- Le cône $\sigma_F = \mathbf{R}_+ F$ de $\mathbf{R}^d$ et son polaire σ_F° dans $\mathbf{R}^d$;
- Le monoïde $M_F = \sigma_F^\circ \cap \mathbf{Z}^d$. Il est de type fini (*lemme de Gordan*);
- Le schéma $X_F = \operatorname{Spec}(k^{(M_F)})$ muni de son action du tore $\mathbf{G}_m^d = \operatorname{Spec}(k^{(\mathbf{Z}^d)})$.

Une inclusion de faces $F \subset G$ fournit $\sigma_F \subset \sigma_G$, donc $\sigma_G^\circ \subset \sigma_F^\circ$, puis $M_G \subset M_F$ et un morphisme équivariant $X_F \to X_G$ qui est une immersion ouverte.

Par recollement, on obtient la variété torique X_P associée à P. Elle est normale.

Variétés toriques : cohomologie

Théorème (Danilov,...)

Soit P *un polytope rationnel simplicial de* $\mathbf{R}^d$*, tel que* $0 \in \mathring{P}$.
Soit $h(\mathrm{P}) = (h_0, h_1, \dots)$ *son vecteur h. Pour tout i, on a*

$$\dim(\mathrm{H}^{2i}(\mathrm{X})) = h_i \text{ et } \dim(\mathrm{H}^{2i+1}(\mathrm{X})) = 0.$$

Théorème (Steenbrink)

Si une variété algébrique projective n'a que des singularités quotients, sa cohomologie vérifie dualité de Poincaré et théorème de Lefschetz « difficile ».

La raison est qu'une résolution des singularité $p\colon \tilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$ induit des **injections** $p^*\colon \mathrm{H}^i(\mathrm{X}) \to \mathrm{H}^i(\tilde{\mathrm{X}})$.

Conjecture de McMullen : polytopes simpliciaux

Théorème (Stanley)

La combinatoire d'un polytope simplicial P *vérifie les conditions de McMullen. En particulier, le vecteur* $h(\mathrm{P})$ *est unimodal.*

Si P est un polytope rationnel **simplicial**, alors la variété torique X_{P} n'a que des singularités quotients.

Mais si $\mathrm{S} \subset \mathbf{R}^d$ est l'ensemble des sommets de P, tout ensemble S′ assez proche de S est encore l'ensemble des sommets d'un polytope simplicial P′ qui est une déformation de P, et a même combinatoire. Donc le théorème, qui vaut pour P′, vaut aussi pour P.

Sommaire

Unimodalité

Lorsque le polytope rationnel P n'est pas simplicial, la cohomologie de la variété torique X_P se comporte mal.

La cohomologie d'intersection $\mathrm{IH}(\mathrm{X}_\mathrm{P})$ définie par (Goresky, McPherson ; Beilinson, Bernstein, Deligne, Gabber) est un substitut à la cohomologie usuelle :

- C'est un module gradué sur la cohomologie usuelle ;
- Elle vérifie la dualité de Poincaré, la pureté...
- Elle vérifie le théorème de Lefschetz « difficile » ;

Stanley définit un modification $\widetilde{h}(\mathrm{P})$ du vecteur $h(\mathrm{P})$, telle que $\dim(\mathrm{IH}^{2i}(\mathrm{X}_\mathrm{P})) = \widetilde{h}_i$ et $\dim(\mathrm{IH}^{2i+1}(\mathrm{X}_\mathrm{P})) = 0$. On en déduit :

Théorème (Stanley)

Le vecteur $\widetilde{h}(\mathrm{P})$ *d'un polytope rationnel* P *est unimodal.*

Combinatoire — cas des polytopes non rationnels

Pour le vecteur $\widetilde{h}(P)$, Stanley (1987) a démontré de façon combinatoire les relations de Dehn–Sommerville $\widetilde{h}_i = \widetilde{h}_{d-i}$.

McMullen (1993) a proposé une démonstration combinatoire d'un **théorème de Lefschetz « difficile »** pour les polytopes simples, étendue par Karu (2004) au cas des polytopes arbitraires.

Théorème (Stanley, McMullen, Karu)

Le vecteur h d'un polytope est symétrique et unimodal.

Quelques remarques sur les théories de Hodge combinatoires

Un outil fondamental dans les preuves combinatoires du théorème de Lefschetz « difficile » est la démonstration d'un analogue des relations bilinéaires de Hodge–Riemann :

Soit $\omega \in H^2(X_P)$ une classe « ample ». La forme quadratique donnée par $Q(\xi) = (-1)^{i/2} \deg(\omega^{d-i}\xi \cdot \xi)$ est définie positive sur le sous-espace « primitif »

$$IP^{2i}(X_P) = \ker\left(\omega^{d+1-i} \colon IH^{2i}(X_P) \to IH^{2d-2i+2}(X_P)\right).$$

Ces relations jouent également un rôle fondamental dans la théorie de Hodge des matroïdes (Adiprasito, Huh, Katz ; Amini, Piquerez).

Sommaire

Références

Richard P. Stanley, « The Number of Faces of a Simplicial Convex Polytope », *Advances in Mathematics* **35**, nº 3 (mars 1980) : 236-38, `https://doi.org/10.1016/0001-8708(80)90050`.

Richard P. Stanley, « Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry », in *Graph theory and its applications : East and West (Jinan, 1986)*, vol. **576**, Ann. New york acad. Sci. (New York Acad. Sci., New York, 1989), 500-535, `https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1989.tb16434.x`.

Bernard Teissier, « Variétés toriques et polytopes », in Séminaire Bourbaki, vol. 1980/81, *Lecture notes in math.*, vol. 901, (Springer, Berlin-New York, 1981), 71-84, `http://www.numdam.org/item/SB_1980-1981__23__71_0/`