Théorie de Galois des périodes et des fonctions hypergéométriques de Lauricella

(avec F. Brown)

Motivation 1 : comprendre des calculs liés aux intégrales de Feynman (en "régularisation dimensionnelle" : $\dim = 4 - 2\varepsilon$) par Abreu - Britto - Duhr - Gardi - Matthew

$$I_\varepsilon(G) = \sum_{n \gg -\infty} \alpha_n(G)\, \varepsilon^n$$

graphe de Feynman

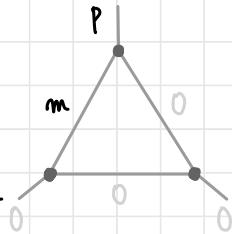
périodes (ex : valeurs zêta multiples)

Calcul de la théorie de Galois des $\alpha_n(G)$

$\rightsquigarrow$ formules <u>finies</u> en termes de $I_\varepsilon(G')$.

"théorie de Galois des intégrales de Feynman" ?

<u>Exemple :</u>

$I_\varepsilon\Bigg($  $\Bigg) = \dfrac{e^{\gamma\varepsilon}\,\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon(1-\varepsilon)} (m^2)^{-1-\varepsilon}\; {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 1+\varepsilon \\ 2-\varepsilon \end{matrix} \,\middle|\, \dfrac{p^2}{m^2}\right).$

α_n : $\zeta(n)$ $\log^n(m^2)$ $\mathrm{Li}_n\left(\dfrac{p^2}{m^2}\right)$, ...

Motivation 2 : réconcilier deux points de vue géométriques / cohomologiques / galoisiens sur certaines intégrales hypergéométriques

(1) le point de vue fonctionnel

$$B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} = \int_0^1 x^s(1-x)^t \frac{dx}{x(1-x)}$$

Pour $s,t \in \mathbb{C}$ fixés, c'est une "période" d'une connexion algébrique sur le fibré trivial de rang 1 sur $X = \mathbb{A}^1 \setminus \{0,1\}$:

$$\nabla_{s,t}(f) = df + f\left(s\frac{dx}{x} + t\frac{dx}{x-1}\right) \quad \left(d\left(x^s(1-x)^t f\right) = x^s(1-x)^t \nabla_{s,t}(f)\right)$$

Groupe de cohomologie : $H^1_{dR}(X, (\mathcal{O}_X, \nabla_{s,t}))$ ← de dim. 1 si $s, t, s+t \notin \mathbb{Z}$

⚠ $\nabla_{s,t}$ n'est pas d'origine géométrique si $s,t \notin \mathbb{Q}$.
↳ Gauss-Manin

Meilleur point de vue : connexion à coefficients dans $\cancel{\mathbb{Q}[s,t]}$ ou $\cancel{\mathbb{Q}(s,t)}$
aujourd'hui : $\mathbb{Q}[[s,t]]$ ou $\mathbb{Q}((s,t))$

Groupe de Galois de $B(s,t)$: $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}((s,t))}$.

(2) Le point de vue des périodes

$$\zeta(n_1,\dots,n_r) = \sum_{1\le k_1<\dots<k_r} \frac{1}{k_1^{n_1}\cdots k_r^{n_r}}$$

$$B(s,t) = \frac{s+t}{st}\left(1 - \sum_{m,n\geq 1} (-s)^m(-t)^n\, \zeta(\underbrace{1,1,\dots,1}_{n-1}, m+1)\right)$$

bof ...

$$B(s,t) = \frac{s+t}{st}\exp\left(\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\zeta(n)\left((s+t)^n - s^n - t^n\right)\right)$$

mieux !

Théorie de Galois des périodes : (motifs)

$$G^{mot} \ni g : \zeta(n) \mapsto \zeta(n) + a_g^{(n)} \in \mathbb{Q}$$

(radical unipotent)

$$\mathrm{Gal}(\zeta(n)) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & a^{(n)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad g\, B(s,t) = B(s,t)\, A_g(s,t).$$

$$A_g(s,t) \in \mathbb{Q}((s,t))^\times = \mathbb{G}_m(\mathbb{Q}((s,t)))$$

<u>Leitmotiv</u> : le groupe de Galois "fonctionnel" contrôle la théorie de Galois des périodes pour tous les coefficients du développement de Laurent.

(Applications à l'étude du groupe de Galois motivique ?)

1 - Théorie de Galois des périodes

Définition : (Kontsevich–Zagier) Une <u>période</u> est un nombre complexe dont les parties réelle et imaginaire peuvent s'écrire comme des intégrales absolument convergentes de la forme

$$\int_{\sigma} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n .$$

$\in \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$

union/intersection de $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid g(x_1, \dots, x_n) \geq 0\}$ avec $g \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$

Exemples :

- tous les nombres algébriques $\left(\sqrt{2} = \int_{\substack{x \geq 0 \\ x^2 \leq 2}} 1\, dx \right)$
- $\pi = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 1\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$
- $\zeta(n) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^n} = \int_{[0,1]^n} \frac{dx_1 \dots dx_n}{1 - x_1 \dots x_n}$
- périodes elliptiques $F(t) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-tx^2)}}$ $\leftarrow \frac{dx}{y}$ avec $y^2 = (1-x^2)(1-tx^2)$, $y \geq 0$

("fonction-période")

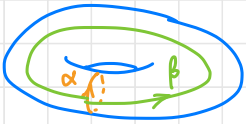
Idée : (Grothendieck, André)

la théorie de Galois classique des nombres algébriques devrait être un cas particulier d'une théorie de Galois des périodes, où les groupes de Galois seraient des groupes algébriques sur $\mathbb{Q}$.

Vient de l'interprétation cohomologique des périodes :

X variété algébrique $/\mathbb{Q}$

(ex : $X = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid y^2 = (1-x^2)(1-tx^2)\}$)
si $t \in \mathbb{Q}$



$X(\mathbb{C})$

⇝ cohomologie de Betti (singulière)

$$H^n_B(X) := \left(\frac{\{n\text{-cycles dans } X(\mathbb{C})\}}{\{\text{〃 - bords 〃 〃}\}} \right)^\vee$$

$$H^1_B(X) = \mathbb{Q}[\alpha]^\vee \oplus \mathbb{Q}[\beta]^\vee$$

⇝ cohomologie de de Rham algébrique

$$H^n_{dR}(X) := \frac{\{n\text{-formes algébriques fermées}\}}{\{\text{〃 〃 exactes}\}}$$

$$H^1_{dR}(X) = \mathbb{Q}\left[\frac{dx}{y}\right] \oplus \mathbb{Q}\left[\frac{x\,dx}{y}\right]$$

⇝ comparaison $H^n_{dR}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow[\simeq]{\int} H^n_B(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$

dont les coefficients sont des périodes.

ex : $\displaystyle\int_\alpha \frac{dx}{y} = F(t)$

- Théorie(s) des motifs : (Grothendieck, ...)

théorie cohomologique universelle pour les variétés algébriques

$$\begin{tikzcd}
 & & H^n_{dR}(X) \\
\text{Variétés algébriques}/\mathbb{Q} \arrow[r, "\text{les morphismes viennent de la géométrie}"] & \text{Motifs} \arrow[ur, "\omega_{dR}"] \arrow[dr, "\omega_B"'] & \\
X & H^n(X) & \mathbb{Q}\text{-ev} \\
 & & H^n_B(X)
\end{tikzcd}$$

- la catégorie des motifs est <u>tannakienne</u>, foncteurs fibres $\omega_{dR}, \omega_B, \dots$
- $G_{dR} := \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega_{dR})$ le groupe de Galois motivique.
- Périodes motiviques

$$\mathcal{P}^{mot} = \mathcal{O}(\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega_{dR}, \omega_B)) \xrightarrow{\text{per}} \mathbb{C}$$

$$[H^n(X), \underset{\substack{\cap \\ H^n_B(X)^\vee}}{[\gamma]}, \underset{\substack{\cap \\ H^n_{dR}(X)}}{[\eta]}] \longmapsto \int_\gamma \eta$$

- Théorie de Galois des périodes motiviques : $G_{dR} \circlearrowright \mathcal{P}^{mot}$
- Conjecture des périodes : per est injectif.

$\Rightarrow$ théorie de Galois des périodes.

(Calculable)

2 – La théorie de Galois des fonctions de Lauricella

$$\Sigma = \{\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\sigma_0}, \sigma_1, \dots, \sigma_n\} \subset \mathbb{C} \quad \text{distincts} \qquad (\text{ou } \Sigma \subset \overline{\mathbb{Q}})$$

<u>Déf</u> : (Matrice des) fonctions de Lauricella

$$L_{i,j}(s_0,\dots,s_n) = -s_j \int_0^{\sigma_i} x^{s_0} \prod_{k=1}^{n} (1 - x\sigma_k^{-1})^{s_k} \frac{dx}{x-\sigma_j} \qquad (1 \leq i,j \leq n)$$

<u>Exemples</u> :

- $\Sigma = \{\underset{s,t}{0,1}\} \rightsquigarrow L_{1,1} = -t \int_0^1 x^s (1-x)^t \frac{dx}{x-1} = \frac{st}{s+t} B(s,t)$

- $\Sigma = \{\underset{b,c-b,-a}{0,1,y^{-1}}\} \rightsquigarrow B(b,c-b)\, \underbrace{{}_2F_1\left(\begin{matrix} a & b \\ & c \end{matrix} \middle| y\right)}_{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{y^n}{n!}} = \int_0^1 x^b (1-x)^{c-b} (1-yx)^{-a} \frac{dx}{x(1-x)}$

$$= \frac{c}{b(c-b)} L_{1,1} + \frac{1}{b} L_{1,2}$$

Point de vue "fonctionnel" : L est une "matrice des périodes" de

$$H^1(\underset{\overset{\shortparallel}{\mathbb{A}^1 \setminus \Sigma}}{X_\Sigma}, (\mathcal{O}_{X_\Sigma}, \nabla_{\underline{s}})) \qquad \nabla_{\underline{s}}(f) = df + f\left(\sum_{k=0}^{n} s_k \frac{dx}{x-\sigma_k}\right).$$

Point de vue "périodes" : $L(s_0,\dots,s_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}[\![s_0,\dots,s_n]\!])$.

- Les coefficients sont des intégrales itérées sur X_Σ

$$\int_{\gamma_j} \omega_1 \cdots \omega_N \qquad \text{avec } \omega_k \in \left\{\frac{dx}{x-\sigma}\right\}_{\sigma\in\Sigma}, \ \gamma_j \text{ chemin de } 0 \text{ à } \sigma_j$$

$$\int_{0\le t_1\le\dots\le t_N\le 1} \omega_1(\gamma_j(t_1))\cdots\omega_N(\gamma_j(t_N))$$

points-base tangentiels !

- Ce sont des périodes du groupe fondamental motivique

$$\mathcal{O}(\pi_1^{mot}(X_\Sigma, 0, \sigma_j)) \in \mathrm{Ind}\text{-}MT(\overline{\mathbb{Q}})$$

motifs de Tate mixtes

- On peut les relever en des périodes motivisques

$$L^{mot} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{P}^{mot}_{MT(\overline{\mathbb{Q}})}[\![s_0,\dots,s_n]\!]) \qquad (\mathrm{per}(L^{mot}) = L)$$

<u>Théorème</u> : (Brown-D.) Il existe $A^{dR} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}(G_{dR})[\![s_0,\dots,s_n]\!])$ explicite telle qu'on ait :

$$\forall g \in G_{dR}, \qquad g\cdot L^{mot} = L^{mot} A^{dR}(g)$$

(ingrédient principal : "action d'Ihara" $G_{dR} \curvearrowright (\pi_1^{mot})_{dR}$.)

3 - Motifs de Mellin locaux (avec F. Brown, J. Fresán, M. Tapušković)

$f : X \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$, on étudie les transformées de Mellin

$$F(s) = \int_\sigma f^s \omega = \sum_{k \geq 0} s^k \left(\int_\sigma \frac{\log^k(f)}{k!} \omega \right)$$

Théorème imprécis : G_{dR} agit sur les coefficients de $F(s)$ via un groupe algébrique $/ \mathbb{Q}((s))$.

$$G_{dR} \longrightarrow \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}((s))/\mathbb{Q}} GL\left(H^n(X, f^*(\mathcal{O}_X, \nabla_s)) / \mathbb{Q}((s)) \right)$$

En cours :

- $\mathrm{Im}\left(G^{dR} \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}((s)) \longrightarrow GL\left(H / \mathbb{Q}((s)) \right) \right)$?

  (groupe tannakien pour une catégorie de "motifs de Mellin locaux")
- Théorie globale ? (Loeser - Sabbah, Gabber - Loeser)
- Application aux intégrales de Feynman.