



Reconstruction théorique et numérique de petites déformations d'un guide d'onde

Angèle NICLAS

Co-auteurs :

Éric BONNETIER, Laurent SEPPECHER, Grégory VIAL

3 décembre 2020

Description du problème

Défauts dans un guide d'onde acoustique ou électromagnétique :

Description du problème

Défauts dans un guide d'onde acoustique ou électromagnétique :

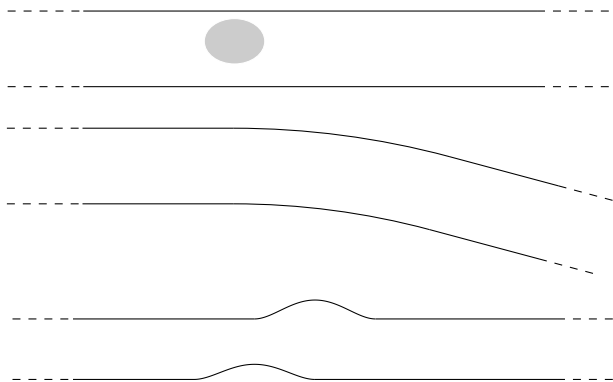
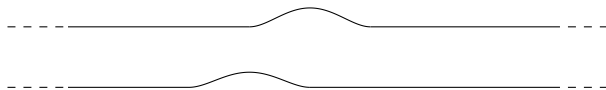


Figure: Différents défauts : inhomogénéité, courbure, enfoncement et bosse.

Description du problème

Défauts dans un guide d'onde acoustique ou électromagnétique :



Méthode utilisée :

KHARRAT, M. and ICHCHOU, M. N. and BAREILLE, O. and ZHOU, W, Pipeline inspection using a torsional guided-waves inspection system. Part 1: defect identification, International Journal of Applied Mechanics 6, 2014.

Description du problème

Défauts dans un guide d'onde acoustique ou électromagnétique :



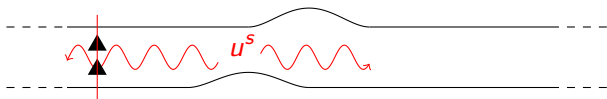
Méthode utilisée :

- Envoi d'une onde incidente connue

KHARRAT, M. and ICHCHOU, M. N. and BAREILLE, O. and ZHOU, W, Pipeline inspection using a torsional guided-waves inspection system. Part 1: defect identification, International Journal of Applied Mechanics 6, 2014.

Description du problème

Défauts dans un guide d'onde acoustique ou électromagnétique :



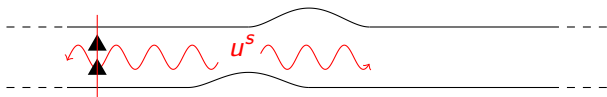
Méthode utilisée :

- Envoi d'une onde incidente connue
- Mesure d'une éventuelle onde réfléchi sur une tranche du guide d'onde

KHARRAT, M. and ICHCHOU, M. N. and BAREILLE, O. and ZHOU, W, Pipeline inspection using a torsional guided-waves inspection system. Part 1: defect identification, International Journal of Applied Mechanics 6, 2014.

Description du problème

Défauts dans un guide d'onde acoustique ou électromagnétique :



Méthode utilisée :

- Envoi d'une onde incidente connue
- Mesure d'une éventuelle onde réfléchie sur une tranche du guide d'onde

KHARRAT, M. and ICHCHOU, M. N. and BAREILLE, O. and ZHOU, W, Pipeline inspection using a torsional guided-waves inspection system. Part 1: defect identification, International Journal of Applied Mechanics 6, 2014.
BOURGEOIS, Laurent and LUNEVILLE, Eric, The linear sampling method in a waveguide: A modal formulation, Inverse Problems 24, 2008.

Modélisation du problème

On pose $\Omega = \{g(x) < y < h(x) + 1, x \in \mathbb{R}\}$, où g, h sont supportées dans $(0, r)$.

Équation de Helmholtz dans un guide infini pour $k > 0$:

$$\begin{cases} \Delta u_k + k^2 u_k = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Modélisation du problème

On pose $\Omega = \{g(x) < y < h(x) + 1, x \in \mathbb{R}\}$, où g, h sont supportées dans $(0, r)$.

Équation de Helmholtz dans un guide infini pour $k > 0$:

$$\begin{cases} \Delta u_k + k^2 u_k = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Si $u_k = u_k^{inc} + u_k^s$ alors

$$\begin{cases} \Delta u_k^s + k^2 u_k^s = -\Delta u_k^{inc} - k^2 u_k^{inc} & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u_k^s = -\partial_\nu u_k^{inc} & \text{sur } \partial\Omega, \\ u_k^s \text{ est sortante.} \end{cases} \quad (2)$$

Modélisation du problème

On pose $\Omega = \{g(x) < y < h(x) + 1, x \in \mathbb{R}\}$, où g, h sont supportées dans $(0, r)$.

Équation de Helmholtz dans un guide infini pour $k > 0$:

$$\begin{cases} \Delta u_k + k^2 u_k = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Si $u_k = u_k^{inc} + u_k^s$ alors

$$\begin{cases} \Delta u_k^s + k^2 u_k^s = -\Delta u_k^{inc} - k^2 u_k^{inc} & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u_k^s = -\partial_\nu u_k^{inc} & \text{sur } \partial\Omega, \\ u_k^s \text{ est sortante.} \end{cases} \quad (2)$$

Problème

A partir des mesures de $u_k^s(0, y)$ pour tout $y \in (0, 1)$ et $k \in K$ où K est un ensemble donné de fréquences, peut-on retrouver h et g ?

Exemple de propagation des ondes

Exemple avec $k = 10$ et une onde incidente $u_k^{\text{inc}}(x, y) = e^{ikx}$:

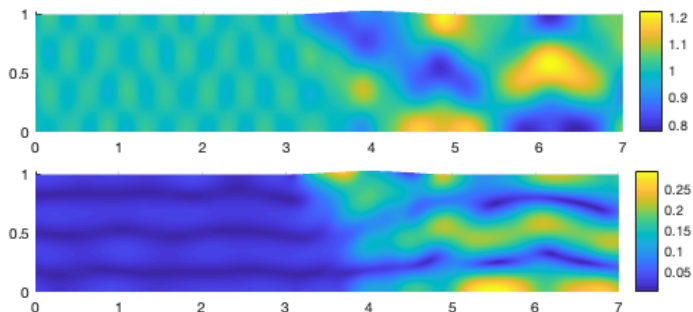


Figure: En haut, le module de l'onde totale u_k , en bas, le module de l'onde réfléchie u_k^s .

Plan d'étude du problème

- Approcher le problème dans le guide déformé par un problème dans un guide droit
- Proposer une méthode d'inversion pour retrouver h et g
- Contrôler la stabilité de cette méthode
- Tester numériquement cette inversion

Transformation vers le guide droit

Onde incidente choisie : $u_k^{\text{inc}}(x, y) = e^{ikx}$, et $\Omega^D = \mathbb{R} \times (0, 1)$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u_k^s + k^2 u_k^s = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u_k^s = h'(x) i k e^{ikx} / \sqrt{1 + h'(x)^2} & \text{sur } \partial\Omega_{\text{top}}, \\ \partial_\nu u_k^s = -g'(x) i k e^{ikx} / \sqrt{1 + g'(x)^2} & \text{sur } \partial\Omega_{\text{bot}}, \\ u_k^s \text{ est sortante.} & \end{array} \right. \quad (3)$$

Transformation vers le guide droit

Onde incidente choisie : $u_k^{\text{inc}}(x, y) = e^{ikx}$, et $\Omega^D = \mathbb{R} \times (0, 1)$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u_k^s + k^2 u_k^s = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u_k^s = h'(x) i k e^{ikx} / \sqrt{1 + h'(x)^2} & \text{sur } \partial\Omega_{\text{top}}, \\ \partial_\nu u_k^s = -g'(x) i k e^{ikx} / \sqrt{1 + g'(x)^2} & \text{sur } \partial\Omega_{\text{bot}}, \\ u_k^s \text{ est sortante.} & \end{array} \right. \quad (3)$$

On pose $\phi(x, y) = (x, (1 + h(x) - g(x))y + g(x))$ et $v_k^s = u_k^s \circ \phi$, alors

Transformation vers le guide droit

Onde incidente choisie : $u_k^{\text{inc}}(x, y) = e^{ikx}$, et $\Omega^D = \mathbb{R} \times (0, 1)$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u_k^s + k^2 u_k^s = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u_k^s = h'(x) i k e^{ikx} / \sqrt{1 + h'(x)^2} & \text{sur } \partial\Omega_{\text{top}}, \\ \partial_\nu u_k^s = -g'(x) i k e^{ikx} / \sqrt{1 + g'(x)^2} & \text{sur } \partial\Omega_{\text{bot}}, \\ u_k^s \text{ est sortante.} & \end{array} \right. \quad (3)$$

On pose $\phi(x, y) = (x, (1 + h(x) - g(x))y + g(x))$ et $v_k^s = u_k^s \circ \phi$, alors

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \Delta v_k^s + k^2 v_k^s = -\nabla \cdot (H \nabla v_k^s) - k^2 \delta v_k^s & \text{dans } \Omega^D, \\ \partial_\nu v_k^s = -H \nabla v_k^s \cdot \nu + h'(x) i k e^{ikx} & \text{sur } \partial\Omega_{\text{top}}^D, \\ \partial_\nu v_k^s = -H \nabla v_k^s \cdot \nu - g'(x) i k e^{ikx} & \text{sur } \partial\Omega_{\text{bot}}^D, \\ v_k^s \text{ est sortante.} & \end{array} \right. \quad (4)$$

où H, δ dépendent de g, h .

Approximation de Born

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta v_k^s + k^2 v_k^s = -\nabla \cdot (H \nabla v_k^s) - k^2 \delta v_k^s & \text{dans } \Omega^D, \\ \partial_\nu v_k^s = -H \nabla v_k^s \cdot \nu + h'(x) i k e^{i k x} & \text{sur } \partial \Omega_{\text{top}}^D, \\ \partial_\nu v_k^s = -H \nabla v_k^s \cdot \nu - g'(x) i k e^{i k x} & \text{sur } \partial \Omega_{\text{bot}}^D, \\ v_k^s \text{ est sortante.} & \end{array} \right. \quad (5)$$

On peut vérifier que

$$\begin{aligned} \|\nabla \cdot (H \nabla v_k^s) + k^2 \delta v_k^s\|_{L^2} &\leq A(h, g) \|v_k^s\|_{H^2}, \\ \|H \nabla v_k^s\|_{H^{1/2}} &\leq B(h, g) \|v_k^s\|_{H^2}. \end{aligned}$$

Approximation de Born

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta v_k^s + k^2 v_k^s = -\nabla \cdot (H \nabla v_k^s) - k^2 \delta v_k^s & \text{dans } \Omega^D, \\ \partial_\nu v_k^s = -H \nabla v_k^s \cdot \nu + h'(x) i k e^{i k x} & \text{sur } \partial \Omega_{\text{top}}^D, \\ \partial_\nu v_k^s = -H \nabla v_k^s \cdot \nu - g'(x) i k e^{i k x} & \text{sur } \partial \Omega_{\text{bot}}^D, \\ v_k^s \text{ est sortante.} & \end{array} \right. \quad (5)$$

On peut vérifier que

$$\begin{aligned} \|\nabla \cdot (H \nabla v_k^s) + k^2 \delta v_k^s\|_{L^2} &\leq A(h, g) \|v_k^s\|_{H^2}, \\ \|H \nabla v_k^s\|_{H^{1/2}} &\leq B(h, g) \|v_k^s\|_{H^2}. \end{aligned}$$

Approximation de Born : si $\|h\|_{C^2}$ et $\|g\|_{C^2}$ sont petites, alors v_k^s est proche de w_k^s solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta w_k^s + k^2 w_k^s = 0 & \text{dans } \Omega^D, \\ \partial_\nu w_k^s = h'(x) i k e^{i k x} & \text{sur } \partial \Omega_{\text{top}}^D, \\ \partial_\nu w_k^s = -g'(x) i k e^{i k x} & \text{sur } \partial \Omega_{\text{bot}}^D, \\ w_k^s \text{ est sortante.} & \end{array} \right. \quad (6)$$

Solution de l'équation en guide droit

Modes dans un guide d'onde pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ y \mapsto \sqrt{2} \cos(n\pi y) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (7)$$

alors $w_k^s(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} w_{k,n}^s(x) \varphi_n(y)$ avec $k_n^2 = k^2 - n^2\pi^2$ et

$$w_{k,n}^s(x) = \frac{i}{2k_n} \int_{\mathbb{R}} (h'(z)\varphi_n(1) - g'(z)\varphi_n(0)) ike^{ikz} e^{ik_n|x-z|} dz. \quad (8)$$

Solution de l'équation en guide droit

Modes dans un guide d'onde pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ y \mapsto \sqrt{2} \cos(n\pi y) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (7)$$

alors $w_k^s(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} w_{k,n}^s(x) \varphi_n(y)$ avec $k_n^2 = k^2 - n^2\pi^2$ et

$$w_{k,n}^s(x) = \frac{i}{2k_n} \int_{\mathbb{R}} (h'(z)\varphi_n(1) - g'(z)\varphi_n(0)) ike^{ikz} e^{ik_n|x-z|} dz. \quad (8)$$

Solution de l'équation en guide droit

Modes dans un guide d'onde pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ y \mapsto \sqrt{2} \cos(n\pi y) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (7)$$

alors $w_k^s(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} w_{k,n}^s(x) \varphi_n(y)$ avec $k_n^2 = k^2 - n^2\pi^2$ et

$$w_{k,n}^s(x) = \frac{i}{2k_n} \int_{\mathbb{R}} (h'(z)\varphi_n(1) - g'(z)\varphi_n(0)) ike^{ikz} e^{ik_n|x-z|} dz. \quad (8)$$

- Si $k < n\pi$, les modes sont propagatifs.
- Si $k > n\pi$, les modes sont évanescents et difficiles à mesurer.

Données mesurées

$k \in K := (0, k_{\max})$, on mesure $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_{k,n}^s(0) \varphi_n(y)$ pour $y \in (0, 1)$.

Données mesurées

$k \in K := (0, k_{\max})$, on mesure $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_{k,n}^s(0) \varphi_n(y)$ pour $y \in (0, 1)$.

- Le mode $n = 0$ est toujours propagatif, et on mesure

$$w_{k,0}^s(0) = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (h'(z) - g'(z)) e^{2ikz} dz \quad \forall k \in (0, k_{\max}).$$

Données mesurées

$k \in K := (0, k_{\max})$, on mesure $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_{k,n}^s(0) \varphi_n(y)$ pour $y \in (0, 1)$.

- Le mode $n = 0$ est toujours propagatif, et on mesure

$$w_{k,0}^s(0) = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (h'(z) - g'(z)) e^{2ikz} dz \quad \forall k \in (0, k_{\max}).$$

\Rightarrow On a $\mathcal{F}(h' - g')(\omega)$ pour tout $\omega \in (0, 2k_{\max})$.

Données mesurées

$k \in K := (0, k_{\max})$, on mesure $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_{k,n}^s(0) \varphi_n(y)$ pour $y \in (0, 1)$.

- Le mode $n = 0$ est toujours propagatif, et on mesure

$$w_{k,0}^s(0) = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (h'(z) - g'(z)) e^{2ikz} dz \quad \forall k \in (0, k_{\max}).$$

\Rightarrow On a $\mathcal{F}(h' - g')(\omega)$ pour tout $\omega \in (0, 2k_{\max})$.

- Le mode $n = 1$ est propagatif si $k > \pi$, et on mesure

$$w_{k,1}^s(0) = \frac{\sqrt{2}k}{2k_1} \int_0^{+\infty} (h'(z) + g'(z)) e^{i(k_1+k)z} dz \quad \forall k \in (\pi, k_{\max}).$$

Données mesurées

$k \in K := (0, k_{\max})$, on mesure $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_{k,n}^s(0) \varphi_n(y)$ pour $y \in (0, 1)$.

- Le mode $n = 0$ est toujours propagatif, et on mesure

$$w_{k,0}^s(0) = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (h'(z) - g'(z)) e^{2ikz} dz \quad \forall k \in (0, k_{\max}).$$

\Rightarrow On a $\mathcal{F}(h' - g')(\omega)$ pour tout $\omega \in (0, 2k_{\max})$.

- Le mode $n = 1$ est propagatif si $k > \pi$, et on mesure

$$w_{k,1}^s(0) = \frac{\sqrt{2}k}{2k_1} \int_0^{+\infty} (h'(z) + g'(z)) e^{i(k_1+k)z} dz \quad \forall k \in (\pi, k_{\max}).$$

\Rightarrow On a $\mathcal{F}(h' + g')(\omega)$ pour tout $\omega \in (\pi, k_{\max} + \sqrt{k_{\max}^2 - \pi^2})$.

Inversion du problème

Proposition

Soit f une fonction à support compact, alors $\mathcal{F}(f)$ est analytique.

En particulier, il existe un unique couple de fonctions s_0, s_1 à support dans $(0, r)$ tel que

$$\begin{cases} \mathcal{F}(s_0)(\omega) = \mathcal{F}(h' - g')(\omega) & \forall \omega \in (0, 2k_{\max}), \\ \mathcal{F}(s_1)(\omega) = \mathcal{F}(h' + g')(\omega) & \forall \omega \in (\pi, k_{\max} + \sqrt{k_{\max}^2 - \pi^2}). \end{cases}$$

On peut par exemple le trouver numériquement en cherchant s_0 et s_1 des fonctions en escaliers à support sur $(0, r)$ minimisant

$$\|\mathcal{F}(s_0) - \mathcal{F}(h' - g')\|^2 + \|\mathcal{F}(s_1) - \mathcal{F}(h' + g')\|^2. \quad (9)$$

Stabilité

Question

Est-ce que les reconstructions sont toujours correctes si les mesures sont perturbées ?

Stabilité

Question

Est-ce que les reconstructions sont toujours correctes si les mesures sont perturbées ?

- On pose $s_0 = h' - g'$, $s_1 = h' + g'$ les reconstructions exactes et $d_0 = \mathcal{F}(s_0)$, $d_1 = \mathcal{F}(s_1)$ les données.
- On perturbe les données et on écrit $d_{0_{\text{app}}} = \mathcal{F}(s_{0_{\text{app}}})$ et $d_{1_{\text{app}}} = \mathcal{F}(s_{1_{\text{app}}})$ avec $s_{0_{\text{app}}}, s_{1_{\text{app}}} \in H^1(0, r)$.

Stabilité

Théorème (Stabilité de la reconstruction de s_0 et s_1)

S'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|s_i\|_{H^1} \leq M$ et $\|s_{i_{\text{app}}}\|_{H^1} \leq M$ alors pour tout $\varepsilon < 1$, il existe $\xi_{k_{\text{max}}}$ dépendant de r, M, ε tel que

$$\|s_0 - s_{0_{\text{app}}}\|_{L^2}^2 \leq \frac{4}{\pi} \|d_0 - d_{0_{\text{app}}}\|_{L^2(0, 2k_{\text{max}})}^2, \quad ,$$

$$\|s_1 - s_{1_{\text{app}}}\|_{L^2}^2 \leq \frac{4}{\pi} \|d_1 - d_{1_{\text{app}}}\|_{L^2(\pi, k_{\text{max}} + \sqrt{k_{\text{max}}^2 - \pi^2})}^2$$

.

Stabilité

Théorème (Stabilité de la reconstruction de s_0 et s_1)

S'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|s_i\|_{H^1} \leq M$ et $\|s_{i,\text{app}}\|_{H^1} \leq M$ alors pour tout $\varepsilon < 1$, il existe $\xi_{k_{\max}}$ dépendant de r, M, ε tel que

$$\|s_0 - s_{0,\text{app}}\|_{L^2}^2 \leq \frac{4}{\pi} \|d_0 - d_{0,\text{app}}\|_{L^2(0,2k_{\max})}^2 + \frac{2\pi M^2}{k_{\max}^2},$$

$$\|s_1 - s_{1,\text{app}}\|_{L^2}^2 \leq \frac{4}{\pi} \|d_1 - d_{1,\text{app}}\|_{L^2(\pi, k_{\max} + \sqrt{k_{\max}^2 - \pi^2})}^2 + \frac{8\pi M^2}{(k_{\max} + \sqrt{k_{\max}^2 - \pi^2})^2}.$$

Stabilité

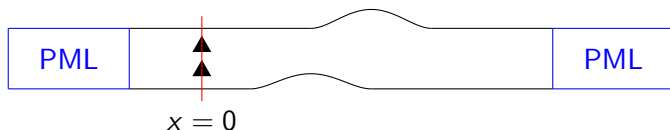
Théorème (Stabilité de la reconstruction de s_0 et s_1)

S'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|s_i\|_{H^1} \leq M$ et $\|s_{i,\text{app}}\|_{H^1} \leq M$ alors pour tout $\varepsilon < 1$, il existe $\xi_{k_{\max}}$ dépendant de r, M, ε tel que

$$\|s_0 - s_{0,\text{app}}\|_{L^2}^2 \leq \frac{4}{\pi} \|d_0 - d_{0,\text{app}}\|_{L^2(0, 2k_{\max})}^2 + \frac{2\pi M^2}{k_{\max}^2},$$

$$\|s_1 - s_{1,\text{app}}\|_{L^2}^2 \leq \frac{4}{\pi} \|d_1 - d_{1,\text{app}}\|_{L^2(\pi, k_{\max} + \sqrt{k_{\max}^2 - \pi^2})}^2 + \frac{8\pi M^2}{(k_{\max} + \sqrt{k_{\max}^2 - \pi^2})^2} + \xi_{k_{\max}} \|d_1 - d_{1,\text{app}}\|_{L^2(\pi, k_{\max} + \sqrt{k_{\max}^2 - \pi^2})}^{2-2\varepsilon}.$$

Génération des données



On résout avec des éléments finis et des PML aux bords l'équation

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u_k^s + k^2 u_k^s = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u_k^s = h'(x) i k e^{ikx} / \sqrt{1 + h'(x)^2} & \text{sur } \partial\Omega_{\text{top}}, \\ \partial_\nu u_k^s = -g'(x) i k e^{ikx} / \sqrt{1 + g'(x)^2} & \text{sur } \partial\Omega_{\text{bot}}, \\ u_k^s \text{ est sortante,} & \end{array} \right.$$

puis on mesure la solution sur la tranche $x = 0$.

Reconstruction de h et g

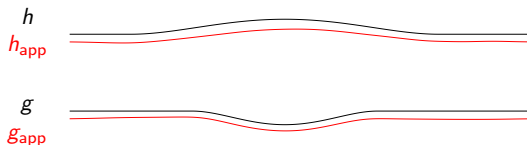


Figure: Reconstruction de deux défauts avec K la discrétisation de $[0.01, 70]$ avec 300 points.

Reconstruction de h et g

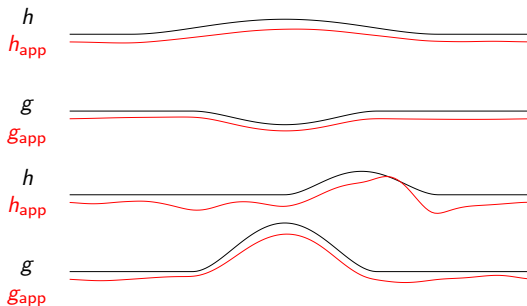
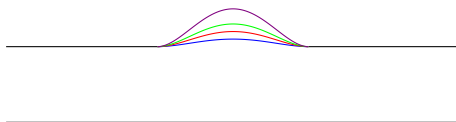


Figure: Reconstruction de deux défauts avec K la discrétisation de $[0.01, 70]$ avec 300 points.

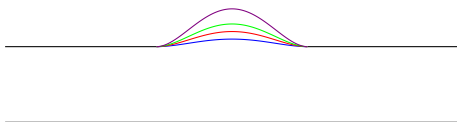
Limites de la méthode

On pose $h(x) = A \mathbf{1}_{3 \leq x \leq 5} (x-3)^2 (5-x)^2$ et $g(x) = 0$, et on fait varier l'amplitude A de h .



Limites de la méthode

On pose $h(x) = A\mathbf{1}_{3 \leq x \leq 5}(x-3)^2(5-x)^2$ et $g(x) = 0$, et on fait varier l'amplitude A de h .



A	0.1	0.2	0.3	0.5
$\ h - h_{\text{app}}\ _{L^2(\mathbb{R})} / \ h\ _{L^2(\mathbb{R})}$	8.82%	10.41%	15.12%	54.99%

Table: Erreur relative de la reconstruction de h pour différentes amplitudes A , avec K la discrétisation de $[0.01, 40]$ avec 100 points.

On a présenté :

- Une méthode multifréquentielle pour reconstruire des enfoncements et bosses dans un guide d'onde,
- La stabilité de cette méthode,
- Des tests numériques pour voir les limites de la méthode.

Perspectives :

- Tester avec des données réelles issues d'expériences physiques,
- Adapter cette méthode pour des guides d'ondes élastiques.