X/k var proj lisse géom. connexe $/k$ parfait $\overline{k}$ = clôture alg.

ℓ premier $\ell \neq p = \mathrm{car}(k)$. $d = \dim(X)$ $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$

$$CH^i(X) = CH_{d-i}(X)$$

$$A_0(X) = \ker\left[CH_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}\right]$$

$$CH^i(X) \longrightarrow H^{2i}_{ct}(X, \mathbb{Z}_\ell(i))$$

$$CH^i(X) \xrightarrow{\text{cyc.}} H^{2i}_{\text{ét}}(X, \mu_n^{\otimes i})$$

$$CH_0(X) \times H^2(X, \mu_n^{\otimes d}) \longrightarrow H^d(k, \mu_n^{\otimes d})$$

$$CH_0(X) \times \mathrm{Br}\, X \longrightarrow \mathrm{Br}\, k.$$

$$A_0(X) \longrightarrow Alb_X(k)$$

Fait Cohen $\left[A_0(X) \longrightarrow Alb_X(k)\right]$ est annulé par un entier $N > 0$ (remarque de Bloch)

Exemples où $A_0(X) \longrightarrow Alb_X(k)$ non surjectif.

p : X ↓ $S-B$ $\mathbb{C}$ courbe

Severi-Brauer $\longleftrightarrow$ $\alpha \in Br(\mathbb{C})$

Supposons $X(k) \neq \emptyset$ ou $\alpha \neq 0 \in Br\mathbb{C}$

$F = k(C)$.

$A_0(X_F) \longrightarrow Alb_X(F)$ n'est pas surjectif

$A_0(X_{\mathbb{R}}) \longrightarrow Alb_X(F)$

$A_0(\mathbb{C}_F) \hookrightarrow Alb_C(F)$ car C courbe

pas surjectif

Dém. η = point générique de C. $p \in X(k)$ ↓ $q \in C(k)$

$\cong$ ↓ p_* ↑ p^* ↑ $\cong$

$A_0(X_\eta) \times Br X \longrightarrow Br F$

$A_0(\mathbb{C}_F) \times Br\mathbb{C} \longrightarrow Br\mathbb{C}$

$(\eta - q)$ $\alpha \mapsto \alpha_{Br\mathbb{C}}(C) \neq 0$

$(Br\mathbb{C} \hookrightarrow Br k(C))$

Thm (Roitman) $k = \bar{k}$ $\quad A_0(X)_{tors} \xrightarrow{\sim} Alb_X(k)_{tors}$.

Thm (Kato–Saito) $k = \mathbb{F}$ $\quad A_0(X) \times \left(H^2(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) / H^2(\mathbb{F}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \right) \longrightarrow H^2(\mathbb{F}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

dualité de gpes finis

$A_0(X) \twoheadrightarrow Alb_X(\mathbb{F})$

$A_0(X_{\bar{\mathbb{F}}}) \xrightarrow{\sim} Alb_X(\bar{\mathbb{F}})$

Conj (Bloch–Beilinson) $k =$ corps de nombres

$A_0(X) \longrightarrow Alb_X(k)$ est un isomorphisme.

$\exists$ exemples (2)

k p-adique

X $\to$ C (SB)

$X(k) \neq \emptyset$

$g(C) \geq 1$

$A_0(X) \twoheadrightarrow Ш_X(k)$

utiliser Analyse du Galois A/k

$A(k) \times H^2(k, \hat{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

(2) /IR.

X

fibre générique sur Severi Brauer

E /IR c. elliptique

$A_0(X) \to A_0(E) = E(\mathbb{R}) \to E(\mathbb{R})/2 = \mathbb{Z}/2$

$\searrow \to 0$

/IR

INJECTIVITÉ ?

Kummer $\mathrm{Pic}X/\ell^n \hookrightarrow H^2(X,\mu_{\ell^n})$ $\varprojlim$ sur n premiers

$\mathrm{Pic}X \otimes \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \varprojlim H^2(X,\mu_{\ell^n})$ pas fonctionnel

injectif

Jannsen $H^i_{cont}(X,\mathbb{Z}_\ell(j))$ si $k/\mathbb{Q}$ t. fini

Question

$$\begin{array}{ccc} CH^i(X)\otimes\mathbb{Z}_\ell & \hookrightarrow & H^{2i}_{cont}(X,\mathbb{Z}_\ell(i)) \\ \text{injectif si } k/\mathbb{Q} \text{ type fini.} & & \end{array}$$

Modèle-Voi

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}X\otimes\mathbb{Z}_\ell & \hookrightarrow & H^2_{cont}(X,\mathbb{Z}_\ell(1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varprojlim \mathrm{Pic}X/\ell^n & \hookrightarrow & \varprojlim H^2(X,\mu_{\ell^n}) \end{array}$$

Déjà pour $CH^2(X)/\ell$ NON !

Scavia & Suzuki 3 contre-ex.

Alexandrov Schreieder 2 contre-ex.

(2) / k corps de nombres $\dim X = 25$.
on $k = \mathbb{F}$.

$$CH^3(X)[2] \hookrightarrow H^6_{cont}(X, \mathbb{Z}_2(3))$$

(2) k corps de nombres $\dim X = 4$.

$$CH^3(X)[2] \hookrightarrow H^6_{cont}(X, \mathbb{Z}_2(3))$$

(3) $k = E(t)$ $X \subset \mathbb{P}^4_k$ $\langle 1, -a_1, -b, ab, f \rangle$
$a, b \in k^*$

corps de nombres totalement imaginaire

$$CH^2(X)[2] \hookrightarrow H^4_{cont}(X, \mathbb{Z}_2(2))$$

AS.

(4) $\forall n \geq 3$ $\forall \ell$

$\Rightarrow X$ $d = \dim X = n$ $X(k) = \emptyset$

/ k type fini / $\mathbb{Q}$.

$$CH^n(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \hookrightarrow H^{2n}_{cont}(X, \mathbb{Z}_\ell(n))$$
$$CH_0(X)$$

(5) k t.f. sur $\mathbb{Q}$

$\dim X = 3$. $X(k) \neq \emptyset$

$$CH^3(X)[2] \hookrightarrow H^6_{cont}(X, \mathbb{Z}_2(3))$$

Théorème (CT + Scavia, en cours).

$\overline{X} \sim \mathbb{P}^2$ bir $\mathbb{R}$.

cd $k = 3$:

Il existe $k = E(t)$ et X/k une surface géométriquement rationnelle

E corps de nombres total. imaginaire

avec $Ch^2(X)[2] \not\hookrightarrow H^3_{cm}(X, \mathbb{Z}_2(1))$.

↑ CT+Scavia

Article de CT+Sansuc en 1977.

X/k $\quad \dim X = d$.

$\mathrm{car}\, k = 0$

Suppose
- $A_0(X_{\bar{k}}) = 0$. $\quad (\Rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0 \ \ i \geq 1)$
- $H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell)_{\mathrm{tors}} = 0 \qquad i = 2, 3, 4.$
- $H^3(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) = 0$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{Pic}\,\bar{X} \otimes \mathbb{Z}_\ell \xrightarrow{\sim} H^2(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))$$

$\cong$ Lefschetz $\qquad$ Sh. Lem

$S_{\mathrm{red}} = \mathrm{Pic}\,\bar{X}$.

1981 — 1986

Bloch
CT, Sansuc
CT, Raskind

(a, b, c)
$\neq 0 \in k, k, k$

$\langle 1, -a, -b, ab, \ldots \rangle$

Suite exacte:

$$H^2(X, \mathbb{Z}_\ell(1)) \to H^2(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))^{\mathcal{G}} \to H^2(\mathcal{G}, \mathbb{Z}_\ell(1)(\bar{k}(X))) \to CH^2(X)_{\mathrm{tors}} \xrightarrow{\mathcal{L}} H^1\big(k, H^2(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))\big)$$

$\|$ B. Kahn 1993

$\|$

$H^2(k, S)$

$$S(k) \to k_4\big(H^3(k, \mathbb{Z}_\ell(2))\big) \to H^3\big(k(X), \mathbb{Z}_\ell(2)\big)$$

$$\mathrm{Pic}\,X \otimes k^* \to (\mathrm{Pic}\,\bar{X} \otimes k^*)^{\mathcal{G}}$$

X/k

X → $\mathbb{P}^1_k$ coniques avec dég. $K = k(\mathbb{P}^1)$ $q = \langle 1, -a, -b, ab \rangle$

$(a,b) \longleftrightarrow X_{a,b}$

$\mathbb{A}^{11}/k(\mathbb{P}^1)$

$$\boxed{\ker \bar{\Phi} = K_q^*/k_q^* \cdot \mathrm{Nrd}(A)}$$

1981 Bloch CT/Sansuc

$k = Q_3(x)$

$\mathbb{Q} \subset Q_3((t))$

$$K_q^* = \{ f \in K^* \mid \text{cf } q \perp -q \in \mathrm{Im}(W(k) \to W(K)) \}$$

$$k_q^* = \{ f \in k^* \mid f \cdot q \perp -q \in I(\quad) \}$$

CTS 1982 ⇒ exemple k tot corps k avec $\mathbb{Q}((t)) \subset k \subset Q_3((t))$