Le problème de la couronne (Corona Problem)

sur un corps ultramétrique complet algébriquement clos

Soit D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ et soit A la $\mathbb{C}$-algèbre de Banach des fonctions holomorphes bornées dans D. Le problème "de la couronne" *corona problem* a été posé par Kakutani en 1941 et résolu par Carleson en 1962: tout idéal maximal de A est dans l'adhérence du domaine D pour la topologie de Gelfand. On peut considérer un problème analogue sur un corps ultramétrique complet algébriquement clos $\mathbb{K}$, en notant D le disque unité "ouvert" et A la $\mathbb{K}$-algèbre de Banach des fonctions analytiques bornées dans D. La difficulté du problème vient des idéaux maximaux de codimension infinie: il n'y a pas de topologie de Gelfand qui ait un sens sur le spectre maximal. Mais on peut considérer le spectre des semi-normes multiplicatives continues muni de la topologie de la convergence simple et conjecturer que les semi-normes multiplicatives continues définies par un point de D est dense dans l'ensemble des semi-normes multiplicatives continues dont le noyau est un idéal maximal. C'est ce qui a été démontré en 2007 quand $\mathbb{K}$ est sphériquement complet. Ici on généralise ce résultat à un corps ultramétrique complet algébriquement clos quelconque, comme par exemple $\mathbb{C}_p$. Le moyen utilisé consiste à montrer que chaque idéal maximal définit une seule semi-norme multiplicative continue et on emploie un outil de calcul fonctionnel holomorphe ultramétrique, mais celui-ci était bloqué par le problème de Lazard sur un corps non sphériquement complet.