Study of the relaxation processes in an homogeneous three-phase flow with two miscible phases

Jean Bussac

LMJL, Université de Nantes

jean.bussac@univ-nantes.fr

Mots clés : modèles homogènes, équilibre thermodynamique, temps de relaxation

Contexte et généralités

- Mélange compressible d'eau liquide (l), de vapeur (v) et d'un gaz inerte (g), avec ces deux dernières phases miscibles.
- Équations d'Euler + équations de transport sur les fractions avec termes sources modélisant l'évolution vers l'équilibre thermodynamique
- $Y = (y_l, \alpha_l, z_l, z_g)$ est le vecteur des fractions de masses, volumes et énergie. La masse gazeuse y_g est constante.
- L'entropie du système est l'entropie hors-équilibre $\sigma(\tau, e, Y) = \sum_{k=l,g,v} y_k s_k(\tau_k, e_k)$, concave en toutes ses variables.

$$\begin{cases} \partial_t(Y) + u\partial_x(Y) = \Gamma \\ \partial_t(y_g) + u\partial_x(y_g) = 0 \\ \partial_t\rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + P) = 0 \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho u E + uP) = 0 \end{cases}.$$

▶ **Généralités sur les termes sources :**

- À un triplet (τ, e, y_g), il doit exister un unique Y_{eq} quadruplet des fractions correspondant à l'équilibre thermodynamique de l'état associé, tel que $\forall Y,\ \sigma(\tau, e, y_g, Y_{eq}) \geq \sigma(\tau, e, y_g, Y)$.
- Γ doit satisfaire la croissance de σ (second principe) qui vérifie l'équation de transport $\partial_t\sigma + u\partial_x\sigma = \Gamma \cdot \nabla_Y\sigma$. Il suffit donc par exemple que Γ vérifie $\Gamma \cdot \nabla_Y\sigma \geq 0$.
- Des échelles de temps $\lambda = (\lambda_i)_{i=1..4}$ peuvent intervenir dans Γ, déterminant la vitesse à laquelle le système est ramené à l'équilibre.

Objectifs

On présente deux types de termes sources $\Gamma_1 = \lambda(Y_{eq} - Y)$ et $\Gamma_2 = \lambda Y(1-Y)\nabla_Y\sigma$: Définition et admissibilité ▶ Résolution de l'EDO associée ▶ Comparaison ▶ Influence sur la convection

Termes sources (1) : $\Gamma_1 = \lambda(Y_{eq} - Y)$.

- Utilisés dans la littérature des modèles homogènes, voir par exemple [3], [1]

✓ Expression simple modélisant un retour exponentiel à l'équilibre

✗ Nécessite de calculer l'équilibre thermodynamique

▶ **Admissibilité :** $\Gamma_1 \cdot \nabla_Y\sigma = \lambda(Y_{eq} - Y) \cdot \nabla_Y\sigma \geq \lambda(\sigma(\tau, e, y_g, Y_{eq}) - \sigma(\tau, e, y_g, Y)) \geq 0$.

✗ Contrainte sur les échelles de temps qui ne peuvent être distinctes.

▶ **Résolution de l'EDO :**

✓ Résolution exacte : $Y(t) = e^{-\lambda t}Y(0) + (1 - e^{-\lambda t})Y_{eq}$

✓ Trajectoires exponentielles décroissantes d'asymptotes $y = Y_{eq}$

✓ Comportement en temps dépendant uniquement de λ

✓ Application à la résolution d'un problème de Riemann à l'équilibre

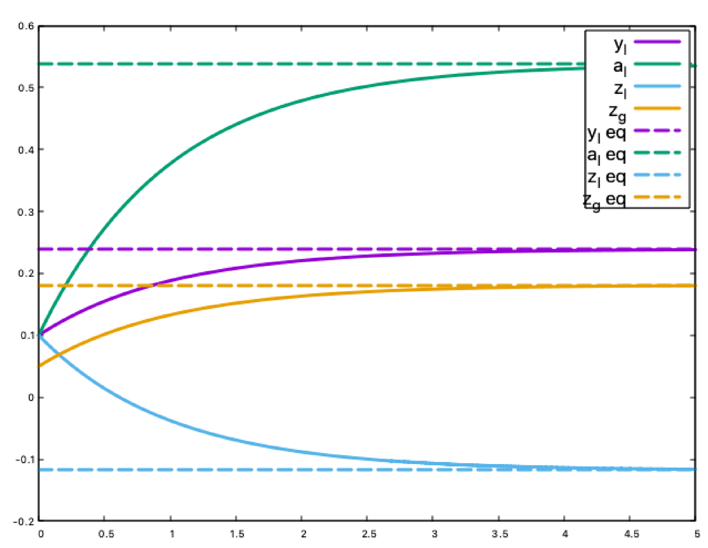

Fig. 1 – Trajectoire type des solutions pour Γ_1.

Termes sources (2) : $\Gamma_2 = \lambda Y(1-Y)\nabla_Y\sigma$.

- Issus des modèles à plusieurs vitesses, présentés en modèles homogènes dans [2].

✗ Expressions complexes, analyse difficile

✓ Pas besoin de calculer l'équilibre

▶ **Définition :** Le domaine de définition de Γ_2 est celui de l'entropie σ : c'est un sous-espace convexe du cube unité en dimension 4.

▶ **Admissibilité :** $\Gamma_2 \cdot \nabla_Y\sigma = (1-Y)\nabla_Y\sigma \cdot \nabla_Y\sigma = \lambda Y(1-Y)||\nabla_Y\sigma||^2 \geq 0$.

✓ Possibilité de considérer des échelles de temps distinctes

▶ **Résolution de l'EDO :**

✗ Résolution exacte non envisageable. On utilise une méthode d'Euler implicite avec un algorithme de Broyden

✓ La multiplication de $\nabla_Y\sigma$ par $Y(1-Y)$ améliore la résolution numérique : trajectoires tangentes aux asymptotes horizontales comme pour Γ_1 (voir Fig. 2)

✗ Trajectoires complexes : non monotones, comportements distincts en temps. Ces derniers dépendent de l'état initial.

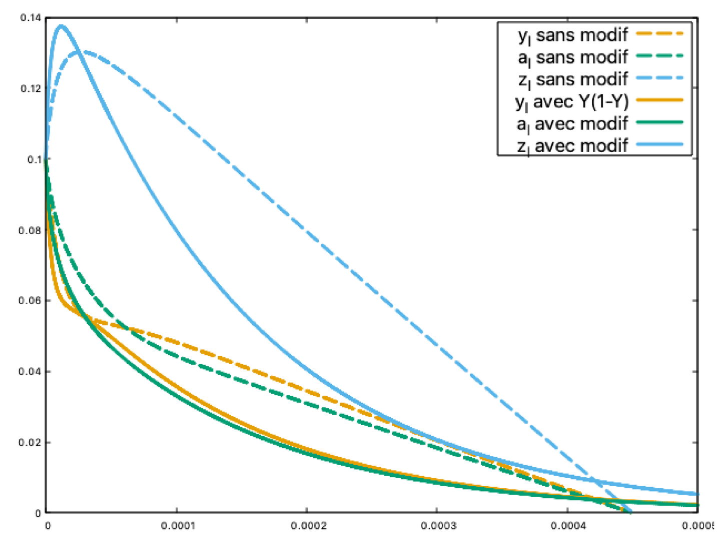

Fig. 2 – Trajectoire des solutions dans un cas de disparition de phase pour Γ_2, avec et sans la modification $Y(1-Y)$.

✍ Une solution asymptotique est un équilibre thermodynamique ($Y \mapsto \sigma(Y)$ concave), mais l'unicité n'est assurée que si la concavité est stricte, point à démontrer.

Bilan

$\Gamma_1 = \lambda(Y_{eq} - Y)$	$\Gamma_2 = \lambda Y(1-Y)\nabla_Y\sigma$
✓ résolution exacte de l'EDO associée pour des échelles de temps figées	✗ Pas de résolution exacte de l'EDO, demande une méthode numérique robuste
✓ trajectoires simples	✗ trajectoires complexes, en particulier non monotones
✗ nécessite le calcul de $Y_{éq}$ qui peut s'avérer laborieux	✓ pas de calcul de $Y_{éq}$
✗ contrainte sur les échelles de temps de relaxation des fractions qui doivent être identiques	✓ possibilité de considérer des échelles de temps de relaxation distinctes selon les fractions

Couplage avec la convection : illustration sur un problème de Riemann

- Problème de Riemann contact + choc à pression atmosphérique pour 3 gaz raides
- Méthode à pas fractionnaire avec un schéma de relaxations pour la partie convective
- But : vérifier les évolutions des états constants et observer les conséquences sur les discontinuités
- Les équilibres représentés correspondent aux deux états constants

Couplage avec les termes sources (1)

✓ Monotonie des trajectoires retrouvée

✓ Profils simples, même autour du contact

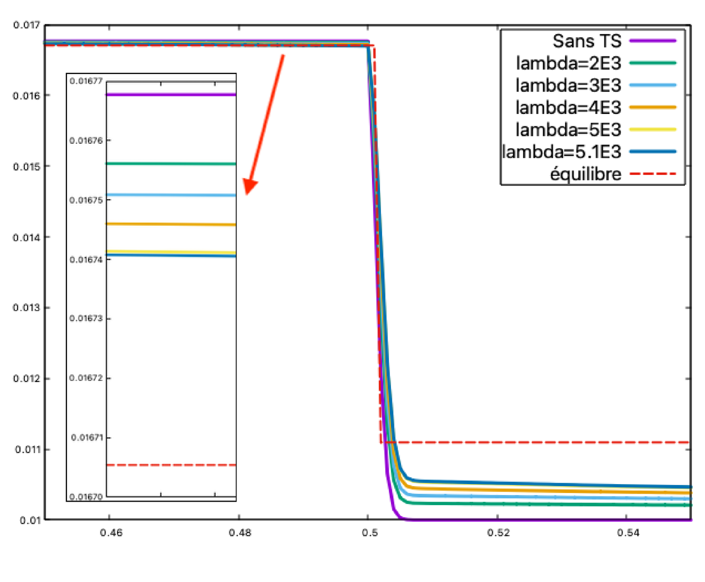

Fig. 3 – Fraction de volume liquide α : Influence du terme source Γ_1 sur la convection pour différentes échelles de temps λ.

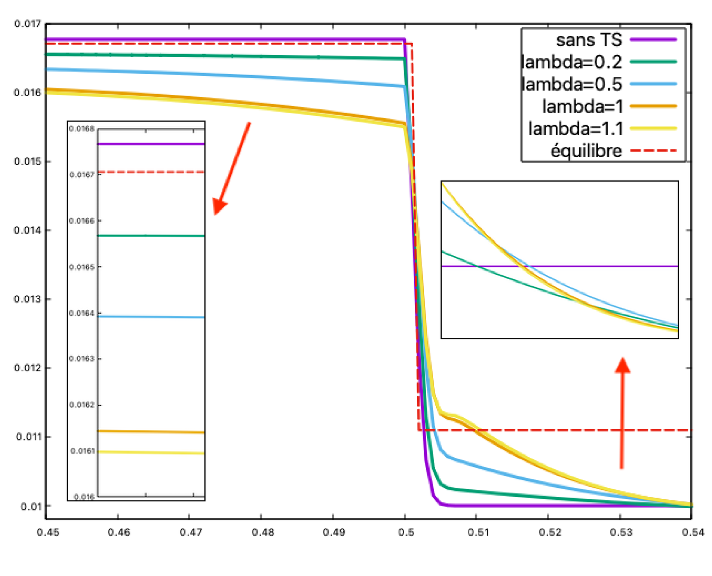

Fig. 4 – Fraction de volume liquide α : Influence du terme source Γ_2 sur la convection pour différentes échelles de temps λ.

Couplage avec les termes sources (2)

— Non monotonie des trajectoires retrouvée :

✓ Sur l'état gauche où α s'éloigne de α_{eq} : il faudrait augmenter λ ou le temps final pour voir la convergence vers α_{eq}

✓ Sur l'état droit où les courbes se croisent

✓ Comportement plus complexe autour du contact

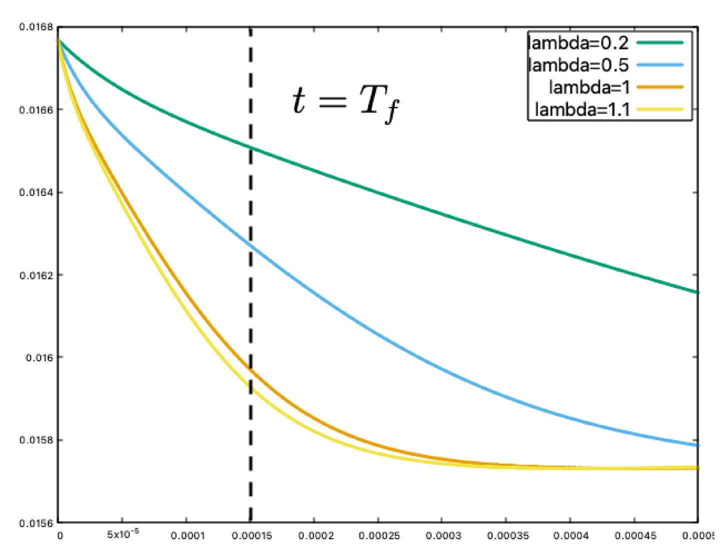

Fig. 5 – Trajectoires de la fraction de volume liquide α de l'état gauche selon les échelles de temps λ choisies pour la figure (4), tracée au temps T_f.

Remarques générales sur le couplage

✓ On retrouve les états obtenus par le schéma à pas fractionnaire à l'instant T_f (figure ci-contre)

✗ Résolution limitée en temps : apparition d'états non admissibles au niveau du contact

✍ Problèmes de Riemann permet une première observation et comparaison mais n'est pas le plus adapté

Références

[1] O. Hurisse. Application of an homogeneous model to simulate the heating of two-phase flows. *Int. J. Finite Vol.*, 66 :37, 2014.

[2] Hélène Mathis. A thermodynamically consistent model of a liquid-vapor fluid with a gas. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 53(1) :63–84, 2019.

[3] Lucie Quibel. *Simulation of water-vapor two-phase flows with non-condensable gas*. PhD thesis, Université de Strasbourg, 2020.

Conclusions et perspectives

- Termes sources complémentaires : une bonne analyse du second permettrait de pallier les limites du premier
- Couplage avec la partie convective à observer sur un test SUPERCANON
- Étude de Γ_2 en cours sur le modèle diphasique, pour produire des résultats théoriques clairs : plus simple et plus visuel car système d'EDO en dimension 3