Dear Dirk
Happy
Celebration
of 60th
Congratulation
for your
great discoveries
Alain

It is a great occasion for me to pay tribute to Dirk whose encounter was a key turning point in my understanding!

I have always been fascinated by the courage with which physicists handle seemingly intractable mathematical problems.

(1906) Einstein: the energy of an oscillator can take only those values that are integer multiples of $h\nu$

$\sim$

(1925) Born, Heisenberg, Jordan

+

Dirac

$\Downarrow$

Second Quantization

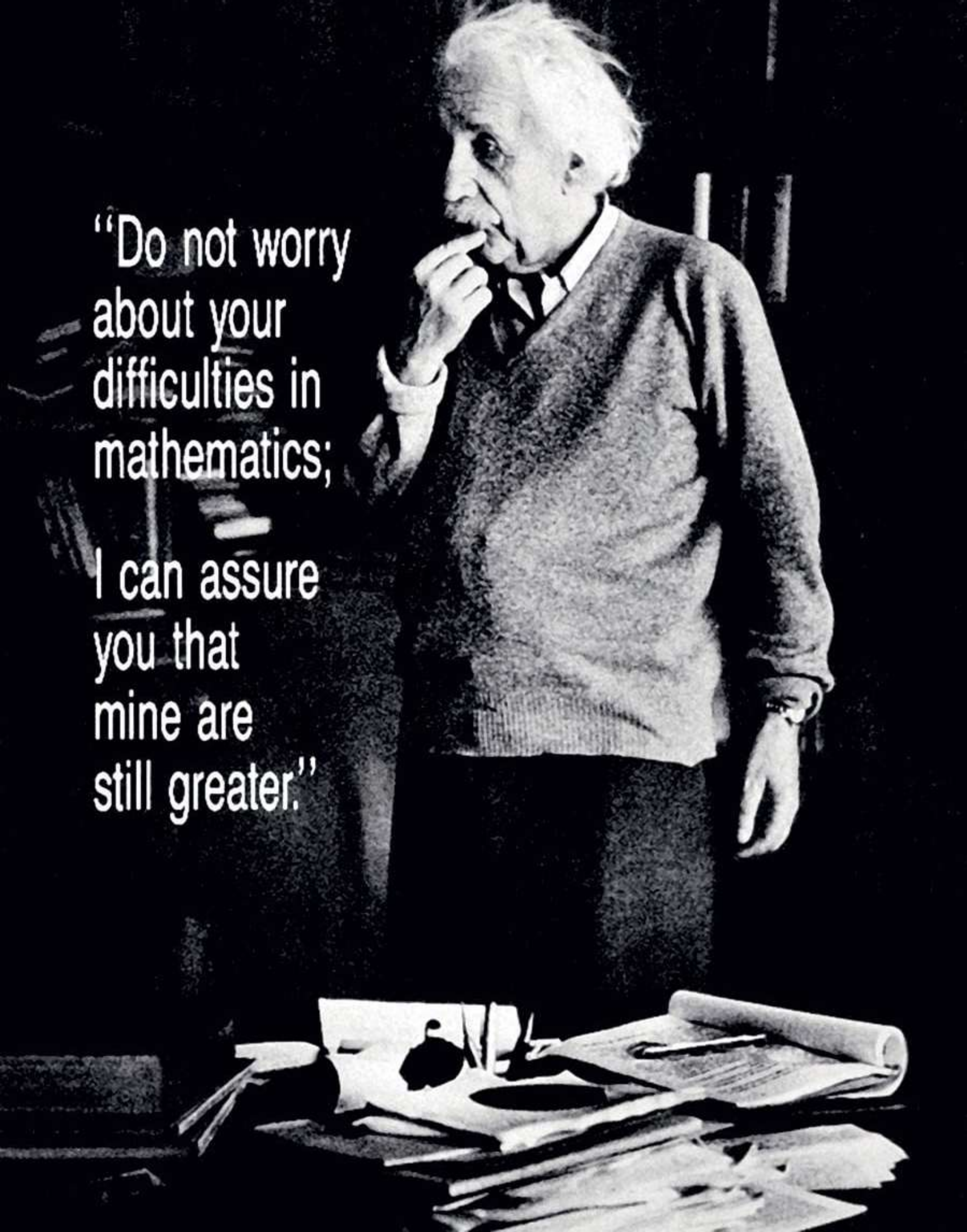
$[a, a^*] = 1$

$\Downarrow$

$\operatorname{Spec} a^* a = \mathbb{N}$

Set of positive integers

Gives proof of coefficients A and B of Einstein


"Do not worry
about your
difficulties in
mathematics;
I can assure
you that
mine are
still greater."

Théorie des champs perturbative

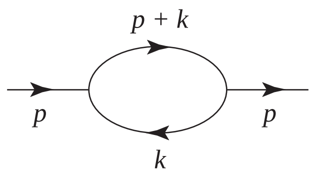
L'Amplitude de probabilité d'une configuration classique A est donnée par la formule de Dirac et Feynman

$$e^{i\,\frac{S(A)}{\hbar}}\,, \quad S(A) = \int \mathcal{L}\,(A)\,d^4x$$

On passe en Euclidien

$$Z(J_E) = \mathcal{N} \int \exp\left(-\frac{S(\phi_E) - \langle J_E, \phi_E\rangle}{\hbar}\right)\,\mathcal{D}[\phi_E]$$

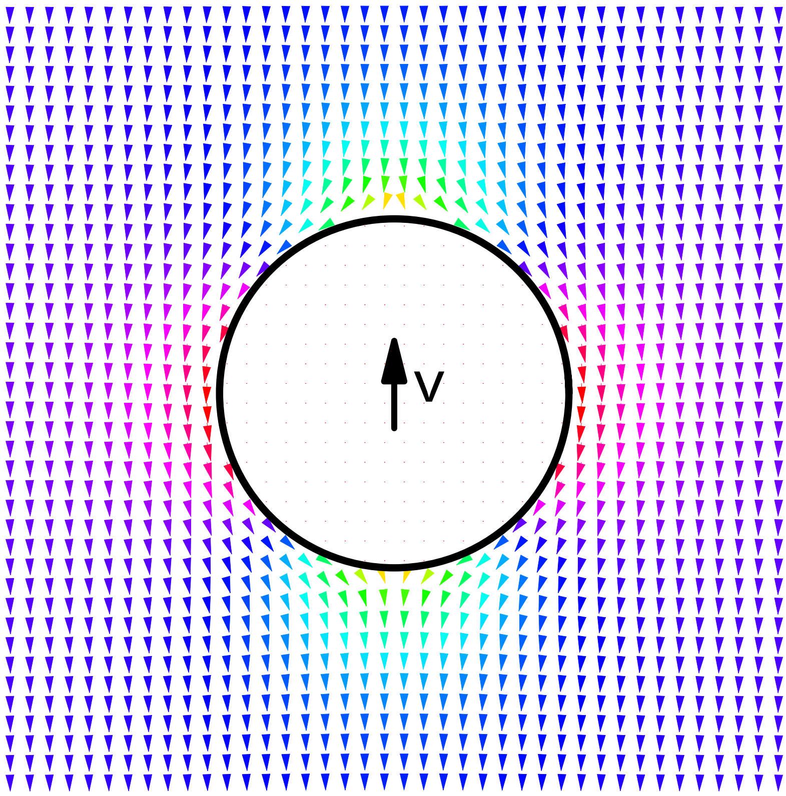
Développement perturbatif donne des intégrales divergentes indexées par des graphes de Feynman Γ



$$=$$

$$\int \frac{1}{k^2 + m^2}\,\frac{1}{((p+k)^2 + m^2)}\,d^D k$$

<u>Renormalisation</u>



Green 1830

$$F = m\,a$$

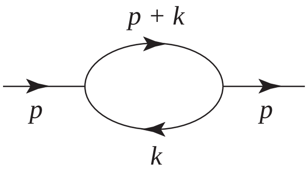
$$m \to m + \tfrac{1}{2}M$$

Dim-Reg

La formule de base

$$\int e^{-\lambda q^2} d^D q = \pi^{D/2} \lambda^{-D/2}$$

Exemple :



$$\to \int \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{((p+k)^2 + m^2)} \, d^D k.$$

$$\frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{(p+k)^2 + m^2} =$$

$$\int_{s>0,\, t>0} e^{-s(k^2+m^2) - t((p+k)^2+m^2)} \, ds \, dt.$$

Dim-Reg, exemple

On diagonalise la forme quadratique $-Q(k)$ en exposant, avec $s=(1-x)\lambda$, $t=x\,\lambda$,

$$-Q(k)=-\lambda\,((k+xp)^2+((x-x^2)p^2+m^2)),$$

On obtient en posant $q=k+xp$,

$$\int_0^1\int_0^\infty e^{-(\lambda(x-x^2)p^2+\lambda\,m^2)}\int e^{-\lambda\,q^2}\,d^Dq\;\lambda\,d\lambda\;dx$$

$$=\pi^{D/2}\int_0^1\int_0^\infty e^{-(\lambda(x-x^2)p^2+\lambda\,m^2)}\,\lambda^{-D/2}\,\lambda\,d\lambda\,dx$$

$$=\pi^{D/2}\,\Gamma(2-D/2)\int_0^1((x-x^2)p^2+m^2)^{D/2-2}\,dx.$$

Soustraction–Minimale (MS)

Préparation

On prépare d'abord un graphe Γ, en remplaçant la valeur non-renormalisée $U(\Gamma)$ par

$$\overline{R}(\Gamma) = U(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma) U(\Gamma/\gamma)$$

Contre-termes

$$C(\Gamma) = -T(\overline{R}(\Gamma)) =$$

$$-T\left(U(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma) U(\Gamma/\gamma)\right)$$

Valeur renormalisée

$$R(\Gamma) = \overline{R}(\Gamma) + C(\Gamma) =$$

$$U(\Gamma) + C(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma) U(\Gamma/\gamma)$$

Algèbre de Hopf des graphes

(Dirk Kreimer $\to$ arbres, ac + dk $\to$ graphes)

Comme algèbre, $\mathcal{H}$ est l'algèbre commutative libre engendrée par les graphes 1PI.

Le **coproduit**

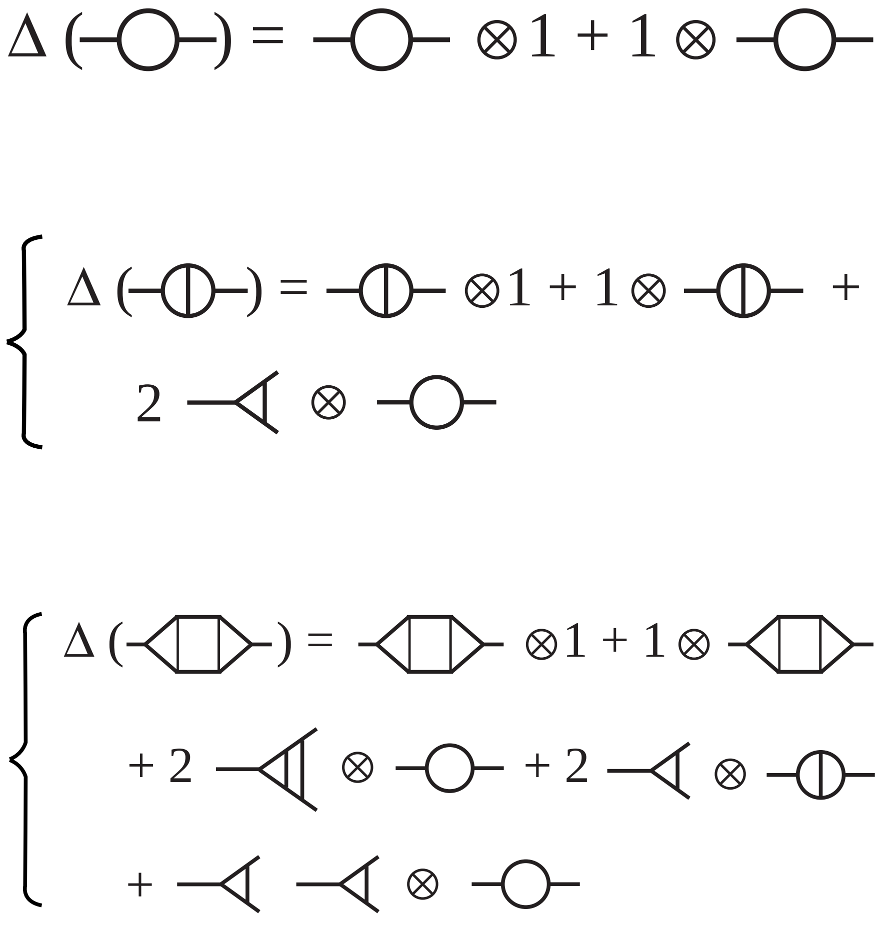
$$\Delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$$

est spécifié sur les graphes **1PI** par

$$\Delta\Gamma = \Gamma \otimes 1 + 1 \otimes \Gamma + \sum_{\gamma \subset \Gamma} \gamma_{(i)} \otimes \Gamma/\gamma_{(i)}$$

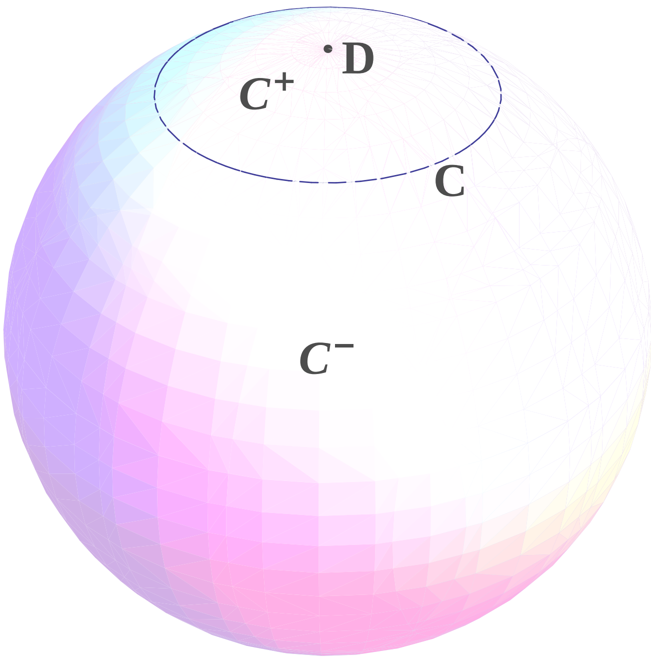
Ici γ est un sous-ensemble non-trivial $\gamma \subset \tilde{\Gamma}$.

<u>Coproduit</u>



Fibrés sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

$$\gamma(z) = \gamma_-(z)^{-1}\gamma_+(z) \qquad z \in C$$



Décomposition de Birkhoff

Théorème (ac+dk)

Soit $\phi : \mathcal{H} \to K = \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$ un homomorphisme d'algèbre. La décomposition de Birkhoff du lacet correspondant est donnée par recurrence par

$$\phi_-(X) = -T\left(\phi(X) + \sum \phi_-(X')\phi(X'')\right)$$

et

$$\phi_+(X) = \phi(X) + \phi_-(X) + \sum \phi_-(X')\phi(X'').$$

Cela coincide avec le procédé récursif de MS !

$$\phi = U,\ \phi_- = C,\ \text{et}\ \phi_+ = R$$

$\Rightarrow$ compréhension conceptuelle du procédé récursif des physiciens

1. Il existe une unique application méromorphe $\gamma(z) \in G = \mathrm{Hom}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$, pour $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, de coordonnées $U(\Gamma)_{d=D-z}$.
2. La valeur renormalisée d'une observable est obtenue (pour Dim-Reg + MS) en remplaçant $\gamma(0)$ par $\gamma_+(0)$, où

$$\gamma(z) = \gamma_-(z)^{-1}\, \gamma_+(z)$$

   est la décomposition de Birkhoff du lacet $\gamma(z)$ autour d'un cercle infinitésimal centré en $z = 0$.

Action sur les constantes de couplage

$$G \xrightarrow{\rho} \mathsf{Diff}_{\mathbb{C}}$$

$$\left(g + \sum \quad g^{2\ell+1} \frac{\Gamma}{S(\Gamma)}\right) \left(1 - \sum \quad g^{2\ell} \frac{\Gamma}{S(\Gamma)}\right)^{-3/2}$$

Corollaire

Considérons la constante de couplage effective nonrenormalisée $g_{\mathsf{eff}}(\varepsilon)$ comme une série formelle en g et soit

$$g_{\mathsf{eff}}(\varepsilon) = g_{\mathsf{eff}_+}(\varepsilon)\,(g_{\mathsf{eff}_-}(\varepsilon))^{-1}$$

sa décomposition de Birkhoff (opposée) dans le groupe des difféomorphismes formels. Alors le lacet $g_{\mathsf{eff}_-}(\varepsilon)$ est la constante de couplage nue et $g_{\mathsf{eff}_+}(0)$ la constante de couplage renormalisée.

Groupe de renormalisation

L'analyse dimensionnelle introduit un paramètre de masse,

$$d^{D-z}k \mapsto \mu^z \; d^{D-z}k$$

La graduation par le nombre de boucles donne les automorphismes θ_t,

$$\gamma_{e^t\mu}(z) = \theta_{tz}(\gamma_\mu(z)) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}\,, \;\; z = D - d$$

Le γ_{μ^-} de la décomposition de Birkhoff

$$\gamma_\mu(z) = \gamma_{\mu^-}(z)^{-1}\, \gamma_{\mu^+}(z)$$

est **indépendant** de μ, $\frac{\partial}{\partial\mu}\gamma_{\mu^-}(z) = 0$. La limite

$$F_t = \lim_{z\to 0} \gamma_-(z)\, \theta_{tz}(\gamma_-(z)^{-1})$$

définit un sous-groupe à un paramètre de $G(\mathbb{C})$.

$$\gamma_{e^t\mu^+}(0) = F_t\, \gamma_{\mu^+}(0)\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\gamma_-(z) = \lim_{t\to\infty} e^{-t\left(\frac{\beta}{z}+Z_0\right)}\, e^{tZ_0}$$

Connections plates équisingulières

(ac + M. Marcolli)

Une connexion plate ω définie sur $B^* = B \backslash V$, $B = \Delta \times \mathbb{G}_m$, $V = \{0\} \times \mathbb{G}_m$, est *équisingulière* si elle est invariante par $\mathbb{G}_m$ et si la classe d'équivalence de sa restriction à une section $\sigma : \Delta \mapsto B$ ne dépend que de $\sigma(0)$.

Théorème

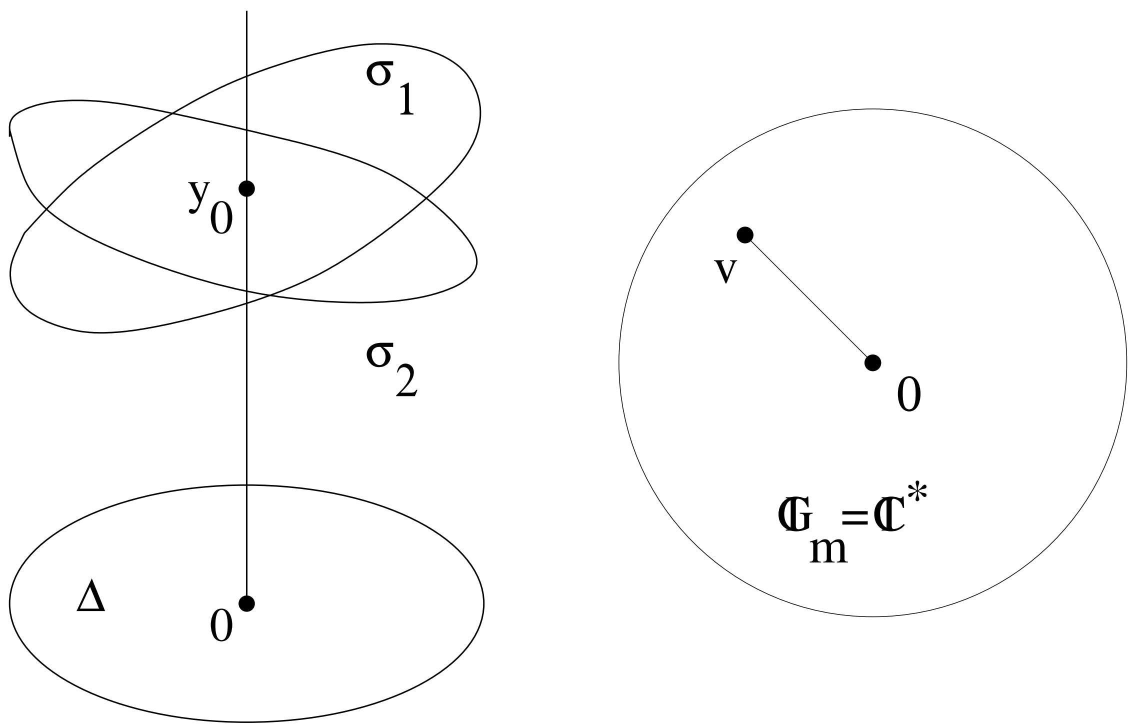
La catégorie des fibrés plats équisinguliers est équivalente à la catégorie des représentations de dimension finie d'un groupe algébrique affine U^*. Ce groupe est le produit semi-direct par $\mathbb{G}_m$ (agissant par la graduation) du groupe pro-unipotent U dont l'algèbre de Lie

$$\mathrm{Lie}(U) = \mathcal{F}(1, 2, 3, \cdots).$$

est librement engendrée par un générateur e_{-n} de degré n pour tout entier $n \geq 1$.

Space B : $\mathrm{Dim}_{\mathbb{C}}\ B = 2$

Complex Dimensions $\times$ **Normalization**



Irregular Singularities, Ramis.

Expansional

Given a $\mathbf{g}(\mathbb{C})$-valued smooth function $\alpha(t)$, with $t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$, the time-ordered exponential (also called the expansional) is defined as

$$\mathrm{T}e^{\int_a^b \alpha(t)\,dt} :=$$

$$1 + \sum_1^\infty \int_{a \le s_1 \le \cdots \le s_n \le b} \alpha(s_1) \cdots \alpha(s_n)\; ds_1 \cdots ds_n\,,$$

with the product taken in $\mathcal{H}^\vee$, and with $1 \in \mathcal{H}^\vee$ the unit corresponding to the counit ε of $\mathcal{H}$.

Morphism $\mathbf{rg} : \mathbb{G}_a \to \mathbb{U}$,

The sum

$$e = \sum_{1}^{\infty} e_{-n}\,, \tag{1}$$

defines an element of the Lie algebra $\mathcal{L}_{\mathbb{U}}$ of $\mathbb{U}$. Since $\mathbb{U}$ is by construction a pro-unipotent affine group scheme we can lift e to a morphism

$$\mathbf{rg} : \mathbb{G}_a \to \mathbb{U}\,, \tag{2}$$

of affine group schemes from the additive group $\mathbb{G}_a$ to $\mathbb{U}$.

Universal Singular Frame

$$\gamma_U(z,v) = \mathrm{T}\mathbf{e}^{-\frac{1}{z}\int_0^v u^{Y}(e)\frac{du}{u}} \in U$$

$$\gamma_U(z,v) = \sum_{n\geq 0} \sum_{k_j>0}$$

$$\frac{e(-k_1)e(-k_2)\cdots e(-k_n)}{k_1\,(k_1+k_2)\cdots(k_1+k_2+\cdots+k_n)}\, v^{\sum k_j}\, z^{-n}$$

Same coefficients as in

Local Index Formula in NCG (ac + hm)

Let G be a pro-unipotent affine group dual to a graded connected commutative Hopf algebra $\mathcal{H} = \oplus_{n \geq 0} \mathcal{H}_n$, with finite-dimensional $\mathcal{H}_n$.

1. There exists a canonical bijection between equivalence classes of flat equisingular connections and graded representations $\mathbb{U} \to G$, or equivalently representations

$$\rho : \mathbb{U}^* \to G^* = G \rtimes \mathbb{G}_m, \qquad (3)$$

which are the identity on $\mathbb{G}_m$.

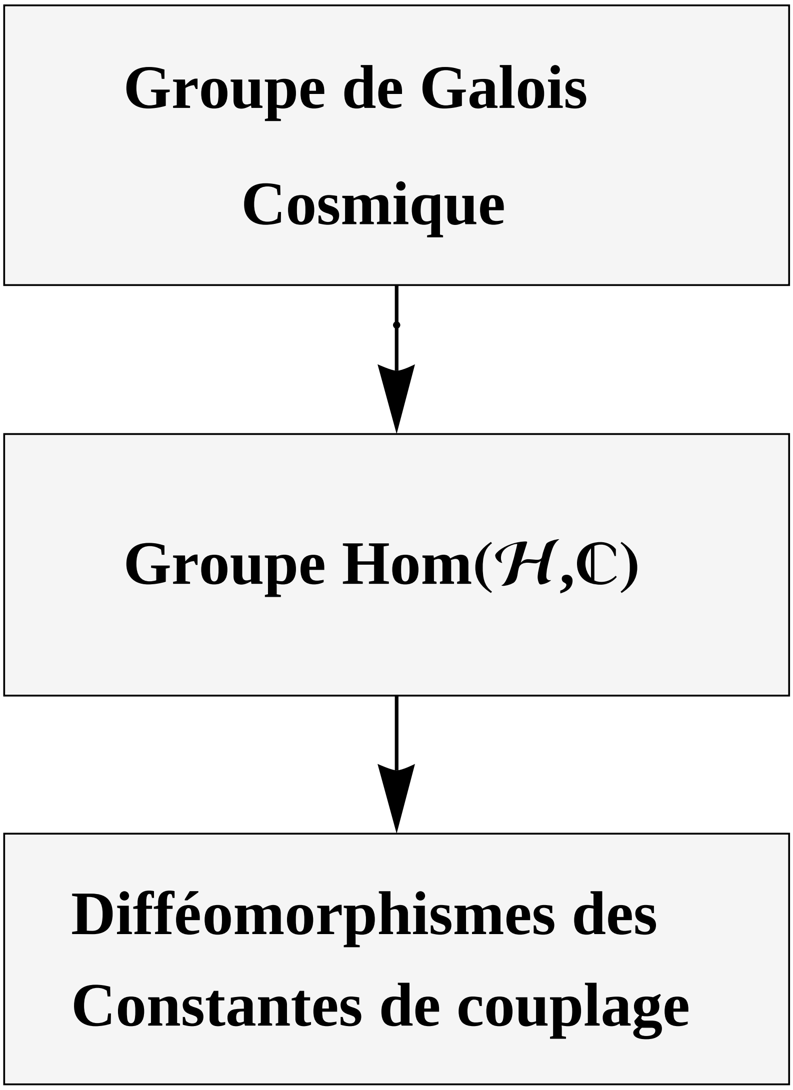
2. The universal singular frame $\gamma_{\mathbb{U}}$ provides universal counterterms. Namely, given a loop $\gamma_\mu \in L(G(\mathbb{C}), \mu)$, the universal singular frame maps to $\gamma_-(z)$ under the representation ρ.

3. The renormalization group F_t in $G(\mathbb{C})$ is obtained as the composite $\rho \circ \mathbf{rg}$, with ρ as in (3) and $\mathbf{rg} : \mathbb{G}_a \to \mathbb{U}$ as in (2).

Groupe de Galois cosmique

"La parenté de plus en plus manifeste entre le groupe de Grothendieck–Teichmüller d'une part, et le groupe de renormalisation de la Théorie Quantique des Champs n'est sans doute que la première manifestation d'un groupe de symétrie des constantes fondamentales de la physique, une espèce de groupe de Galois cosmique !"

Pierre Cartier


Groupe de Galois
Cosmique
Groupe Hom($\mathcal{H}$,$\mathbb{C}$)
Difféomorphismes des
Constantes de couplage

Exposé de clôture, Galois

Galois est un exemple rare, peut-être seulement égalé par certains poètes ou musiciens, d'un créateur qui, lors du 200-ème anniversaire de sa naissance nous paraisse toujours aussi jeune et fringant. En fait on peut arguer que sa théorie de l'ambiguïté, fruit de ses pensées mathématiques, est comme un animal sauvage qui n'a toujours pas été vraiment capturé par le formalisme moderne. Contraste saisissant entre le petit nombre de pages manuscrites que Galois a laissé à sa mort et leur éclatante influence sur les mathématiques.

Ainsi la fonction

$$(X_1 - X)(X_a - X) X_{a^2} - X)\ldots$$

devra, quel que soit X, être connue.

Il *faut* donc et il *suffit* que l'équation qui donne cette fonction des racines admette, quel que soit X, une valeur rationnelle.

Si l'équation proposée a tous ses coefficients rationnels, l'équation auxiliaire qui donne cette fonction les aura tous aussi, et il suffira de reconnaître si cette équation auxiliaire du degré $1.2.3\ldots(n-2)$ a ou non une racine rationnelle, ce que l'on sait faire.

C'est là le moyen qu'il faudrait employer dans la pratique. Mais nous allons présenter le théorème sous une autre forme.

PROPOSITION VIII.

Théorème. « Pour qu'une équation irréductible de degré premier » soit soluble par radicaux, il *faut* et il *suffit* que deux quelconques » des racines étant connues, les autres s'en déduisent rationnelle- » ment. »

Premièrement, il le faut, car la substitution

$$x_k, \quad x_{ak+b}$$

ne laissant jamais deux lettres à la même place, il est clair qu'en adjoignant deux racines à l'équation, par la proposition IV, son groupe devra se réduire à une seule permutation.

En second lieu, cela suffit; car, dans ce cas, aucune substitution du groupe ne laissera deux lettres aux mêmes places. Par conséquent, le groupe contiendra tout au plus $n(n-1)$ permutations. Donc il ne contiendra qu'une seule substitution circulaire (sans quoi il y aurait au moins n^2 permutations). Donc toute substitution du groupe, x_k, x_{fk}, devra satisfaire à la condition

$$f(k+c) = fk + C,$$

Donc, etc.

Le théorème est donc démontré.

présenter par i la racine de cette équation, en sorte que

$$(i) \qquad i^3 - i + 2 = 0,$$

et l'on aura toutes les imaginaires de la forme

$$a + a_1 i + a_2 i^2,$$

en élevant i à toutes les puissances, et réduisant par l'équation (i).

Le principal avantage de la nouvelle théorie que nous venons d'exposer est de ramener les congruences à la propriété (si utile dans les équations ordinaires) d'admettre précisément autant de racines qu'il y a d'unités dans l'ordre de leur degré.

La méthode pour avoir toutes ces racines sera très-simple. Premièrement on pourra toujours préparer la congruence donnée $Fx = 0$, de manière à ce qu'elle n'ait plus de racines égales, ou, en d'autres termes, à ce qu'elle n'ait plus de facteur commun avec $F'x = 0$, et le moyen de le faire est évidemment le même que pour les équations ordinaires.

Ensuite, pour avoir les solutions entières, il suffira, ainsi que M. Libri paraît en avoir fait le premier la remarque, de chercher le plus grand facteur commun à $Fx = 0$ et à $x^{p-1} = 1$.

Si maintenant on veut avoir les solutions imaginaires du second degré, on cherchera le plus grand facteur commun à $Fx = 0$ et à $x^{p^2-1} = 1$, et, en général, les solutions de l'ordre ν seront données par le plus grand commun diviseur à $Fx = 0$ et à $x^{p^\nu - 1} = 1$.

C'est surtout dans la théorie des permutations, où l'on a sans cesse besoin de varier la forme des indices, que la considération des racines imaginaires des congruences paraît indispensable. Elle donne un moyen simple et facile de reconnaître dans quel cas une équation primitive est soluble par radicaux, comme je vais essayer d'en donner en deux mots une idée.

Soit une équation algébrique $fx = 0$ de degré p^ν; supposons que les p^ν racines soient désignées par x_k, en donnant à l'indice k les p^ν valeurs déterminées par la congruence $k^{p^\nu} = k$ (mod. p).

Prenons une fonction quelconque rationnelle V des p^ν racines x_k. Transformons cette fonction en substituant partout à l'indice k l'indice $(ak+b)^{p^r}$, a, b, r étant des constantes arbitraires satisfaisant aux conditions de $a^{p^\nu-1}=1$, $b^{p^\nu}=b$ (mod. p) et de r entier.

En donnant aux constantes a, b, r toutes les valeurs dont elles sont susceptibles, on obtiendra en tout $p^\nu(p^\nu-1)\nu$ manières de permuter les racines entre elles par des substitutions de la forme $[x_k, x_{(ak+b)^{p^r}}]$, et la fonction V admettra en général par ces substitutions $p^\nu(p^\nu-1)\nu$ formes différentes.

Admettons maintenant que l'équation proposée $fx=0$ soit telle, que toute fonction des racines invariable par les $p^\nu(p^\nu-1)\nu$ permutations que nous venons de construire, ait pour cela même une valeur numérique rationnelle.

On remarque que, dans ces circonstances, l'équation $fx=0$ sera soluble par radicaux, et, pour parvenir à cette conséquence, il suffit d'observer que la valeur substituée à k, dans chaque indice, peut se mettre sous les trois formes

$$(ak+b)^{p^r}=[a(k+b')]^{p^r}=a'k^{p^r}+b''=a'(k+b')^{p^r}.$$

Les personnes habituées à la théorie des équations le verront sans peine.

Cette remarque aurait peu d'importance si je n'étais parvenu à démontrer que, réciproquement, une équation primitive ne saurait être soluble par radicaux, à moins de satisfaire aux conditions que je viens d'énoncer. (J'excepte les équations du neuvième et du vingt-cinquième degré.)

Ainsi, pour chaque nombre de la forme p^ν, on pourra former un groupe de permutations tel, que toute fonction des racines invariable par ces permutations devra admettre une valeur rationnelle quand l'équation de degré p_ν sera primitive et soluble par radicaux.

D'ailleurs, il n'y a que les équations d'un pareil degré p^ν qui soient à la fois primitives et solubles par radicaux.

Le théorème général que je viens d'énoncer précise et développe les conditions que j'avais données dans le *Bulletin* du mois d'avril. Il indique le moyen de former une fonction des racines dont la valeur sera rationnelle, toutes les fois que l'équation primitive de degré p^ν sera soluble par radicaux, et mène, par conséquent, aux caractères de réso-

Dim-Reg

The spaces X_z of dimension z (ac + mm)

make sense in NCG (as type II)

The t'Hooft-Veltman and Breitenlohner-Maison prescription corresponds to taking the product of the standard geometry of (Euclidean) space-time by a very specific spectral triple X_z of dimension $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) > 0$

$$\mathcal{H}'' = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}' \,, \quad D'' = D \otimes 1 + \gamma_5 \otimes D' \,.$$

Dimension spectrum of X_z is reduced to the complex number z.

Spectral triple whose $D' = D_z$ fulfills

$$\mathrm{Trace}(e^{-\lambda D^2}) = \pi^{z/2} \lambda^{-z/2} \,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^* \,.$$

Propagator = ds $\to$ Fermionic Action

Bosonic Action = Spectral Action
(ac + A. Chamseddine)

— It only depends upon the spectrum of D.
— It is additive for direct sums of noncommutative geometries.

It is given in general by the expression

$$\mathrm{Trace}\,(f(D/\Lambda))$$

where f is a positive even function of the real variable and the parameter Λ fixes the mass scale.

Spectral action

The spectral action can be expanded in decreasing powers of the scale Λ in the form

$$\mathrm{Trace}\,(f(D/\Lambda)) \sim$$

$$\sum_{k \in \Pi^+} f_k \, \Lambda^k \fint |D|^{-k} + f(0)\, \zeta_D(0) + o(1)$$

where Π^+ is the positive part of the dimension spectrum Π. The function f only appears through the scalars

$$f_k = \int_0^\infty f(v)\, v^{k-1}\, dv$$

One lets

$$\zeta_D(s) = \mathrm{Tr}\,(|D|^{-s})$$

and regularity at $s = 0$ is assumed.

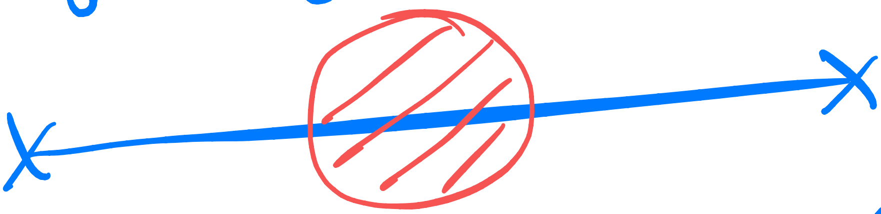
— In dimension ≤ 4 the variation of the spectral action under inner fluctuations gives the local counterterms for the fermionic graphs

$$\zeta_{D+A}(0) - \zeta_D(0) = -⨍ AD^{-1} + \frac{1}{2}⨍ (AD^{-1})^2 - \frac{1}{3}⨍ (AD^{-1})^3 + \frac{1}{4}⨍ (AD^{-1})^4$$

— Assuming that the tadpole graph vanishes the above variation is the sum of a Yang-Mills action and a Chern-Simons action relative to a cyclic 3-cocycle on the algebra $\mathcal{A}$.

I shall end my talk with two questions:

① the spectral paradigm of NCG allows one to take into account the quantum corrections of the geometry at "1 particle level"



Question What is the math formalism to take into account the n particle level?
Dual to algebraic K theory?

(Remember duality
KO homology $\Leftrightarrow$ KO theory
$\Downarrow$
Higher Heisenberg relations)

2) Geometric meaning of DimReg?

$$\mathbb{G}_m \to B \xrightarrow{\pi} \Delta$$ Disk in $\mathbb{C}$

$\pi^{-1}(z) = \{$Possible values of $\mu^z \hbar\}$

DimReg can be understood as far as one loop Fermionic graphs are concerned as an actual NC geometry in complex dimension $D-z$ - This is based on the Breitenlohner - Maison prescription for the compatibility of DimReg with chiral symmetry

Géométrie du point de vue spectral

Es muss also entweder das dem Raume zu Grunde liegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Massverhältnisse ausserhalb, in darauf wirkenden bindenen Kräften, gesucht werden.

Il faut donc, que la réalité sur laquelle est fondé l'espace forme une variété discrète, ou que le fondement des rapports métriques soit cherché en dehors de lui, dans les forces de liaison qui agissent en lui.