Sur les déformations des germes de courbes algébriques réelles

Roberto Castellini

Université de Lille I

11/09/2014

Définitions de base

Définition

Un **germe de courbe réelle** *est l'ensemble de zéros défini dans un voisinage de* $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ *par* $f_1 \cdots f_r = 0$*, où* $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{R}\{\{x, y\}\}$ *sont irréductibles, deux à deux premiers entre eux et changeant de signe dans des voisinages arbitrairement petits de l'origine.*
Une telle courbe est **irréductible** *si et seulement si* $r = 1$.
Le point $O = (0,0)$ *est un* **point singulier** *de* C *si et seulement si* $df(0,0) = (0,0)$.

Définitions de base

Définition

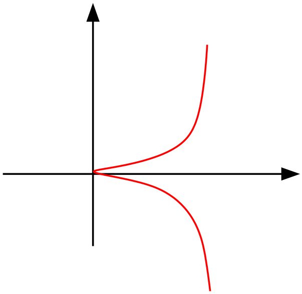
Un **germe de courbe réelle** *est l'ensemble de zéros défini dans un voisinage de* $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ *par* $f_1 \cdots f_r = 0$*, où* $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{R}\{\{x, y\}\}$ *sont irréductibles, deux à deux premiers entre eux et changeant de signe dans des voisinages arbitrairement petits de l'origine.*
Une telle courbe est **irréductible** *si et seulement si* $r = 1$*.*
Le point $O = (0,0)$ *est un* **point singulier** *de* C *si et seulement si* $df(0,0) = (0,0)$*.*

Remarque

Par définition on ne considère pas de polynômes comme $x^2 + y^2 = 0$*.*

Exemple

Une courbe donnée par $x^m = y^n$, (n,m)=1 et $n > 1$, $m > 1$ est telle que le point (0,0) est une singularité.
L'exemple le plus simple est la cuspe, ayant équation $x^3 = y^2$.



Solutions en séries de puissance

Théorème (Newton-Puiseux)

Soit C une courbe dans le plan telle que $f(x,y) \neq yg(x,y)$. On suppose que $f \in \mathbb{R}\{x,y\}$ n'a pas de terme constant et que $x=0$ n'est pas tangent à C. Alors f a au moins une solution en séries de puissance formelles :

$$\begin{aligned} x &= t^m \\ y &= \textstyle\sum_m^\infty a_r t^r \end{aligned} \tag{1}$$

et tel que $t \geq 0$. On appelle ça une **demi-branche***.*

Solutions en séries de puissance

Théorème (Newton-Puiseux)

Soit C une courbe dans le plan telle que $f(x,y) \neq yg(x,y)$. On suppose que $f \in \mathbb{R}\{x,y\}$ n'a pas de terme constant et que $x = 0$ n'est pas tangent à C. Alors f a au moins une solution en séries de puissance formelles :

$$\begin{aligned} x &= t^m \\ y &= \textstyle\sum_m^\infty a_r t^r \end{aligned} \tag{1}$$

et tel que $t \geq 0$. On appelle ça une **demi-branche***.*

Remarque

Si on pose $t < 0$ on obtient la demi-branche symétrique.
Si m est impaire le signe des coefficients sont les mêmes, et si m est paire certains signes changent.

Caractéristique de Puiseux

On considère

$$x = t^{12}; \quad y = 2t^{18} + 5t^{24} - t^{27} + 6t^{30} - 2t^{33} + t^{35} + 8t^{38} - \frac{1}{2}t^{44}$$

On a $m = 12$ et $\beta_1 = 18$, $e_1 = hcf(12, 18) = 6$.
$6 \mid 24$, $6 \nmid 27$. Alors $\beta_2 = 27$, $e_2 = hcf(6, 27) = 3$.
De nouveau $3 \mid 30$, $3 \mid 33$, mais $3 \nmid 35$. Alors $\beta_3 = 35$, $e_3 = 1$.
La suite de nombres est $(12; 18, 27, 35)$.

Définition

La suite de nombres

$$(m; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_g)$$

est la **caractéristique de Puiseux** *de C.*

Equi-singularité

Soient C et $C^{'}$ deux courbes irréductibles telles que elles admettent deux paramétrisations :

$$y = \sum_{r=m}^{\infty} a_r t^{r/m};$$

$$y = \sum_{r=m}^{\infty} a_r^{'} t^{r/m}.$$

Les courbes C sont $C^{'}$ **equi-singuliers** si et seulement si

1. C et $C^{'}$ ont la même caractéristique de Puiseux ;
2. les signes des coefficient des termes relatives aux exposants sont les mêmes.

Suite de multiplicités

Soit C une courbe, O un point singulier et $(m; \beta_1, \ldots, \beta_g)$ sa caractéristique de Puiseux.
On peut calculer à partir de la caractéristique de Puiseux une suite de nombre $m_i \in \mathbb{N}$, telle que :

- $m_0 := m$;
- $m_i = m_{i+1} + m_{i+2} + \cdots + m_{i+k-1} + m_{i+k}$, avec $m_{i+1} = m_{i+2} = \cdots = m_{i+k-1}$.

Suite de multiplicités - 2

Exemple

On peut considérer la suite de multiplicités

$$(m_0, m_1, \ldots, m_9, m_{10}) = (30, 15, 15, 9, 6, 3, 3, 1, 1, 1)$$

Cette suite a été calculé à partir de la caractéristique (30 ;45,54,55).

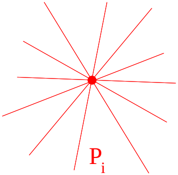
Théorème

La suite de multiplicité est équivalente à la caractéristique de Puiseux.

Points marqués

Définition

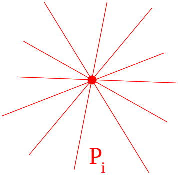
Un point marqué P_i est un point de C tel que la restriction de C au voisinage de P_i est donnée par m_i courbes lisses qui s'intersectent à deux à deux transversalement dans P_i.



Points marqués

Définition

Un point marqué P_i est un point de C tel que la restriction de C au voisinage de P_i est donnée par m_i courbes lisses qui s'intersectent à deux à deux transversalement dans P_i.



Remarque

Éventuellement $m_i = 1$.

Partages

Définition

Un **partage** *est une déformation d'une courbe C définie dans une disque D tel que*

- $\alpha : J = [0,1] \to D$ *telle que* $\alpha(J)$ *est transverse au bord du disque*
- $\alpha(J)$ *n'a que des points lisses et des points marqués.*

Dans ma thèse je cherche une caractérisation des partages pour des classes de courbes equi-singulières.

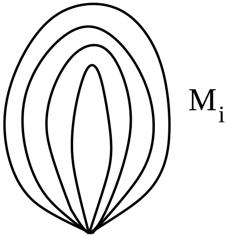
Partage canonique

Définition

Soit C un partage irréductible contenu dans un disque D et tel que tout point marqué appartient au même quadrant. La courbe C intersecte ∂D en deux points C^1 et C^2. Au moins un de ces deux points d'intersection appartient au même quadrant que les points multiples.
Le partage est alors un **partage canonique**.

Multi-boucles

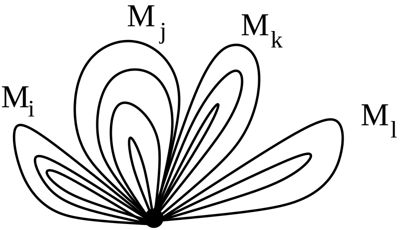
Soit P_i un point marqué. Alors il existe une **multi-boucle** M_i associée au point marqué P_i.
Une multi-boucle est donnée par des cercles concentriques, qui s'intersectent tous dans le même point.



Le point d'intersection est le **point de base** de la multi-boucle.

Multi-boucles - 2

Un point de base peut être commun à plusieurs multi-boucles.



Construction d'un partage canonique

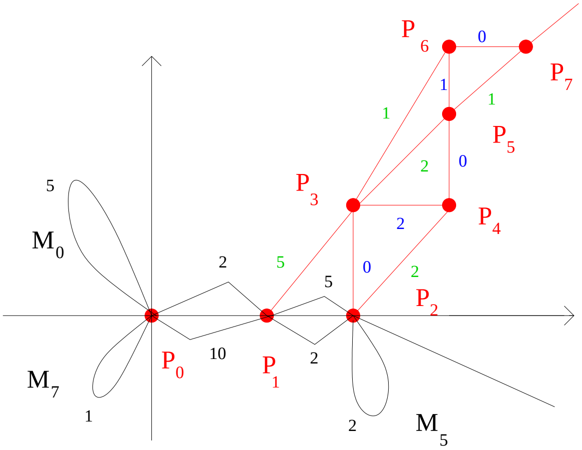
Théorème

Soit C une courbe avec caractéristique de Puiseux $(m; \beta)$. Le partage canonique associé à C est donné par

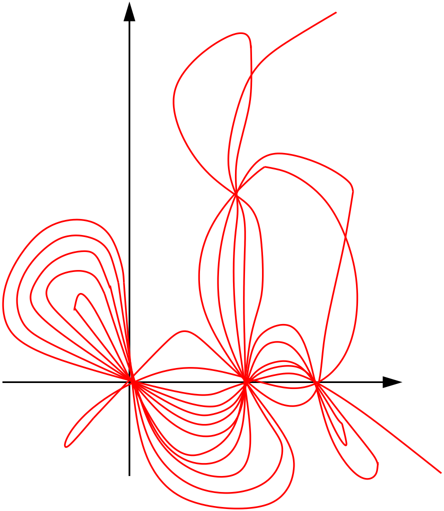
1. *dans le premier quadrant une suite de points marqués P_i tels que $\{m_i\}_{i=1}^{N}$ est la suite des multiplicité de $(m; \beta)$;*
2. *pour chaque point P_i, k_i lignes le joignent au point P_{i-1} et m_i au point P_j tel que $j \neq i-1$ et $m_j = m_{j+1} + \cdots + m_i + \cdots + m_{j+k}$;*
3. *pour chaque point P_i qui n'appartient pas à un des axes une multi-boucle M_i ayant $m_i - k_i$ cercles ; la position de la multi-boucle dans le plan peut être calculé de manière algorithmique ;*
4. *$k_N = 0$ et $k_i = m_{i+1} - k_{i+1}$.*

Exemple

Considérons la singularité ayant paire de Puiseux (12; 31). La suite de multiplicité est 12-12-7-5-2-2-1-1. On obtient le graphe suivant :

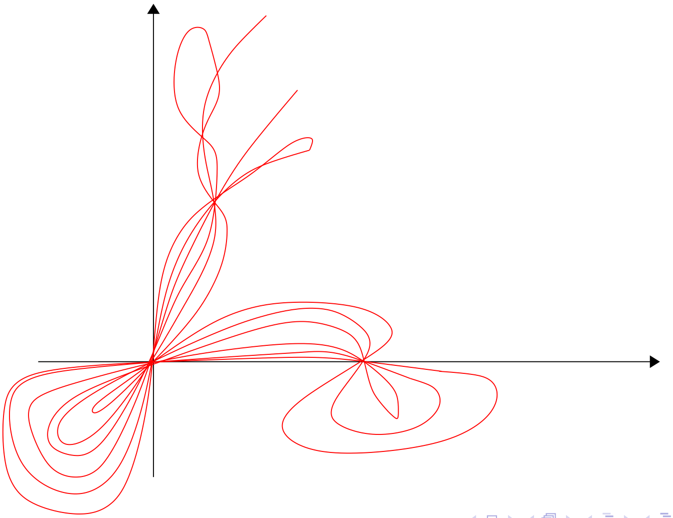


Exemple - 1



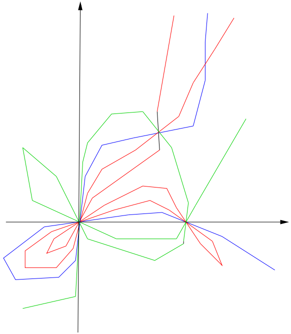
Example - Plusieurs paires de Puiseux

Le partage canonique de la singularité $(12; 18, 21, 26)$ est le suivant :



Exemple - Courbe réductible

On termine par un exemple d'une courbe réductible ayant trois composantes irréductibles avec caractéristique de Puiseux (2 ;3), (3 ;5) et (4 ;6,7).



Résultats

Le théorème que j'ai énoncé, et sa généralisation aux courbes réductibles, a été prouvé par **Schulze-Robbecke** en 1977, et je l'ai redécouvert de façon indépendante en utilisant une méthode différente. Ma méthode est généralisable au cas de courbes réductibles, cas qui n'a pas été étudié par Schulze-Robbecke.

Résultats

Le théorème que j'ai énoncé, et sa généralisation aux courbes réductibles, a été prouvé par **Schulze-Robbecke** en 1977, et je l'ai redécouvert de façon indépendante en utilisant une méthode différente. Ma méthode est généralisable au cas de courbes réductibles, cas qui n'a pas été étudié par Schulze-Robbecke.

J'ai décrit mon résultat dans sa formulation la plus simple possible. Une formulation plus générale utilise le cerf-volant, un invariant de singularité introduit en 2009 par **Popescu-Pampu**.

De plus, j'ai trouvé un résultat qui décrit le cas de déformations ayant points marqués en tout quadrant.

De plus, la combinatoire des espaces de résolution réels et des partages est extrêmement riche, et ma thèse constitue une première étape dans la découverte de ses propriétés.

Merci pour votre attention !