

Modélisation et simulations numériques d'écroulements de colonnes granulaires denses

Laurent Chupin, Thierry Dubois & Minh Phan

Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal
CNRS UMR 6620
Université Clermont Auvergne

25 juin 2019



Objectifs

Écoulements pyroclastiques



Photo : 19 avril 1993 - Jacques Guarinos - Lascar (Chili)

Objectifs

Écoulements pyroclastiques

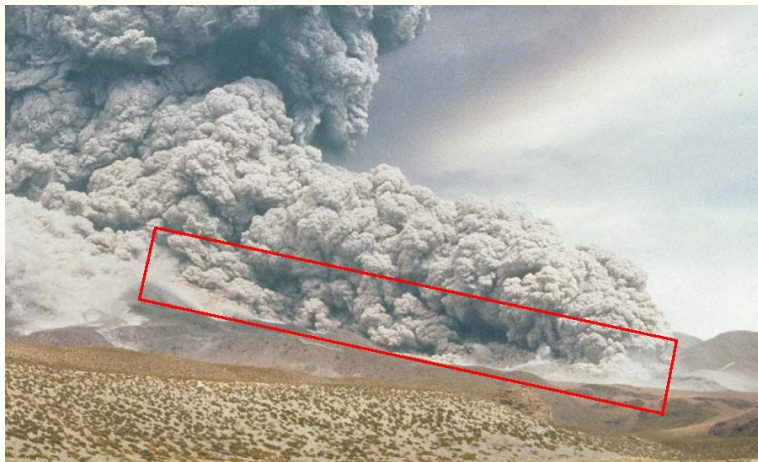
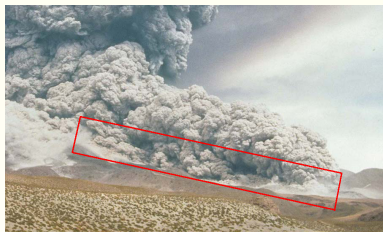


Photo : 19 avril 1993 - Jacques Guarinos - Lascar (Chili)

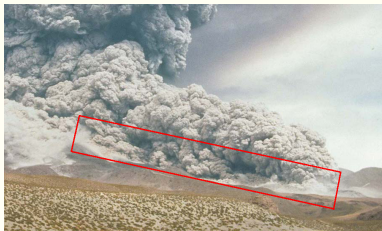
Écoulement basal

Objectifs / Méthodologie



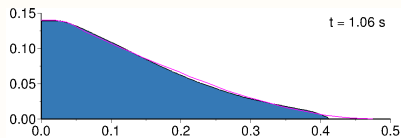
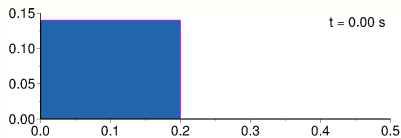
Expériences : Olivier Roche (LMV, UCA)

Objectifs / Méthodologie

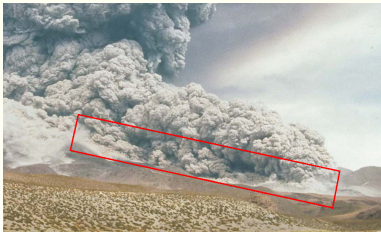


Expériences : Olivier Roche (LMV, UCA)

Simulations numériques

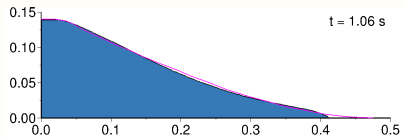
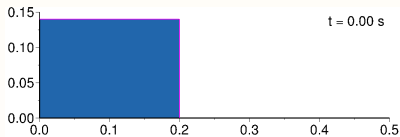


Objectifs / Méthodologie



Expériences : Olivier Roche (LMV, UCA)

Simulations numériques



Quel modèle mathématique ?

Le modèle mathématique

Écoulement granulaire modélisé par les équations de Navier-Stokes incompressibles

$$\rho_s \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \nabla p = \rho_s \mathbf{g}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

où ρ_s est la densité des particules ($\approx 1500 \text{ kg/m}^3$)

Rhéologie visco-plastique

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = 2\eta \mathbf{D}\mathbf{u} + \tau(p, \rho_s) \frac{\mathbf{D}\mathbf{u}}{\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|} & \text{si } \mathbf{D}\mathbf{u} \neq 0 \\ \|\boldsymbol{\tau}\| \leq \tau(p, \rho_s) & \text{si } \mathbf{D}\mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

où $\mathbf{D}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u})$ et $\|\boldsymbol{\tau}\| = \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} \tau_{ij}^2 \right)^{1/2}$

Le modèle mathématique

Rhéologie visco-plastique

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = 2\eta \mathbf{D}\mathbf{u} + \tau(p, \rho_s) \frac{\mathbf{D}\mathbf{u}}{\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|} & \text{si } \mathbf{D}\mathbf{u} \neq 0 \\ \|\boldsymbol{\tau}\| \leq \tau(p, \rho_s) & \text{si } \mathbf{D}\mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

où $\mathbf{D}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u})$ et $\|\boldsymbol{\tau}\| = \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} \tau_{ij}^2\right)^{1/2}$

Seuil de plasticité

$$\tau(p, \rho_s) = \begin{cases} \mu_f p & \text{modèle de Drucker-Prager,} \\ \mu_f p_L(\rho_s) & \text{pression lithostatique,} \end{cases}$$

où μ_f est le coefficient de friction du matériau granulaire (statique)

$$p_L(\rho_s) = \rho_s g(H - y)$$

Existence de solutions : Chupin, Mathé (2017)

Le modèle mathématique

Rhéologie visco-plastique

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = 2\eta \mathbf{D}\mathbf{u} + \tau(p, \rho_s) \frac{\mathbf{D}\mathbf{u}}{\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|} & \text{si } \mathbf{D}\mathbf{u} \neq 0 \\ \|\boldsymbol{\tau}\| \leq \tau(p, \rho_s) & \text{si } \mathbf{D}\mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

où $\mathbf{D}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u})$ et $\|\boldsymbol{\tau}\| = \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} \tau_{ij}^2\right)^{1/2}$

Réécriture de la rhéologie

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta \mathbf{D}\mathbf{u} + \tau(p, \rho_s) \boldsymbol{\Sigma}$$

où

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma} = \frac{\mathbf{D}\mathbf{u}}{\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|} & \text{si } \mathbf{D}\mathbf{u} \neq 0, \\ \boldsymbol{\Sigma} \in \Lambda & \text{si } \mathbf{D}\mathbf{u} = 0, \end{cases}$$

avec $\Lambda = \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in L^2(\Omega)^{2 \times 2}; \|\boldsymbol{\lambda}\| \leq 1, \text{tr}(\boldsymbol{\lambda}) = 0, {}^t\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda} \right\}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$

Reformulation de la plasticité : projection

Proposition

Pour tout $r > 0$, on a

$$\Sigma = \mathbb{P}_\Lambda(\Sigma + rDu) \iff \begin{cases} \Sigma = \frac{Du}{\|Du\|} & \text{si } Du \neq 0, \\ \Sigma \in \Lambda & \text{si } Du = 0 \end{cases}$$

où $\mathbb{P}_\Lambda : L^2(\Omega)^{2 \times 2} \longrightarrow \Lambda$ (projection)

dans Chupin, Dubois, A bi-projection method for Bingham type flows, *Computers with Applications*, **72** (2016).

Reformulation de la plasticité : projection

Proposition

Pour tout $r > 0$, on a

$$\Sigma = \mathbb{P}_\Lambda(\Sigma + rDu) \iff \begin{cases} \Sigma = \frac{Du}{\|Du\|} & \text{si } Du \neq 0, \\ \Sigma \in \Lambda & \text{si } Du = 0 \end{cases}$$

où $\mathbb{P}_\Lambda : L^2(\Omega)^{2 \times 2} \longrightarrow \Lambda$ (projection)

dans Chupin, Dubois, A bi-projection method for Bingham type flows, *Computers with Applications*, **72** (2016).

Remarque : Si $\lambda \in L^2(\Omega)^{2 \times 2}$ est un tenseur symétrique, à trace nulle, alors on a ppt dans Ω

$$\mathbb{P}_\Lambda(\lambda) = \begin{cases} \lambda & \text{si } \|\lambda\| \leq 1, \\ \frac{\lambda}{\|\lambda\|} & \text{si } \|\lambda\| \geq 1. \end{cases}$$

Conditions aux limites à seuil

On impose sur $\Gamma = \partial\Omega$ les conditions

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_t = -\mu_b[-\boldsymbol{\sigma}_n]_+ \frac{\mathbf{u}_t}{|\mathbf{u}_t|} & \text{si } \mathbf{u}_t \neq \mathbf{0}, \\ |\boldsymbol{\sigma}_t| \leq \mu_b[-\boldsymbol{\sigma}_n]_+ & \text{si } \mathbf{u}_t = \mathbf{0}. \end{cases}$$

$$\text{où } \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = 2\nu \mathbf{D}\mathbf{u} + \tau(p, \rho_s)\boldsymbol{\Sigma} - p\mathbf{I} \\ \mathbf{u}_t = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \\ \boldsymbol{\sigma}_t = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} - ((\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \end{cases}$$

Ionescu, Mangeney, Bouchut, Roche, J. of Non-Newton. Fluid Mech., **219** (2015).

Réécriture *via* une projection

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}_t = \mu_b[-\boldsymbol{\sigma}_n]_+ \boldsymbol{\sigma}_t \\ \boldsymbol{\Sigma}_t = \mathbb{P}_{\Lambda_b}(\boldsymbol{\Sigma}_t - r_b \mathbf{u}_t), r_b > 0. \end{cases}$$

avec $\mathbb{P}_{\Lambda_b} : L^2(\Omega)^2 \longrightarrow \Lambda_b = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2; |\mathbf{v}| \leq 1\}$

Modèle granulaire

Le modèle mathématique pour l'écoulement granulaire s'écrit

$$\rho_s \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right) - 2 \operatorname{div}(\eta \mathbf{D}\mathbf{u}) + \nabla p = \rho_s \mathbf{g} + \operatorname{div}(\tau(p, \rho_s) \boldsymbol{\Sigma}),$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{P}_\Lambda(\boldsymbol{\Sigma} + r \mathbf{D}\mathbf{u}), \quad r > 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_t = \mu_b [-\boldsymbol{\sigma}_n]_+ \boldsymbol{\sigma}_t, \quad \boldsymbol{\Sigma}_t = \mathbb{P}_{\Lambda_b}(\boldsymbol{\Sigma}_t - r_b \mathbf{u}_t), \quad r_b > 0 \text{ sur } \Gamma,$$

avec

$$\tau(p, \rho_s) = \begin{cases} \mu_f p, & \text{Drucker-Prager (DP)} \\ \mu_f p_L(\rho_s) & \text{Pression Lithostatique (PL)} \end{cases}$$

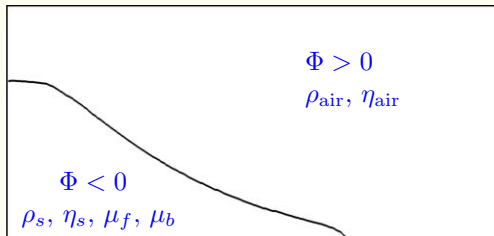
Objectif de l'exposé

Comparer les modèles de plasticité
Drucker-Prager (DP) et pression lithostatique (PL)
en confrontant simulations numériques et résultats d'expériences

Expériences : O. Roche (LMV, UCA)



Formulation Level Set



- ① Interface : $\{\mathbf{x} \in \Omega; \Phi(\mathbf{x}) = 0\}$
- ② Transport de l'interface : $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{u} \Phi) = 0$
- ③
$$\begin{cases} \rho(\Phi) = \rho_s + (\rho_{\text{air}} - \rho_s)H(\Phi) \\ \eta(\Phi) = \eta_s + (\eta_{\text{air}} - \eta_s)H(\Phi) \\ \mu_f(\Phi) = \mu_f(1 - H(\Phi)), \mu_b(\Phi) = \mu_b(1 - H(\Phi)) \end{cases}$$

Milieu ambiant (Air) : $\eta_{\text{air}} = 10^{-5}$ et $\rho_{\text{air}} = 1$

Milieu granulaire : $\eta_s \approx 1$ et $\rho_s \approx 1500$

Schéma de discrétisation en temps

Schéma de bi-projection

- ✓ Projection du tenseur plastique
- ✓ Schéma de projection pour le couplage vitesse/pression (Navier-Stokes)

Chupin, Dubois, Computers with Applications (2016)

Chalayer, Chupin, Dubois, SINUM (2018)

Le schéma de bi-projection en temps

On suppose que $(\Phi^n, \mathbf{u}^n, p^n, \Sigma^n, \mathbf{u}_t^n, \sigma_t^n)$ sont connus

- 1 Calcul de la fonction Level Set : Φ^{n+1}

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\delta t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}^n \Phi^n) = 0$$

\mathbf{u}^n est à divergence nulle.

Schéma explicite (en pratique RK3 TVD)

- 2 Renormalisation pour s'assurer que Φ^{n+1} reste une fonction distance signée
- 3 Calcul de

$$\begin{cases} \rho^{n+1} = \rho(\Phi^{n+1}) \\ \eta^{n+1} = \eta(\Phi^{n+1}) \\ \mu_f^{n+1} = \mu_f(\Phi^{n+1}) \\ \mu_b^{n+1} = \mu_b(\Phi^{n+1}) \end{cases}$$

Le schéma de bi-projection en temps

- Calcul de $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \Sigma^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_t^{n+1}, \sigma_t^{n+1})$

$$\frac{(\rho^{n+1} + \rho^n)}{2} \frac{(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n)}{\delta t} - \operatorname{div}(2\eta^{n+1} \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \frac{(\rho^{n+1} + \rho^n)}{2} \operatorname{div}(\mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n) + \nabla p^n = \operatorname{div}(\tau^{n+1} \Sigma^{n+1}),$$

$$\Sigma^{n+1} = \mathbb{P}_\Lambda(\Sigma^{n+1} + r\tau^{n+1} \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \theta(\Sigma^n - \Sigma^{n+1})), \theta \in [0, 1],$$

$$\Sigma_t^{n+1} = \mathbb{P}_{\Lambda_b}(\Sigma_t^{n+1, k+1} + r_b \tau_b^{n+1} \tilde{\mathbf{u}}_t^{n+1} + \theta(\Sigma_t^n - \Sigma_t^{n+1})) \text{ sur } \Gamma_s,$$

$$\Sigma_t^{n+1} = \mu_b^{n+1} [-\sigma_n^{n+1}]_+ \sigma_t^{n+1} \text{ sur } \Gamma_s,$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

$$\eta^{n+1} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_t^{n+1}}{\partial n} + C_f^{n+1} \tilde{\mathbf{u}}_t^{n+1} = 0 \text{ sur } \Gamma \setminus \Gamma_s.$$

$(\mathbf{u}^{n+1}, \Sigma^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_t^{n+1}, \Sigma_t^{n+1})$ sont couplées \Rightarrow Algorithme de point fixe de Picard

Le schéma de bi-projection en temps

- Calcul de $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \Sigma^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_t^{n+1}, \sigma_t^{n+1})$

$$\frac{(\rho^{n+1} + \rho^n)}{2} \frac{(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n)}{\delta t} - \operatorname{div}(2\eta^{n+1} \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \frac{(\rho^{n+1} + \rho^n)}{2} \operatorname{div}(\mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n) + \nabla p^n = \operatorname{div}(\tau^{n+1} \Sigma^{n+1}),$$

$$\Sigma^{n+1} = \mathbb{P}_\Lambda(\Sigma^{n+1} + r\tau^{n+1} \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \theta(\Sigma^n - \Sigma^{n+1})), \theta \in [0, 1],$$

$$\Sigma_t^{n+1} = \mathbb{P}_{\Lambda_b}(\Sigma_t^{n+1, k+1} + r_b \tau_b^{n+1} \tilde{\mathbf{u}}_t^{n+1} + \theta(\Sigma_t^n - \Sigma_t^{n+1})) \text{ sur } \Gamma_s,$$

$$\Sigma_t^{n+1} = \mu_b^{n+1} [-\sigma_n^{n+1}]_+ \sigma_t^{n+1} \text{ sur } \Gamma_s,$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

$$\eta^{n+1} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_t^{n+1}}{\partial n} + C_f^{m+1} \tilde{\mathbf{u}}_t^{n+1} = 0 \text{ sur } \Gamma \setminus \Gamma_s.$$

Convergence géométrique de raison $(1 - \theta)$

Chalayer, Chupin, Dubois, SINUM (2018)

Le schéma de bi-projection en temps

- 5 Étape de projection : $(p^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1})$

$$\begin{cases} \frac{(\rho^{n+1} + \rho^n)}{2} \frac{(\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1})}{\delta t} + \nabla(p^{n+1} - p^n) = 0 \\ (\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \text{div}(\mathbf{u}^{n+1}) = 0 \end{cases}$$

Le schéma de bi-projection en temps

- 5 Étape de projection : $(p^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1})$

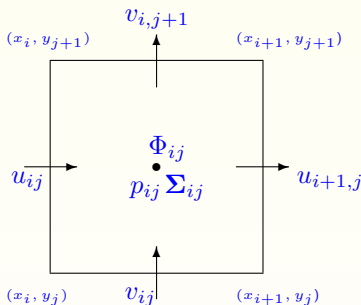
$$\begin{cases} \frac{(\rho^{n+1} + \rho^n)}{2} \frac{(\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1})}{\delta t} + \nabla(p^{n+1} - p^n) = 0 \\ (\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}^{n+1}) = 0 \end{cases}$$

Remarque : p^{n+1} est solution d'un problème du type

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{2}{(\rho^{n+1} + \rho^n)} \nabla(p^{n+1} - p^n) \right) = \frac{1}{\delta t} \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}), \\ \frac{\partial}{\partial n}(p^{n+1} - p^n) = 0 \end{cases}$$

Discretisation spatiale

1 Maillage cartésien (grilles décalées)



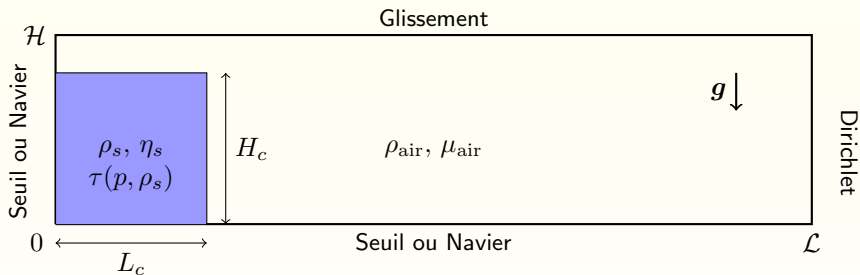
2 Schémas Volumes-Finis centrés d'ordre 2 pour (\mathbf{u}, p, Σ)

3 Schémas WENO5 pour Φ

4 Mise en œuvre parallèle basée sur les bibliothèques MPI et PETSC

Les simulations numériques sont réalisées sur le cluster parallèle ClerVolc (LMBP)

Simulations numériques : écoulement de colonnes



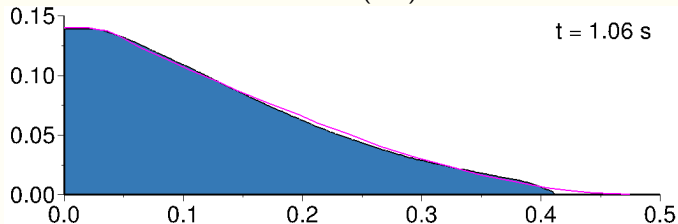
Paramètres physiques

- Densités : $\rho_s \approx 1500$ (particules) et $\rho_{\text{air}} = 1$ (air)
- Viscosités : $\eta_s \approx 0,5$ (particules) et $\eta_{\text{air}} = 10^{-5}$ (air)
- Seuil de plasticité : $\begin{cases} \mu_f = \tan(24^\circ) \text{ ou } \tan(28^\circ) \text{ (particules)} \\ \mu_f = \tan(24^\circ) \text{ (paroi rugueuse)} \\ \mu_f = \tan(17^\circ) \text{ (paroi lisse)} \end{cases}$

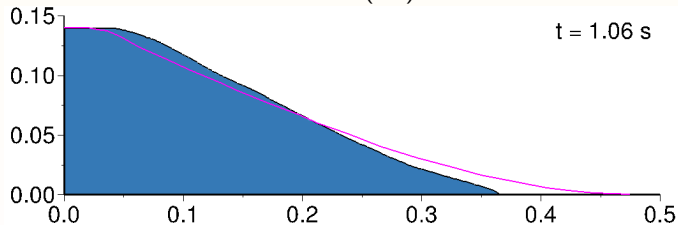
Simulations numériques versus expérience (non fluidisé)

Colonne $L_c \times H_c = 0,20 \times 0,14$

Modèle (DP)



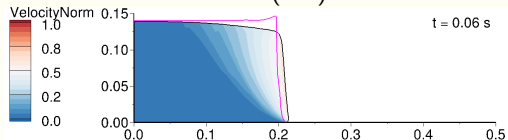
Modèle (PL)



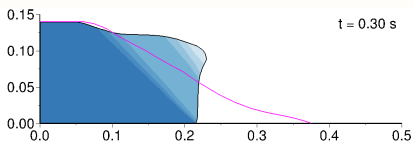
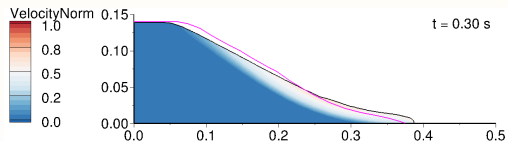
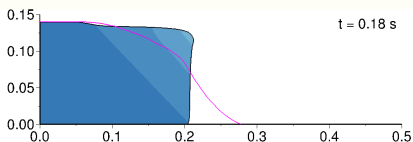
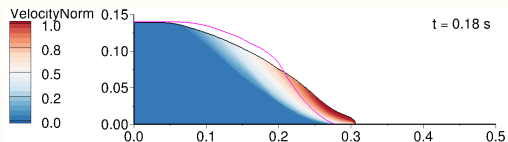
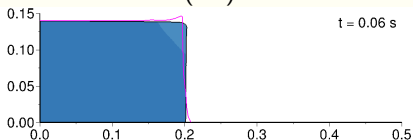
Comparaisons des modèles (DP) et (PL)

Colonne $L_c \times H_c = 0,20 \times 0,14$

Modèle (DP)



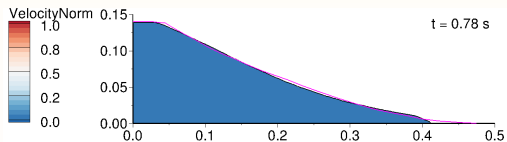
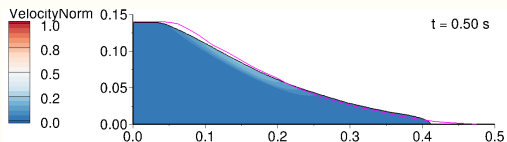
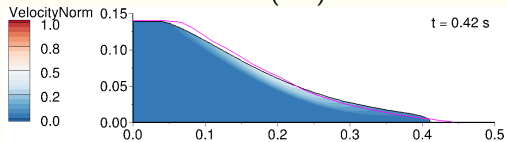
Modèle (PL)



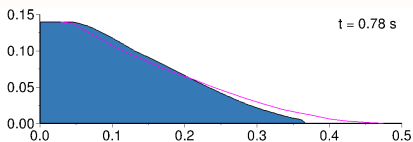
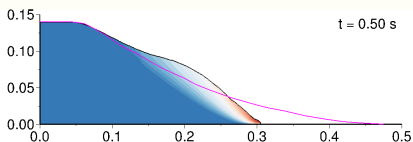
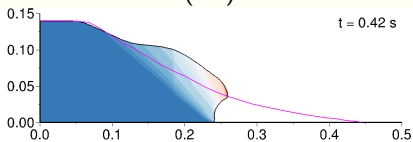
Comparaisons des modèles (DP) et (PL)

Colonne $L_c \times H_c = 0,20 \times 0,14$

Modèle (DP)



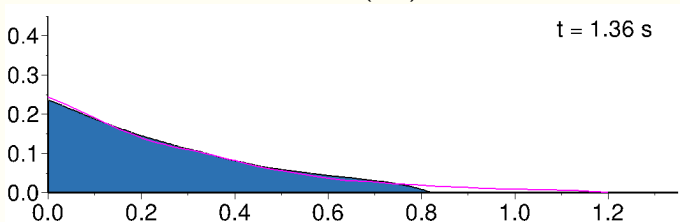
Modèle (PL)



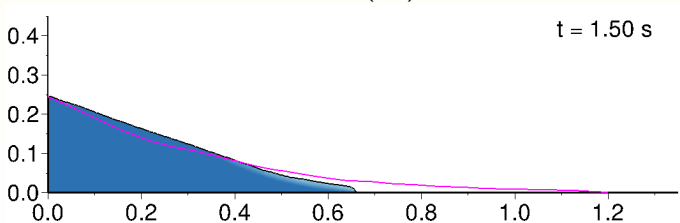
Comparaisons des modèles (DP) et (PL)

Colonne $L_c \times H_c = 0,20 \times 0,40$

Modèle (DP)



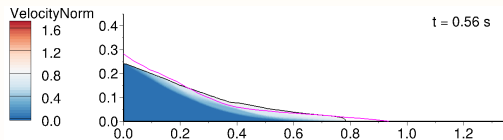
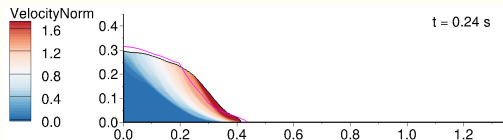
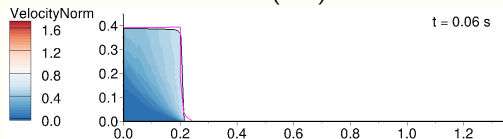
Modèle (PL)



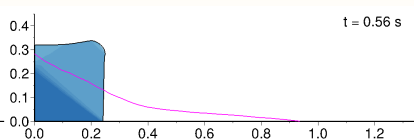
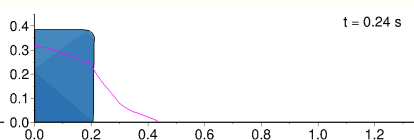
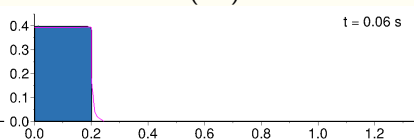
Comparaisons des modèles (DP) et (PL)

Colonne $L_c \times H_c = 0,20 \times 0,40$

Modèle (DP)



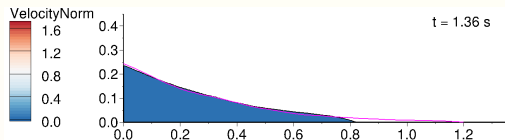
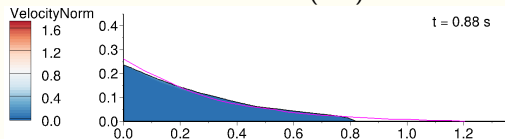
Modèle (PL)



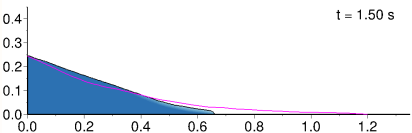
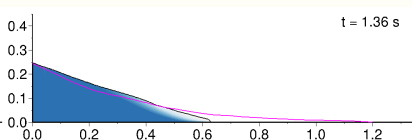
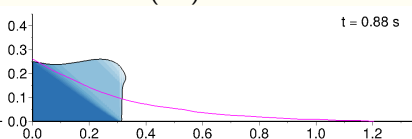
Comparaisons des modèles (DP) et (PL)

Colonne $L_c \times H_c = 0,20 \times 0,40$

Modèle (DP)



Modèle (PL)



Conclusion

- ✓ Les modèles (DP) et (PL) produisent des solutions stationnaires similaires, proches des résultats expérimentaux
- ✓ La dynamique est fautive avec le modèle (PL) alors qu'elle est bien approchée par le modèle (DP)
- ✓ Pour la colonne haute, *i.e.* $H_c/L_c = 2$, la colonne se déforme et le front glisse lentement. Elle ne s'effondre que lorsque son rapport de forme devient ≤ 1

Travail à faire

- ✓ Calculs sur grilles plus fines pour la colonne $0,2 \times 0,4$
- ✓ Étudier la sensibilité par rapport aux paramètres physiques