

Théorème des 4 couleurs: preuve et démonstration(s) par ordinateur

Michaël Rao

CNRS - ENS Lyon
LIP - Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme
équipe MC2

Comment un ordinateur peut-il aider un mathématicien ?

- Systèmes de calculs formels (Maple, Mathematica, Sage...)

Comment un ordinateur peut-il aider un mathématicien ?

- Systèmes de calculs formels (Maple, Mathematica, Sage...)
Un ordinateur peut calculer exactement avec des rationnels, des nombres algébriques, systèmes d'équations polynomiales...
- Tester une idée ou une conjecture sur beaucoup d'exemples

Comment un ordinateur peut-il aider un mathématicien ?

- Systèmes de calculs formels (Maple, Mathematica, Sage...)
Un ordinateur peut calculer exactement avec des rationnels, des nombres algébriques, systèmes d'équations polynomiales...
- Tester une idée ou une conjecture sur beaucoup d'exemples
- Trouver un objet avec certaines propriétés

Comment un ordinateur peut-il aider un mathématicien ?

- Systèmes de calculs formels (Maple, Mathematica, Sage...)
 - Un ordinateur peut calculer exactement avec des rationnels, des nombres algébriques, systèmes d'équations polynomiales...
- Tester une idée ou une conjecture sur beaucoup d'exemples
- Trouver un objet avec certaines propriétés
 - Pour prouver une existence (par construction)

Comment un ordinateur peut-il aider un mathématicien ?

- Systèmes de calculs formels (Maple, Mathematica, Sage...)
 - Un ordinateur peut calculer exactement avec des rationnels, des nombres algébriques, systèmes d'équations polynomiales...
- Tester une idée ou une conjecture sur beaucoup d'exemples
- Trouver un objet avec certaines propriétés
 - Pour prouver une existence (par construction)
 - Pour "casser" une conjecture

Comment un ordinateur peut-il aider un mathématicien ?

- Systèmes de calculs formels (Maple, Mathematica, Sage...)
 - Un ordinateur peut calculer exactement avec des rationnels, des nombres algébriques, systèmes d'équations polynomiales...
- Tester une idée ou une conjecture sur beaucoup d'exemples
- Trouver un objet avec certaines propriétés
 - Pour prouver une existence (par construction)
 - Pour "casser" une conjecture
- Étude de cas : prouver un ensemble long de cas similaires

Comment un ordinateur peut-il aider un mathématicien ?

- Systèmes de calculs formels (Maple, Mathematica, Sage...)
 - Un ordinateur peut calculer exactement avec des rationnels, des nombres algébriques, systèmes d'équations polynomiales...
- Tester une idée ou une conjecture sur beaucoup d'exemples
- Trouver un objet avec certaines propriétés
 - Pour prouver une existence (par construction)
 - Pour "casser" une conjecture
- Étude de cas : prouver un ensemble long de cas similaires
- Assistants de preuves formelles (Coq...)

Comment un ordinateur peut-il aider un mathématicien ?

- Systèmes de calculs formels (Maple, Mathematica, Sage...)
 - Un ordinateur peut calculer exactement avec des rationnels, des nombres algébriques, systèmes d'équations polynomiales...
- Tester une idée ou une conjecture sur beaucoup d'exemples
- Trouver un objet avec certaines propriétés
 - Pour prouver une existence (par construction)
 - Pour "casser" une conjecture
- Étude de cas : prouver un ensemble long de cas similaires
- Assistants de preuves formelles (Coq...)

Avantages de l'ordinateur : la rigueur, la vitesse

Comment un ordinateur peut-il aider un mathématicien ?

- Systèmes de calculs formels (Maple, Mathematica, Sage...)
 - Un ordinateur peut calculer exactement avec des rationnels, des nombres algébriques, systèmes d'équations polynomiales...
- Tester une idée ou une conjecture sur beaucoup d'exemples
- Trouver un objet avec certaines propriétés
 - Pour prouver une existence (par construction)
 - Pour "casser" une conjecture
- Étude de cas : prouver un ensemble long de cas similaires
- Assistants de preuves formelles (Coq...)

Avantages de l'ordinateur : la rigueur, la vitesse

Désavantages : il faut savoir programmer, c'est (des fois) plus difficile de trouver des erreurs, et sa puissance de calcul est aussi limitée

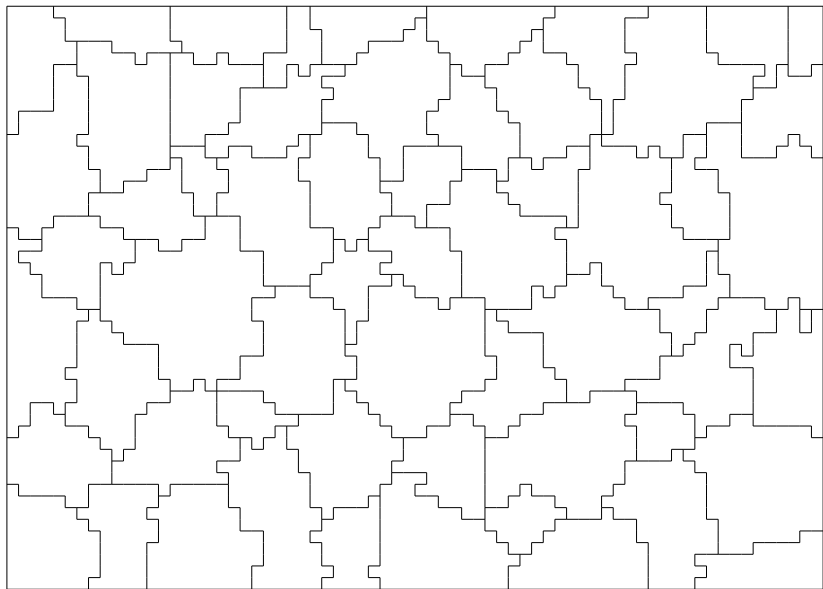
- Théorème des 4 couleurs (Appel & Haken, 1976)

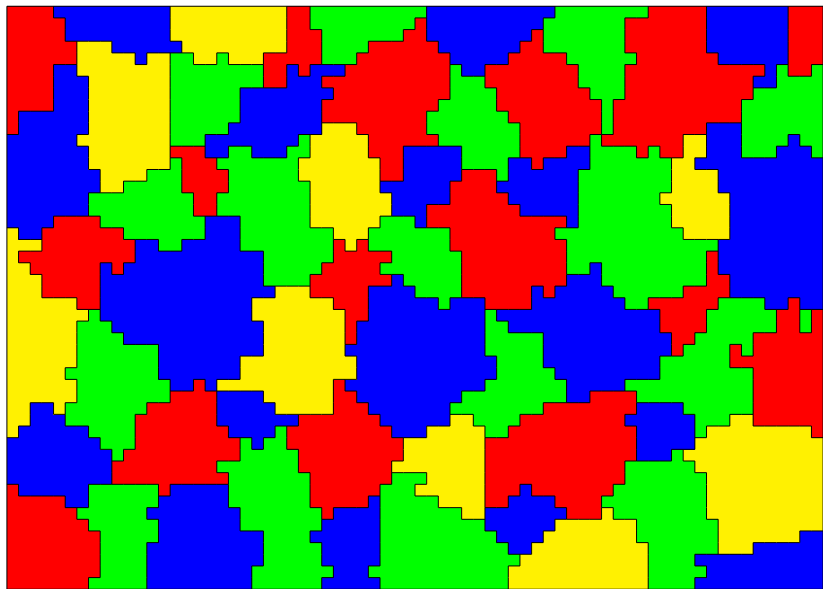
- Théorème des 4 couleurs (Appel & Haken, 1976)
- Conjecture de Kepler (Hales & Ferguson, 1998)
- Non existence d'un plan projectif fini d'ordre 10 (Lam, 1991)
- Des jeux : Puissance 4, Awalé, Dames 8×8 ...
- Des casses-têtes : Rubik's cube, Sudoku...
- ...

- Théorème des 4 couleurs (Appel & Haken, 1976)
- Conjecture de Kepler (Hales & Ferguson, 1998)
- Non existence d'un plan projectif fini d'ordre 10 (Lam, 1991)
- Des jeux : Puissance 4, Awalé, Dames 8×8 ...
- Des casses-têtes : Rubik's cube, Sudoku...
- ...

Théorème des 4 couleurs

Toute carte constituée de régions connexes peut être coloriée avec (au plus) 4 couleurs, de sorte que deux régions limitrophes aient des couleurs différentes





Théorème des 4 couleurs

Toute carte constituée de régions connexes peut être coloriée avec (au plus) 4 couleurs, de sorte que deux régions limitrophes aient des couleurs différentes

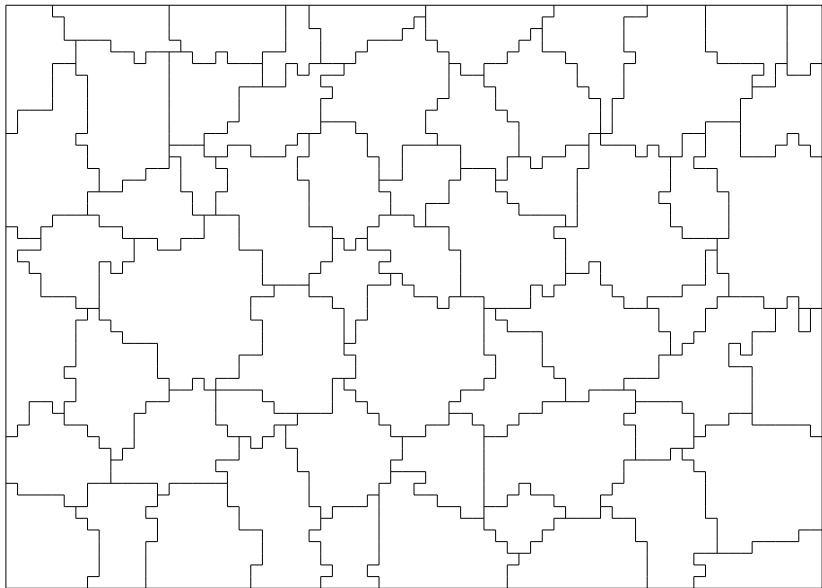
Théorème des 4 couleurs

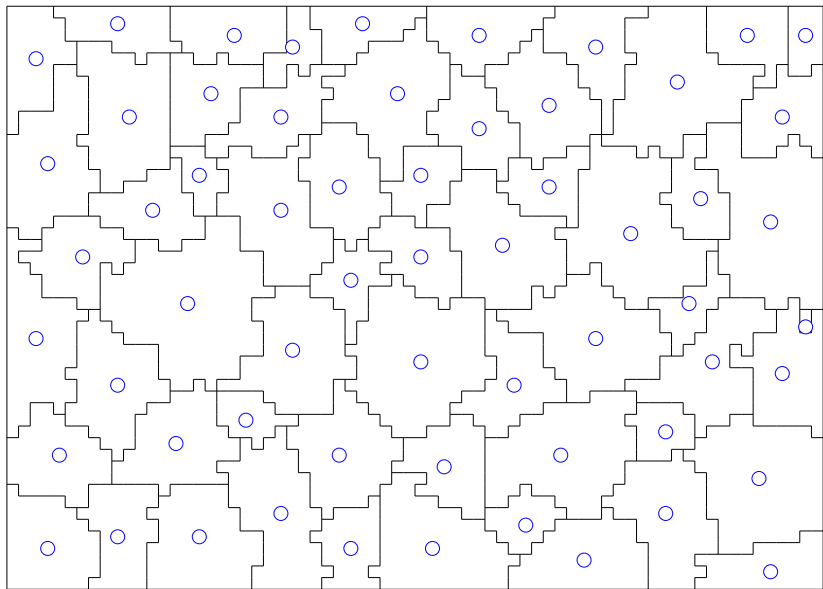
Toute carte constituée de régions connexes peut être coloriée avec (au plus) 4 couleurs, de sorte que deux régions limitrophes aient des couleurs différentes

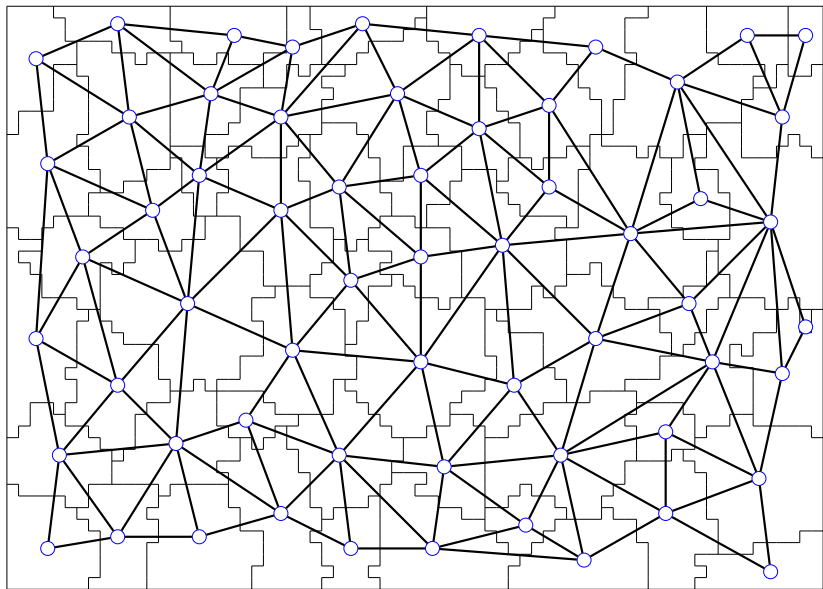
En termes de graphes :

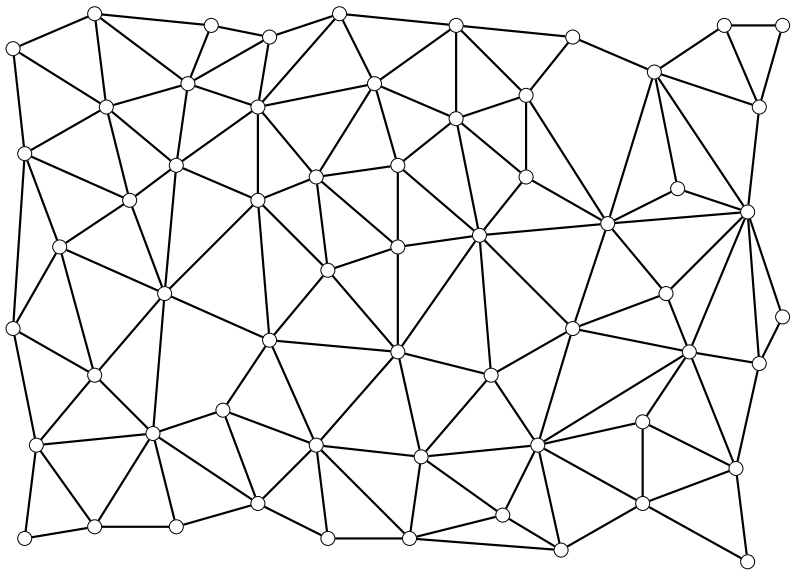
Théorème des 4 couleurs

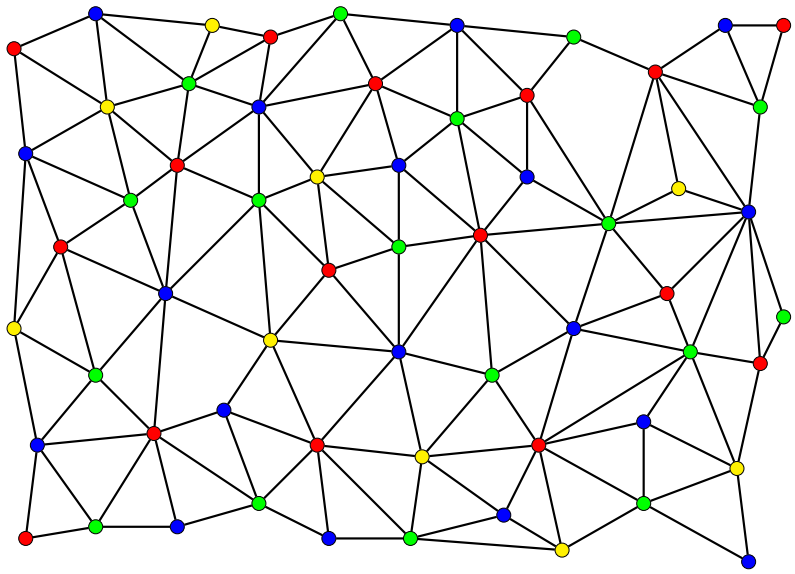
Tout graphe planaire est 4-colorable











Théorème des 4 couleurs : historique

- Conjecture énoncée par Guthrie en 1852

Théorème des 4 couleurs : historique

- Conjecture énoncée par Guthrie en 1852
- Démonstration par Kempe en 1879

Lemme

Dans tout graphe planaire, il existe un sommet de degré au plus 5

Lemme

Dans tout graphe planaire, il existe un sommet de degré au plus 5

Preuve. Utilisation de la formule d'Euler :

$$\#\text{sommets} - \#\text{arêtes} + \#\text{faces} = 2$$

Lemme

Dans tout graphe planaire, il existe un sommet de degré au plus 5

Preuve. Utilisation de la formule d'Euler :

$$\#\text{sommets} - \#\text{arêtes} + \#\text{faces} = 2$$

Une face a au moins 3 arêtes :

Lemme

Dans tout graphe planaire, il existe un sommet de degré au plus 5

Preuve. Utilisation de la formule d'Euler :

$$\#\text{sommets} - \#\text{arêtes} + \#\text{faces} = 2$$

Une face a au moins 3 arêtes : $\#\text{faces} \leq \frac{2}{3} \times \#\text{arêtes}$

Lemme

Dans tout graphe planaire, il existe un sommet de degré au plus 5

Preuve. Utilisation de la formule d'Euler :

$$\#\text{sommets} - \#\text{arêtes} + \#\text{faces} = 2$$

Une face a au moins 3 arêtes : $\#\text{faces} \leq \frac{2}{3} \times \#\text{arêtes}$

Si tous les sommets ont des degrés ≥ 6 :

Lemme

Dans tout graphe planaire, il existe un sommet de degré au plus 5

Preuve. Utilisation de la formule d'Euler :

$$\#sommets - \#arêtes + \#faces = 2$$

Une face a au moins 3 arêtes : $\#faces \leq \frac{2}{3} \times \#arêtes$

Si tous les sommets ont des degrés ≥ 6 : $\#sommets \leq \frac{2}{6} \times \#arêtes$

Lemme

Dans tout graphe planaire, il existe un sommet de degré au plus 5

Preuve. Utilisation de la formule d'Euler :

$$\#sommets - \#arêtes + \#faces = 2$$

Une face a au moins 3 arêtes : $\#faces \leq \frac{2}{3} \times \#arêtes$

Si tous les sommets ont des degrés ≥ 6 : $\#sommets \leq \frac{2}{6} \times \#arêtes$

$$\#faces + \#sommets \leq \left(\frac{2}{6} + \frac{2}{3} \right) \times \#arêtes$$

Lemme

Dans tout graphe planaire, il existe un sommet de degré au plus 5

Preuve. Utilisation de la formule d'Euler :

$$\#sommets - \#arêtes + \#faces = 2$$

Une face a au moins 3 arêtes : $\#faces \leq \frac{2}{3} \times \#arêtes$

Si tous les sommets ont des degrés ≥ 6 : $\#sommets \leq \frac{2}{6} \times \#arêtes$

$$\#faces + \#sommets \leq \left(\frac{2}{6} + \frac{2}{3} \right) \times \#arêtes$$

Contradiction

Tout graphe planaire est 6-colorable :

Algorithme (récursif) qui colorie avec 6 couleurs

- Soit v un sommet de G de degré au plus 5
- On colorie $G - v$ avec 6 couleurs (appel récursif)
- On colorie v avec une couleur libre.

Théorème des 6 couleurs

Algorithme (récuratif) qui colorie un graphe planaire G avec 6 couleurs :

Théorème des 6 couleurs

Algorithme (récuratif) qui colorie un graphe planaire G avec 6 couleurs :

- Soit v un sommet de G de degré au plus 5

Théorème des 6 couleurs

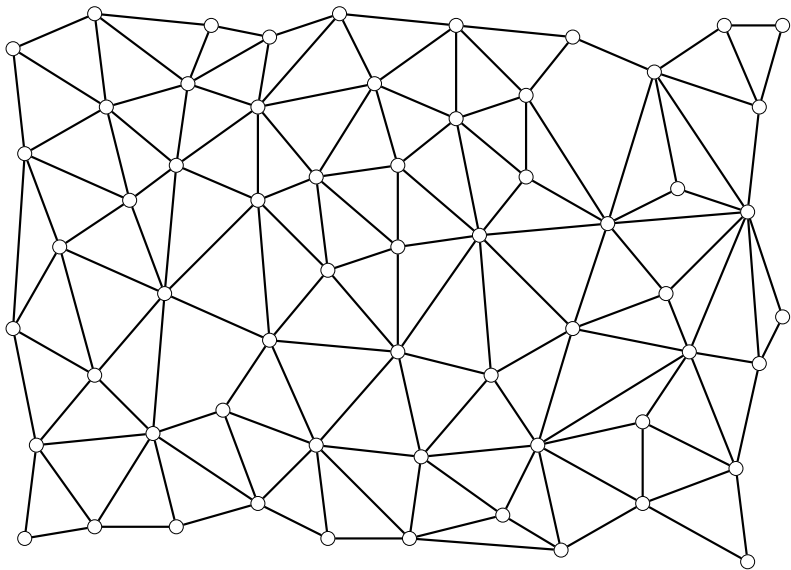
Algorithme (récuratif) qui colorie un graphe planaire G avec 6 couleurs :

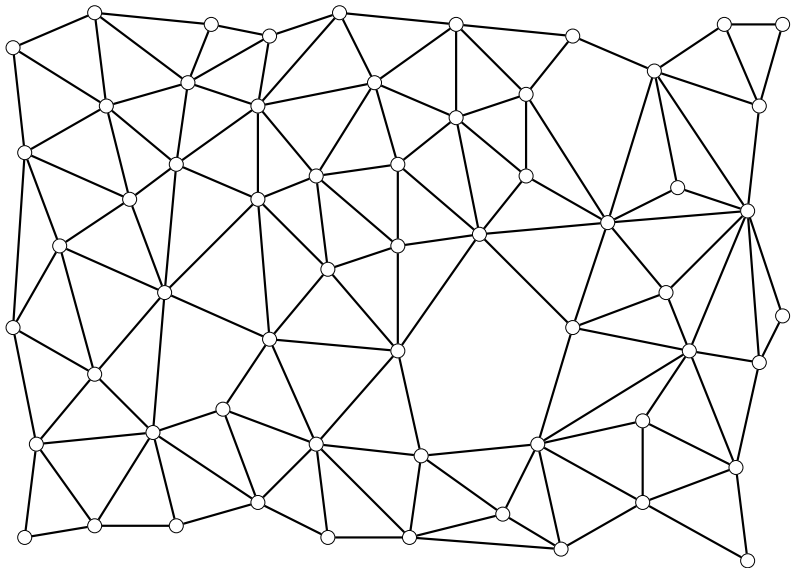
- Soit v un sommet de G de degré au plus 5
- On colorie $G - v$ avec 6 couleurs (appel récuratif)

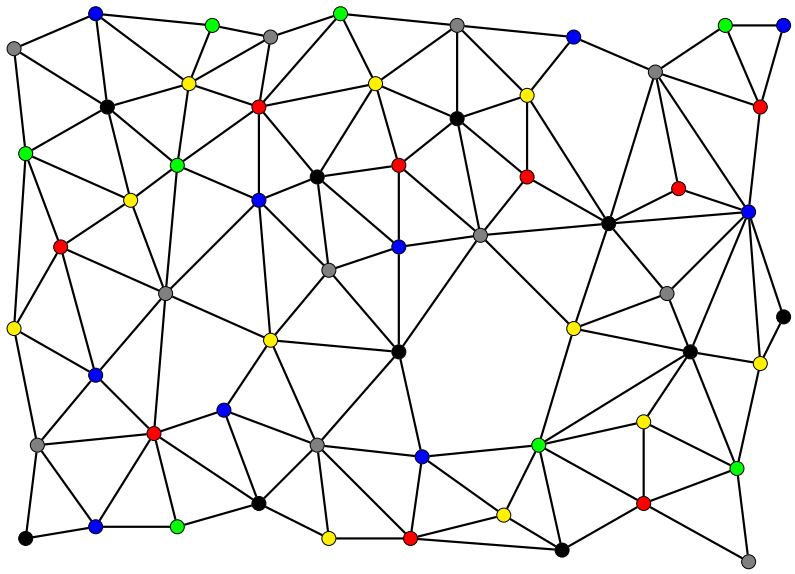
Théorème des 6 couleurs

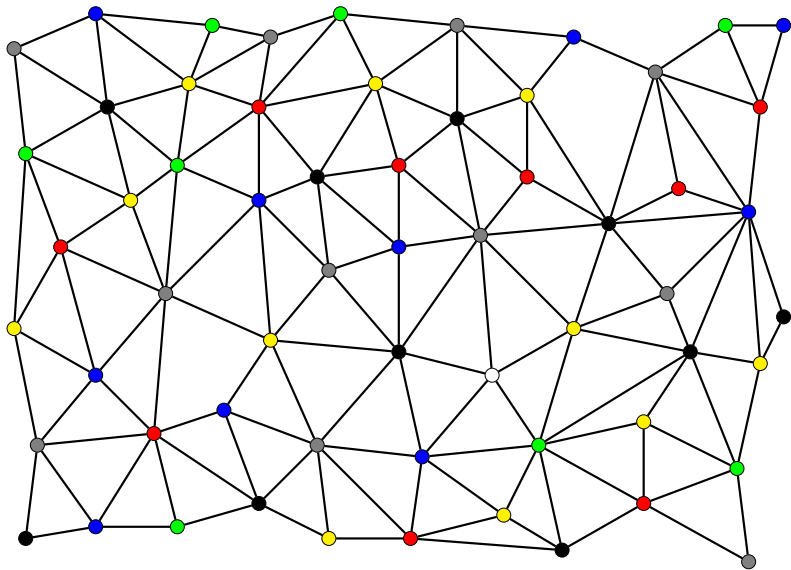
Algorithme (récuratif) qui colorie un graphe planaire G avec 6 couleurs :

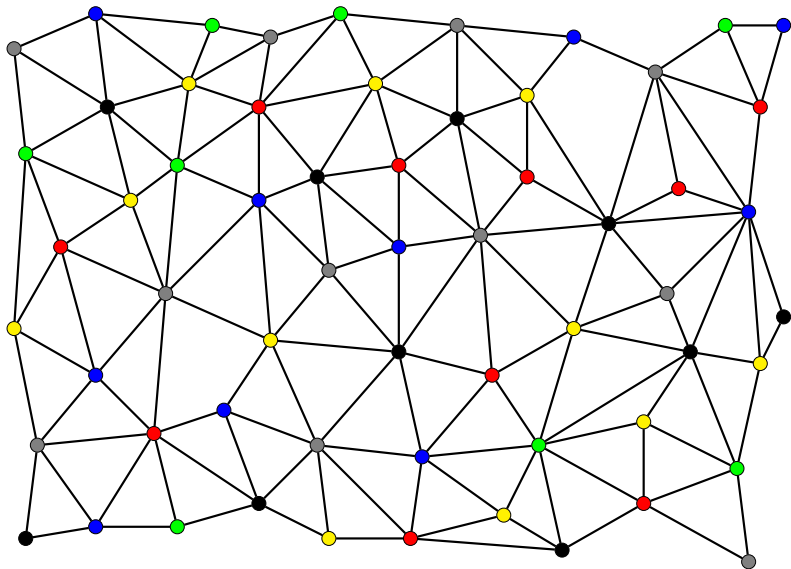
- Soit v un sommet de G de degré au plus 5
- On colorie $G - v$ avec 6 couleurs (appel récuratif)
- Au moins une des 6 couleurs n'est pas utilisée parmi les voisins de v dans G . On colorie v avec une couleur libre.











Théorème des 6 couleurs

Algorithme (récuratif) qui colorie un graphe planaire G avec 6 couleurs :

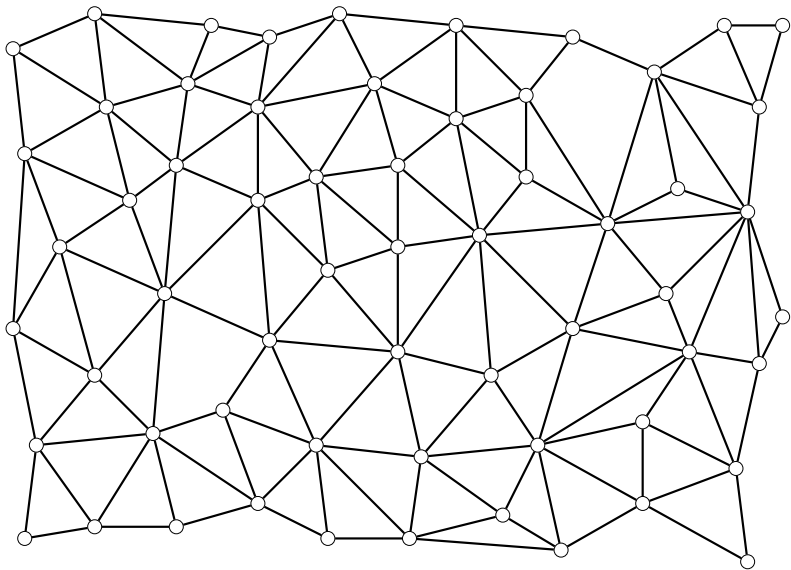
- Soit v un sommet de G de degré au plus 5
- On colorie $G - v$ avec 6 couleurs (appel récuratif)
- Au moins une des 6 couleurs n'est pas utilisée parmi les voisins de v dans G . On colorie v avec une couleur libre.

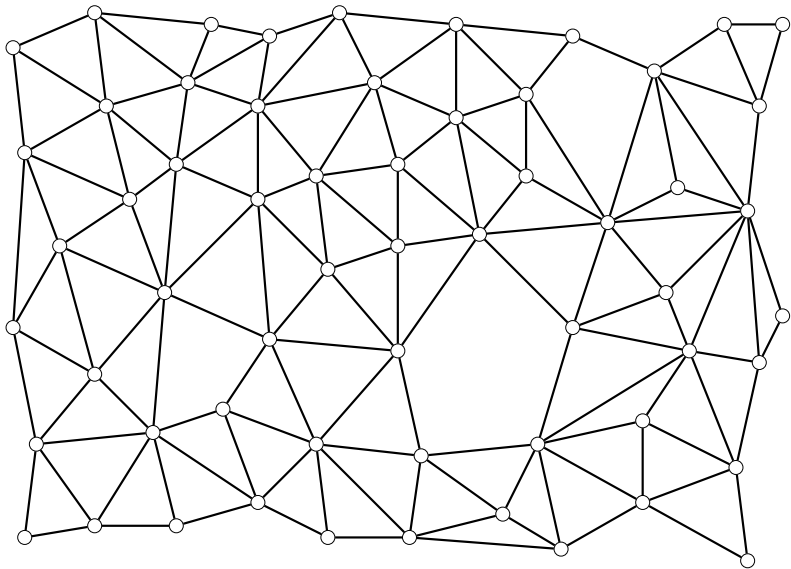
Tout graphe planaire est 6-colorable

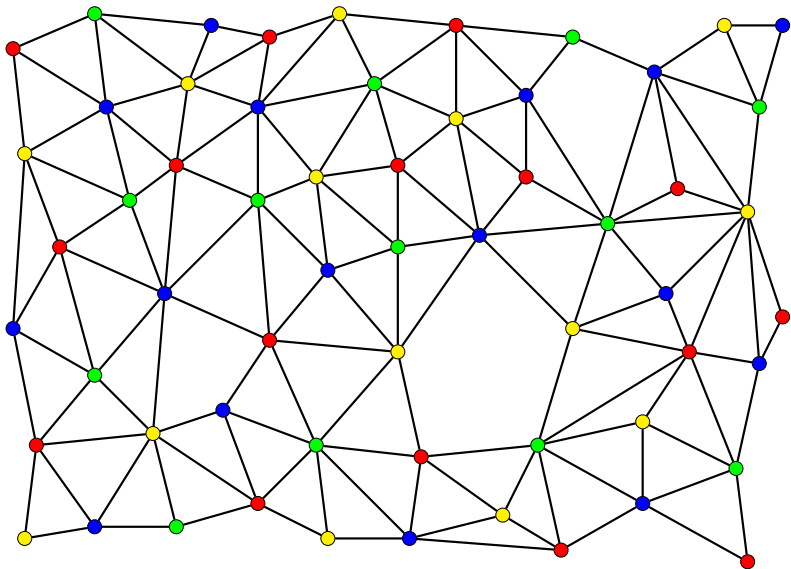
Théorème des 4 couleurs (Kempe)

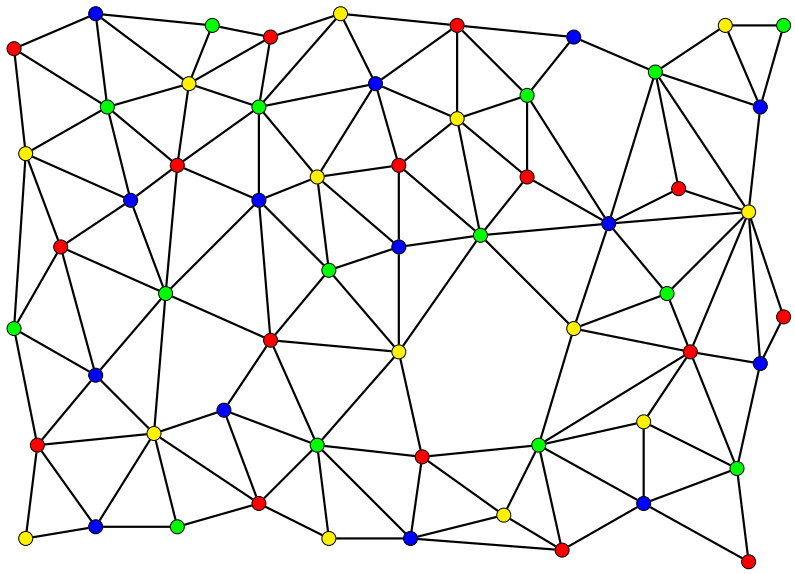
Algorithme (récuratif) qui colorie un graphe planaire G avec 4 couleurs :

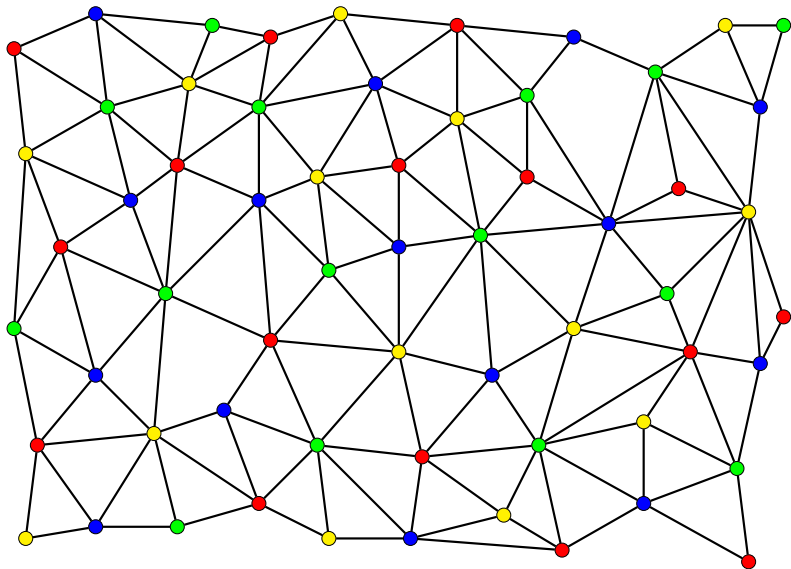
- Soit v un sommet de G de degré au plus 5
- On colorie $G - v$ avec 4 couleurs (appel récuratif)
- Si une des 4 couleurs n'est pas utilisée parmi les voisins de v dans G , on l'utilise pour colorier v
- Sinon, on fait des changements locaux (via des chaînes de Kempe) pour « gagner » une couleur

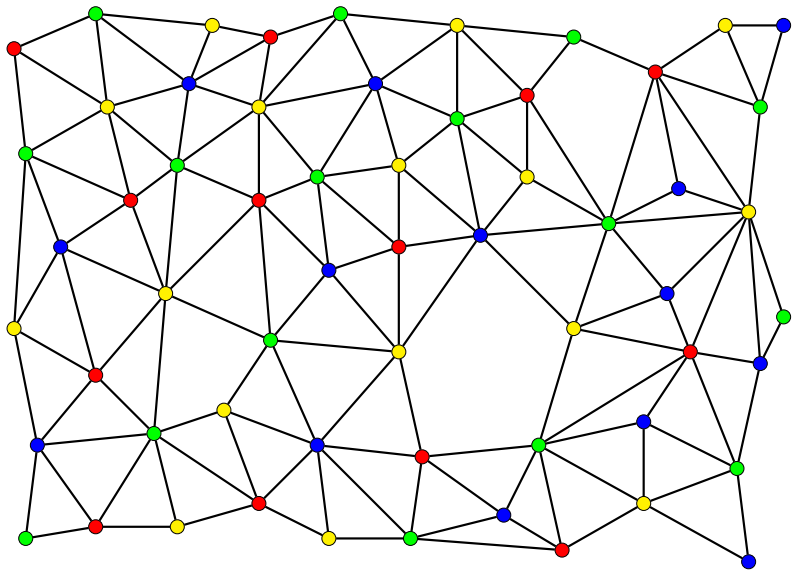


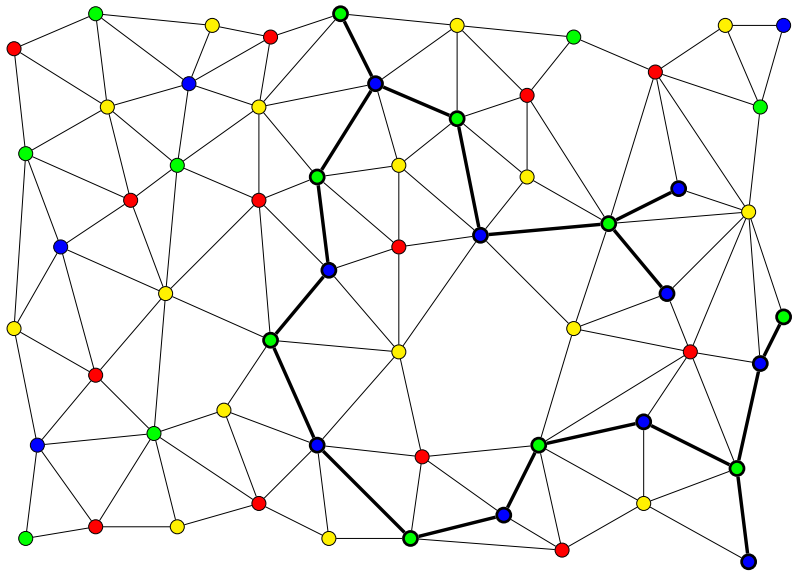


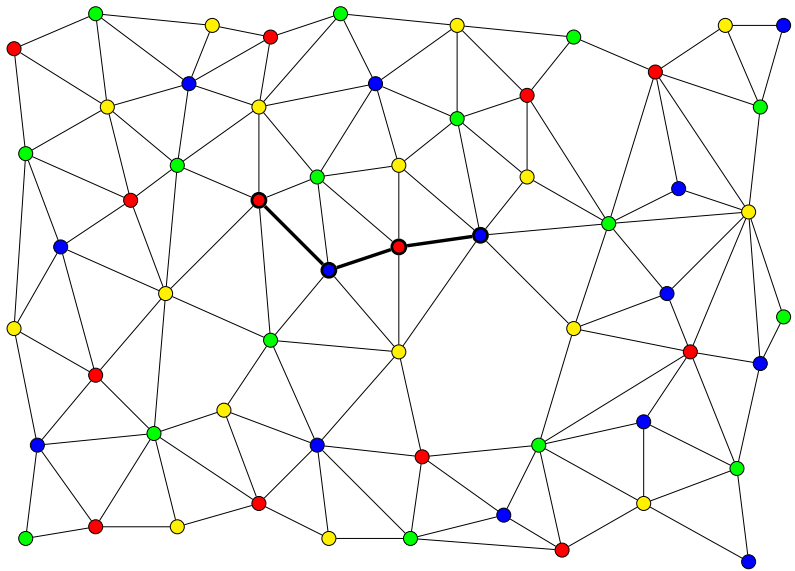


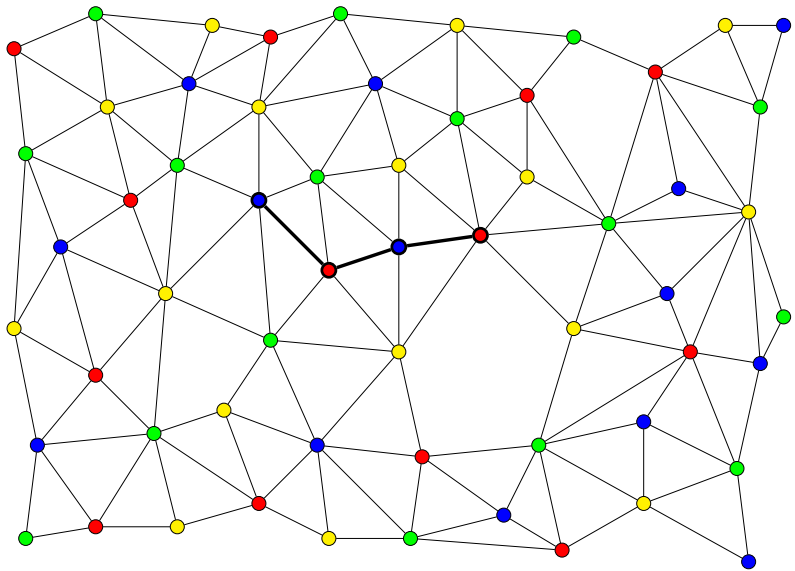


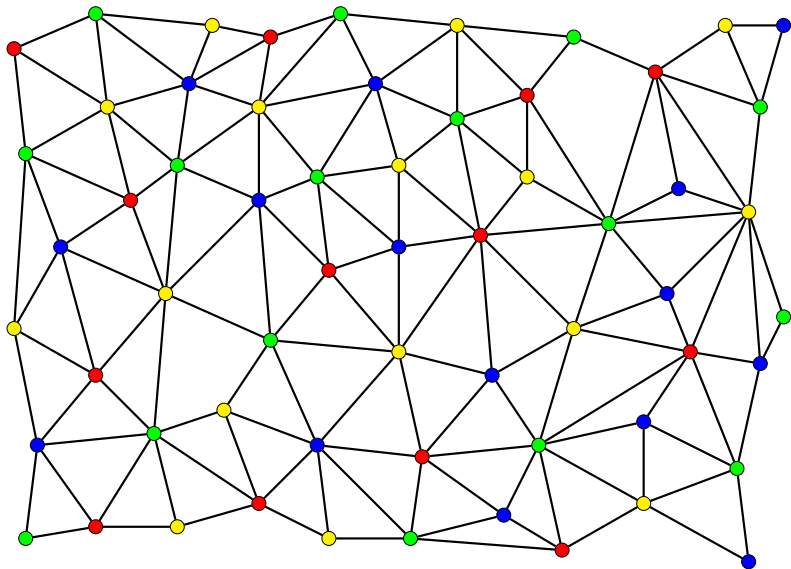












Théorème des 4 couleurs (Kempe)

Algorithme (récuratif) qui colorie un graphe planaire G avec 4 couleurs :

- Soit v un sommet de G de degré au plus 5
- On colorie $G - v$ avec 4 couleurs (appel récuratif)
- Si une des 4 couleurs n'est pas utilisée parmi les voisins de v dans G , on l'utilise pour colorier v
- Sinon, on fait des changements locaux (via des chaînes de Kempe) pour « gagner » une couleur

Tout graphe planaire est 4-colorable

Le théorème des 4 couleurs est démontré

Théorème des 4 couleurs (Kempe) ?

Algorithme (récuratif) qui colorie un graphe planaire G avec 4 couleurs :

- Soit v un sommet de G de degré au plus 5
- On colorie $G - v$ avec 4 couleurs (appel récuratif)
- Si une des 4 couleurs n'est pas utilisée parmi les voisins de v dans G , on l'utilise pour colorier v
- Sinon, on fait des changements locaux (via des chaînes de Kempe) pour « gagner » une couleur

Tout graphe planaire est 4-colorable

Le théorème des 4 couleurs est démontré (?)

Théorème des 4 couleurs : historique

- Conjecture énoncée par Guthrie en 1852
- Démonstration par Kempe en 1879

Théorème des 4 couleurs : historique

- Conjecture énoncée par Guthrie en 1852
- ~~Démonstration~~ par Kempe en 1879
- Heawood trouve une faute dans la preuve de Kempe en 1890 !

Théorème des 4 couleurs : historique

- Conjecture énoncée par Guthrie en 1852
- ~~Démonstration~~ par Kempe en 1879
- Démonstration alternative par Tait en 1880
- Heawood trouve une faute dans la preuve de Kempe en 1890 !

Théorème des 4 couleurs : historique

- Conjecture énoncée par Guthrie en 1852
- ~~Démonstration~~ par Kempe en 1879
- ~~Démonstration alternative~~ par Tait en 1880
- Heawood trouve une faute dans la preuve de Kempe en 1890 !
- Petersen trouve une faute dans la preuve de Tait en 1891 !

Théorème des 4 couleurs : historique

- Conjecture énoncée par Guthrie en 1852
- ~~Démonstration~~ par Kempe en 1879
- ~~Démonstration alternative~~ par Tait en 1880
- Heawood trouve une faute dans la preuve de Kempe en 1890 !
- Petersen trouve une faute dans la preuve de Tait en 1891 !
- Heesch en 1955 : première idée d'informatisation

La preuve de Kempe contenait une erreur : deux chaînes de Kempe peuvent se croiser...

La preuve de Kempe contenait une erreur : deux chaînes de Kempe peuvent se croiser...Mais, il y avait déjà beaucoup d'idées !

La preuve de Kempe contenait une erreur : deux chaînes de Kempe peuvent se croiser...Mais, il y avait déjà beaucoup d'idées !

Idée d'une preuve :

- Si le théorème est faux, alors il existe un contre exemple minimal : un graphe planaire non 4-colorable, mais si on retire un sommet, il devient 4-colorable
- Configuration réductible : configuration qui ne peut pas apparaître dans un contre exemple minimal.

La preuve de Kempe contenait une erreur : deux chaînes de Kempe peuvent se croiser...Mais, il y avait déjà beaucoup d'idées !

Idée d'une preuve :

- Si le théorème est faux, alors il existe un contre exemple minimal : un graphe planaire non 4-colorable, mais si on retire un sommet, il devient 4-colorable
- Configuration réductible : configuration qui ne peut pas apparaître dans un contre exemple minimal.
Exemples : sommet de degré 3, sommet de degré 4 (Kempe)

La preuve de Kempe contenait une erreur : deux chaînes de Kempe peuvent se croiser...Mais, il y avait déjà beaucoup d'idées !

Idée d'une preuve :

- Si le théorème est faux, alors il existe un contre exemple minimal : un graphe planaire non 4-colorable, mais si on retire un sommet, il devient 4-colorable
- Configuration réductible : configuration qui ne peut pas apparaître dans un contre exemple minimal.
Exemples : sommet de degré 3, sommet de degré 4 (Kempe)
- Si il existe un ensemble de configurations réductibles \mathcal{C} qui est inévitable dans un graphe planaire, le théorème est vrai.

La preuve de Kempe contenait une erreur : deux chaînes de Kempe peuvent se croiser...Mais, il y avait déjà beaucoup d'idées !

Idée d'une preuve :

- Si le théorème est faux, alors il existe un contre exemple minimal : un graphe planaire non 4-colorable, mais si on retire un sommet, il devient 4-colorable
- Configuration réductible : configuration qui ne peut pas apparaître dans un contre exemple minimal.
Exemples : sommet de degré 3, sommet de degré 4 (Kempe)
- Si il existe un ensemble de configurations réductibles \mathcal{C} qui est inévitable dans un graphe planaire, le théorème est vrai.

Note : une preuve suivant ce schéma serait en même temps un algorithme 4-coloration !

Deux grandes parties dans cette approche de preuve :

- 1 Trouver des configurations réductibles
- 2 Montrer que \mathcal{C} est inévitable.

Deux grandes parties dans cette approche de preuve :

- 1 Trouver des configurations réductibles
- 2 Montrer que \mathcal{C} est inévitable.

Problèmes :

- 1 Heesch fait des simulations, et estime qu'il faut environ $|\mathcal{C}| \sim 8900$
 \Rightarrow utilisation de l'ordinateur semble inévitable...
- 2 Comment faire le (2) ?

De la formule d'Euler
 \Rightarrow Il existe un sommet v de degré au plus 5

Coloriage de $G - v \rightarrow$ Coloriage de G

De la formule d'Euler

~~\Rightarrow Il existe un sommet v de degré au plus 5~~

\Rightarrow Il existe une configuration parmi \mathcal{C} , avec \mathcal{C} fini

Heesch estime la taille de \mathcal{C} à ~ 8900

Coloriage de $G - v \rightarrow$ Coloriage de G

De la formule d'Euler

- ~~\Rightarrow Il existe un sommet v de degré au plus 5~~
- \Rightarrow Il existe une configuration parmi \mathcal{C} , avec \mathcal{C} fini

Heesch estime la taille de \mathcal{C} à ~ 8900

~~Coloriage de $G - v$ \rightarrow Coloriage de G~~

Pour tout $C \in \mathcal{C}$, il existe C' plus petit t.q.

Coloriage de $G[C'] \rightarrow$ Coloriage de $G[C]$

De la formule d'Euler

~~\Rightarrow Il existe un sommet v de degré au plus 5~~

\Rightarrow Il existe une configuration parmi \mathcal{C} , avec \mathcal{C} fini

Heesch estime la taille de \mathcal{C} à ~ 8900

~~Coloriage de $G - v \rightarrow$ Coloriage de G~~

Pour tout $C \in \mathcal{C}$, il existe C' plus petit t.q.

Coloriage de $G[C'] \rightarrow$ Coloriage de $G[C]$

c.a.d. C ne peut pas apparaître dans un contre exemple minimal

« Déchargement »

De la formule d'Euler

- ~~⇒ Il existe un sommet v de degré au plus 5~~
- ⇒ Il existe une configuration parmi \mathcal{C} , avec \mathcal{C} fini

Heesch estime la taille de \mathcal{C} à ~ 8900

« Réduction »

~~Coloriage de $G - v$ → Coloriage de G~~

Pour tout $C \in \mathcal{C}$, il existe C' plus petit t.q.

Coloriage de $G[C'] \rightarrow$ Coloriage de $G[C]$

c.a.d. C ne peut pas apparaître dans un contre exemple minimal

Théorème des 4 couleurs : historique

- Conjecture énoncée par Guthrie en 1852
- ~~Démonstration~~ par Kempe en 1879
- ~~Démonstration alternative~~ par Tait en 1880
- Heawood trouve une faute dans la preuve de Kempe en 1890 !
- Petersen trouve une faute dans la preuve de Tait en 1891 !
- Heesch en 1955 : première idée d'informatisation

Théorème des 4 couleurs : historique

- Conjecture énoncée par Guthrie en 1852
- ~~Démonstration~~ par Kempe en 1879
- ~~Démonstration alternative~~ par Tait en 1880
- Heawood trouve une faute dans la preuve de Kempe en 1890 !
- Petersen trouve une faute dans la preuve de Tait en 1891 !
- Heesch en 1955 : première idée d'informatisation
- Démonstration par Appel & Haken en 1977 (avec l'aide de l'ordinateur pour une partie)

La preuve d'Appel et Haken n'a pas été acceptée par tout le monde...

La preuve d'Appel et Haken n'a pas été acceptée par tout le monde...

Il y a le scepticisme des preuves longues :

- La première partie est faite à la main et longue
- Plusieurs petites fautes ont été trouvées

La preuve d'Appel et Haken n'a pas été acceptée par tout le monde...

Il y a le scepticisme des preuves longues :

- La première partie est faite à la main et longue
- Plusieurs petites fautes ont été trouvées

À ceux-là se rajoutent les sceptiques des preuves par ordinateur...

La preuve d'Appel et Haken n'a pas été acceptée par tout le monde...

Il y a le scepticisme des preuves longues :

- La première partie est faite à la main et longue
- Plusieurs petites fautes ont été trouvées

À ceux-là se rajoutent les sceptiques des preuves par ordinateur...

- La deuxième partie est vérifiée par ordinateur
- Le programme est codé en assembleur sur un IBM 370/168.
Comment être sûr qu'il ne contient pas de bug ?
- Comment être sûr que l'ordinateur n'a pas un bug matériel ?

```

HELLO  CSECT          The name of this program is 'HELLO'
*
      STM 14,12,12(13) Save registers 14,15, and 0 thru 12 in caller's Save area
      LR 12,15        Set up base register with program's entry point address
      USING HELLO,12  Tell assembler which register we are using for pgm. base
      LA 15,SAVE      Now Point at our own save area
      ST 15,8(13)     Set forward chain
      ST 13,4(15)     Set back chain
      LR 13,15        Set R13 to address of new save area
*
      WTO 'Hello World' Write To Operator (Operating System macro)
*
      L 13,4(13)      restore address to caller-provided save area
      XC 8(4,13),8(13) Clear forward chain
      LM 14,12,12(13) Restore registers as on entry
      DROP 12         The opposite of 'USING'
      SR 15,15        Set register 15 to 0 so that the return code (R15) is Zero
      BR 14           Return to caller
*
      SAVE DS 18F      Define 18 fullwords to save calling program registers
      END HELLO       This is the end of the program

```



Théorème des 4 couleurs : historique

- Conjecture énoncée par Guthrie en 1852
- ~~Démonstration~~ par Kempe en 1879
- ~~Démonstration alternative~~ par Tait en 1880
- Heawood trouve une faute dans la preuve de Kempe en 1890 !
- Petersen trouve une faute dans la preuve de Tait en 1891 !
- Heesch en 1955 : première idée d'informatisation
- Démonstration par Appel & Haken en 1977 (avec l'aide de l'ordinateur pour une partie)

Théorème des 4 couleurs : historique

- Conjecture énoncée par Guthrie en 1852
- ~~Démonstration~~ par Kempe en 1879
- ~~Démonstration alternative~~ par Tait en 1880
- Heawood trouve une faute dans la preuve de Kempe en 1890 !
- Petersen trouve une faute dans la preuve de Tait en 1891 !
- Heesch en 1955 : première idée d'informatisation
- Démonstration par Appel & Haken en 1977 (avec l'aide de l'ordinateur pour une partie)
- Démonstration par Robertson, Sanders, Seymour & Thomas en 1997 (avec l'aide de l'ordinateur pour toutes les parties)

Théorème des 4 couleurs : historique

- Conjecture énoncée par Guthrie en 1852
- ~~Démonstration~~ par Kempe en 1879
- ~~Démonstration alternative~~ par Tait en 1880
- Heawood trouve une faute dans la preuve de Kempe en 1890 !
- Petersen trouve une faute dans la preuve de Tait en 1891 !
- Heesch en 1955 : première idée d'informatisation
- Démonstration par Appel & Haken en 1977 (avec l'aide de l'ordinateur pour une partie)
- Démonstration par Robertson, Sanders, Seymour & Thomas en 1997 (avec l'aide de l'ordinateur pour toutes les parties)
- Vérification de la démonstration par Gonthier en 2005 (avec l'aide d'un ordinateur, via un assistant de preuves)

Comment être sûr qu'une preuve (informatique ou non) ne contient pas d'erreur ?

Comment être sûr qu'une preuve (informatique ou non) ne contient pas d'erreur ?

⇒ Assistant de preuves

Comment être sûr qu'une preuve (informatique ou non) ne contient pas d'erreur ?

⇒ Assistant de preuves

Un *théorème* est une proposition qui est obtenue en combinant des axiomes, via des règles d'inférence

Sa *preuve* est l'arbre des combinaisons pour obtenir la proposition

Comment être sûr qu'une preuve (informatique ou non) ne contient pas d'erreur ?

⇒ Assistant de preuves

Un *théorème* est une proposition qui est obtenue en combinant des axiomes, via des règles d'inférence

Sa *preuve* est l'arbre des combinaisons pour obtenir la proposition

L'ordinateur peut vérifier si une preuve est correcte

C'est ce que font les « assistants de preuves », comme Coq (Ils permettent aussi de manipuler les preuves, et de prouver automatiquement certaines étapes)

La preuve du théorème des 4 couleurs vérifiée formellement par Gonthier (2005), en Coq

(Traduction de la preuve de 1997 dans la théorie utilisée par Coq)

La preuve du théorème des 4 couleurs vérifiée formellement par Gonthier (2005), en Coq

(Traduction de la preuve de 1997 dans la théorie utilisée par Coq)

Travail difficile... : il faut formaliser tous les aspects dans la théorie

La preuve du théorème des 4 couleurs vérifiée formellement par Gonthier (2005), en Coq

(Traduction de la preuve de 1997 dans la théorie utilisée par Coq)

Travail difficile... : il faut formaliser tous les aspects dans la théorie

La preuve de la conjecture de Kepler a également été démontrée formellement (Hales & al., 2014)

La preuve du théorème des 4 couleurs vérifiée formellement par Gonthier (2005), en Coq

(Traduction de la preuve de 1997 dans la théorie utilisée par Coq)

Travail difficile... : il faut formaliser tous les aspects dans la théorie

La preuve de la conjecture de Kepler a également été démontrée formellement (Hales & al., 2014)

Ce n'est pas réservé qu'aux preuves par ordinateur :

Le théorème de Feit-Thompson (groupes d'ordre impair) a été vérifié formellement par Gonthier et al. (2012)