

Un schéma numérique pour les écoulements visco-plastiques à densité, viscosité et seuil variable

Rénald Chalayer, Laurent Chupin, Thierry Dubois

19 juin 2018



Plan de l'exposé

- 1 Le modèle mathématique
- 2 Le schéma numérique de semi-discrétisation en temps
- 3 Analyse du schéma
- 4 Mise en œuvre du schéma
- 5 Perspectives

Inconnues : ρ, \mathbf{u}, p et $\boldsymbol{\tau}$.

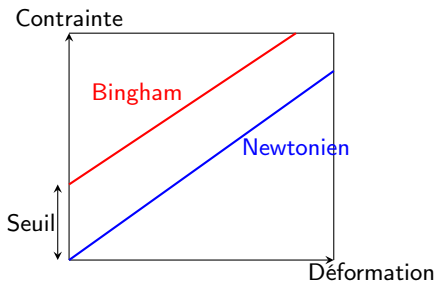
Équations de conservation :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \quad \text{et } \rho|_{t=0} = \rho_0 & \text{dans } \Omega, \\ \rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 & \text{dans } \Omega, \quad \text{et } \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0} & \text{dans } (0, T). \end{cases}$$

Rhéologie : Bingham :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu(\rho)\mathbf{D}\mathbf{u} + \alpha(\rho)\boldsymbol{\Sigma},$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma} = \frac{\mathbf{D}\mathbf{u}}{|\mathbf{D}\mathbf{u}|} & \text{si } \mathbf{D}\mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\Sigma} \in \Lambda & \text{sinon.} \end{cases}$$



$$\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} \in L^2(\Omega)^{d \times d}; |\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})| \leq 1, {}^T \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}, \operatorname{tr} \boldsymbol{\lambda} = 0, \text{ p.p. dans } \Omega\}.$$

Hypothèses : - $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine régulier borné.
- Le modèle mathématique possède une solution régulière

Objectif : Schéma de **semi-discrétisation** en temps **stable** et **convergeant** vers cette solution régulière.

Stratégie : - Formulation de Σ en terme de **projection**,
- Schéma de type **pas de temps fractionnaires**.

$$\begin{cases} \Sigma = \frac{\mathbf{D}\mathbf{u}}{|\mathbf{D}\mathbf{u}|} & \text{si } \mathbf{D}\mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \\ \Sigma \in \Lambda & \text{si } \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (1)$$

$$\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} \in L^2(\Omega)^{d \times d}; |\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})| \leq 1, {}^T\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}, \text{tr } \boldsymbol{\lambda} = 0, \text{ p.p. dans } \Omega\}.$$

Formulation en terme de projection : Pour tout $\ell > 0$,

$$(1) \iff \Sigma = \mathbb{P}_\Lambda(\Sigma + \ell \mathbf{D}\mathbf{u}).$$

$$\begin{cases} \Sigma = \frac{\mathbf{D}\mathbf{u}}{|\mathbf{D}\mathbf{u}|} & \text{si } \mathbf{D}\mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \\ \Sigma \in \Lambda & \text{si } \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (1)$$

$$\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} \in L^2(\Omega)^{d \times d}; |\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})| \leq 1, {}^T\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}, \text{tr } \boldsymbol{\lambda} = 0, \text{ p.p. dans } \Omega\}.$$

Formulation en terme de projection : Pour tout $\ell > 0$,

$$(1) \iff \Sigma = \mathbb{P}_\Lambda(\Sigma + \ell \mathbf{D}\mathbf{u}).$$

Preuve : (\Leftarrow)

- Si $\mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\Sigma \in \Lambda$
- Si $\mathbf{D}\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$: On suppose $\Sigma = \mathbb{P}_\Lambda(\Sigma + \ell \mathbf{D}\mathbf{u})$. Pour $\boldsymbol{\lambda} \in L^2(\Omega)^{d \times d}$ avec ${}^T\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}$ et $\text{tr } \boldsymbol{\lambda} = 0$,

$$\mathbb{P}_\Lambda(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} \boldsymbol{\lambda} & \text{si } |\boldsymbol{\lambda}| \leq 1, \\ \frac{\boldsymbol{\lambda}}{|\boldsymbol{\lambda}|} & \text{si } |\boldsymbol{\lambda}| > 1. \end{cases}$$

On a $|\Sigma + \ell \mathbf{D}\mathbf{u}| > 1$,
Donc

$$\Sigma = \frac{\Sigma + \ell \mathbf{D}\mathbf{u}}{|\Sigma + \ell \mathbf{D}\mathbf{u}|} \iff \Sigma(|\Sigma + \ell \mathbf{D}\mathbf{u}| - 1) \stackrel{(*)}{=} \ell \mathbf{D}\mathbf{u} \Rightarrow |\mathbf{D}\mathbf{u}| = \frac{|\Sigma + \ell \mathbf{D}\mathbf{u}| - 1}{\ell}$$

De (*),

$$\Sigma = \frac{\mathbf{D}\mathbf{u}}{|\mathbf{D}\mathbf{u}|}.$$

- 1 Le modèle mathématique
- 2 Le schéma numérique de semi-discrétisation en temps**
- 3 Analyse du schéma
- 4 Mise en œuvre du schéma
- 5 Perspectives

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, & \rho|_{t=0} = \rho_0, \\ \rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \operatorname{div}(2\mu(\rho)\mathbf{D}\mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div}(\alpha(\rho)\boldsymbol{\Sigma}), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \\ \boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{P}_\Lambda(\boldsymbol{\Sigma} + \ell\mathbf{D}\mathbf{u}). \end{cases}$$

Paramètres numériques : $\delta t = \frac{T}{N}$, r et θ . Initialisation : $\rho^0, \mathbf{u}^0, \mathbf{u}_{\text{div}}^0, p^0, q^0$ et $\boldsymbol{\Sigma}^0$ données

❶ Densité :

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\delta t} + \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \rho^{n+1} = 0.$$

❷ Vitesse et contrainte plastique :

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta t} \left[\frac{1}{2}(\rho^{n+1} + \rho^n)\mathbf{u}^{n+1} - \rho^n \mathbf{u}^n \right] + \rho^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n+1} \operatorname{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n) \\ \quad - \operatorname{div}(2\mu(\rho^{n+1})\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}) + \nabla(2p^n - p^{n-1}) = \operatorname{div}(\alpha(\rho^{n+1})\boldsymbol{\Sigma}^{n+1}), \\ \boldsymbol{\Sigma}^{n+1} = \mathbb{P}_\Lambda(\boldsymbol{\Sigma}^{n+1} + r\alpha(\rho^{n+1})\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1} + \theta(\boldsymbol{\Sigma}^n - \boldsymbol{\Sigma}^{n+1})), \\ \mathbf{u}^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Résolution pratique :

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta t} \left[\frac{1}{2}(\rho^{n+1} + \rho^n)\mathbf{u}^{n+1,k+1} - \rho^n \mathbf{u}^n \right] + \rho^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1,k+1} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n+1,k+1} \operatorname{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n) \\ \quad - \operatorname{div}(2\mu(\rho^{n+1})\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1,k+1}) + \nabla(2p^n - p^{n-1}) = \operatorname{div}(\alpha(\rho^{n+1})\boldsymbol{\Sigma}^{n+1,k}), \\ \boldsymbol{\Sigma}^{n+1,k+1} = \mathbb{P}(\boldsymbol{\Sigma}^{n+1,k} + r\alpha(\rho^{n+1})\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1,k+1} + \theta(\boldsymbol{\Sigma}^n - \boldsymbol{\Sigma}^{n+1,k})). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, & \rho|_{t=0} = \rho_0, \\ \rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \operatorname{div}(2\mu(\rho)\mathbf{D}\mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div}(\alpha(\rho)\Sigma), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \\ \Sigma = \mathbb{P}_\Lambda(\Sigma + \ell\mathbf{D}\mathbf{u}). \end{cases}$$

Paramètres numériques : $\delta t = \frac{T}{N}$, r et θ . Initialisation : $\rho^0, \mathbf{u}^0, \mathbf{u}_{\text{div}}^0, p^0, q^0$ et Σ^0 données

❶ Densité :

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\delta t} + \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \rho^{n+1} = 0.$$

❷ Vitesse et contrainte plastique :

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta t} \left[\frac{1}{2}(\rho^{n+1} + \rho^n)\mathbf{u}^{n+1} - \rho^n \mathbf{u}^n \right] + \rho^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n+1} \operatorname{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n) \\ \quad - \operatorname{div}(2\mu(\rho^{n+1})\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}) + \nabla(2p^n - p^{n-1}) = \operatorname{div}(\alpha(\rho^{n+1})\Sigma^{n+1}), \\ \Sigma^{n+1} = \mathbb{P}_\Lambda(\Sigma^{n+1} + r\alpha(\rho^{n+1})\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1} + \theta(\Sigma^n - \Sigma^{n+1})), \\ \mathbf{u}^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Résolution pratique :

$$\|\mathbf{u}^{n+1,k+1} - \mathbf{u}^{n+1}\| + \|\Sigma^{n+1,k+1} - \Sigma^{n+1}\| \leq C(1 - \theta)^k$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta t} \left[\frac{1}{2}(\rho^{n+1} + \rho^n)\mathbf{u}^{n+1,k+1} - \rho^n \mathbf{u}^n \right] + \rho^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1,k+1} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n+1,k+1} \operatorname{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}_{\text{div}}^n) \\ \quad - \operatorname{div}(2\mu(\rho^{n+1})\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1,k+1}) + \nabla(2p^n - p^{n-1}) = \operatorname{div}(\alpha(\rho^{n+1})\Sigma^{n+1,k}), \\ \Sigma^{n+1,k+1} = \mathbb{P}(\Sigma^{n+1,k} + r\alpha(\rho^{n+1})\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1,k+1} + \theta(\Sigma^n - \Sigma^{n+1,k})). \end{cases}$$

3 Incrément de la pression :

$$\begin{cases} \Delta q^{n+1} = \frac{\rho_{min}}{\delta t} \operatorname{div}(\mathbf{u}^{n+1}), \\ \partial_{\mathbf{n}} q^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

4 Pression et vitesse solénoïdale :

$$\begin{aligned} p^{n+1} &= p^n + q^{n+1}, \\ \mathbf{u}_{\operatorname{div}}^{n+1} &= \mathbf{u}^{n+1} - \frac{\delta t}{\rho_{min}} \nabla q^{n+1}. \end{aligned}$$

- J.-L. Guermond et A.J. Salgado, A splitting method for incompressible flows with variable density based on a pressure Poisson equation, JCP, 2009.
- L. Chupin et T. Dubois, A bi-projection method for Bingham type flows, Comput Math Appl, 2016.

- 1 Le modèle mathématique
- 2 Le schéma numérique de semi-discrétisation en temps
- 3 Analyse du schéma**
- 4 Mise en œuvre du schéma
- 5 Perspectives

Théorème (principe du maximum discret)

Si $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ avec $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$ et $\rho_{\min} \leq \rho_0 \leq \rho_{\max}$,
alors pour tout n vérifiant $1 \leq n \leq N$ on a :

$$\rho_{\min} \leq \rho^n \leq \rho_{\max}.$$

Théorème (principe du maximum discret)

Si $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ avec $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$ et $\rho_{\min} \leq \rho_0 \leq \rho_{\max}$,
alors pour tout n vérifiant $1 \leq n \leq N$ on a :

$$\rho_{\min} \leq \rho^n \leq \rho_{\max}.$$

Preuve : Terme de régularisation $-\epsilon \Delta \rho_\epsilon^{n+1}$ + passage à la limite.

Récurrance :

$$\rho^{n+1} + \delta t \mathbf{u}_{\operatorname{div}}^n \cdot \nabla \rho^{n+1} = \rho^n,$$

$$(\rho^{n+1} - \rho_{\max}) + \delta t \mathbf{u}_{\operatorname{div}}^n \cdot \nabla \rho^{n+1} = (\rho^n - \rho_{\max}),$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho^{n+1} - \rho_{\max}) (\rho^{n+1} - \rho_{\max})^+ + \delta t \underbrace{\int_{\Omega} (\mathbf{u}_{\operatorname{div}}^n \cdot \nabla (\rho^{n+1} - \rho_{\max})^+) (\rho^{n+1} - \rho_{\max})^+}_{=0} \\ = \underbrace{\int_{\Omega} (\rho^n - \rho_{\max}) (\rho^{n+1} - \rho_{\max})^+}_{\leq 0}, \end{aligned}$$

Donc $\rho^{n+1} \leq \rho_{\max}$.

Théorème (stabilité)

Si de plus les paramètres numériques r et θ sont choisis suffisamment petits, alors pour tout $1 \leq n \leq N$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^n\|^2 + \delta t \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{D}\mathbf{u}^{k+1}\|^2 + \delta t^2 \|\nabla p^n\|^2 + \theta \delta t \|\Sigma^n\|^2 \\ \leq C(\|\mathbf{u}^0\|^2 + \delta t^2 \|\nabla p^0\|^2 + \theta \delta t \|\Sigma^0\|^2). \end{aligned}$$

Théorème (stabilité)

Si de plus les paramètres numériques r et θ sont choisis suffisamment petits, alors pour tout $1 \leq n \leq N$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^n\|^2 + \delta t \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{D}\mathbf{u}^{k+1}\|^2 + \delta t^2 \|\nabla p^n\|^2 + \theta \delta t \|\Sigma^n\|^2 \\ \leq C(\|\mathbf{u}^0\|^2 + \delta t^2 \|\nabla p^0\|^2 + \theta \delta t \|\Sigma^0\|^2). \end{aligned}$$

Preuve : • équation du moment $\cdot 2\delta t \mathbf{u}^{n+1}$ + intégration sur Ω :

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\rho^{n+1}} \mathbf{u}^{n+1}\|^2 - \|\sqrt{\rho^n} \mathbf{u}^n\|^2 + \|\sqrt{\rho^n} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|^2 + 4\delta t \|\sqrt{2\mu(\rho^{n+1})} \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}\|^2 \\ = -2\delta t (\nabla(p^n + q^n), \mathbf{u}^{n+1}) - 2\delta t (\alpha(\rho^{n+1}) \Sigma^{n+1}, \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}). \end{aligned}$$

Théorème (stabilité)

Si de plus les paramètres numériques r et θ sont choisis suffisamment petits, alors pour tout $1 \leq n \leq N$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^n\|^2 + \delta t \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{D}\mathbf{u}^{k+1}\|^2 + \delta t^2 \|\nabla p^n\|^2 + \theta \delta t \|\Sigma^n\|^2 \\ \leq C(\|\mathbf{u}^0\|^2 + \delta t^2 \|\nabla p^0\|^2 + \theta \delta t \|\Sigma^0\|^2). \end{aligned}$$

Preuve : • équation du moment $\cdot 2\delta t \mathbf{u}^{n+1}$ + intégration sur Ω :

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\rho^{n+1}} \mathbf{u}^{n+1}\|^2 - \|\sqrt{\rho^n} \mathbf{u}^n\|^2 + \|\sqrt{\rho^n} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|^2 + 4\delta t \|\sqrt{2\mu(\rho^{n+1})} \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}\|^2 \\ = -2\delta t (\nabla(p^n + q^n), \mathbf{u}^{n+1}) - 2\delta t (\alpha(\rho^{n+1}) \Sigma^{n+1}, \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}). \end{aligned}$$

• Équation sur la pression :

$$-2\delta t (\nabla(2p^n - p^{n-1}), \mathbf{u}^{n+1}) \leq \|\sqrt{\rho^n} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|^2 + \frac{\delta t^2}{\rho_1} \left[-\|\nabla p^{n+1}\|^2 + \|\nabla p^n\|^2 - \|\nabla(p^n - p^{n-1})\|^2 \right].$$

Théorème (stabilité)

Si de plus les paramètres numériques r et θ sont choisis suffisamment petits, alors pour tout $1 \leq n \leq N$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^n\|^2 + \delta t \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{D}\mathbf{u}^{k+1}\|^2 + \delta t^2 \|\nabla p^n\|^2 + \theta \delta t \|\Sigma^n\|^2 \\ \leq C(\|\mathbf{u}^0\|^2 + \delta t^2 \|\nabla p^0\|^2 + \theta \delta t \|\Sigma^0\|^2). \end{aligned}$$

Preuve : • équation du moment $\cdot 2\delta t \mathbf{u}^{n+1}$ + intégration sur Ω :

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\rho^{n+1}}\mathbf{u}^{n+1}\|^2 - \|\sqrt{\rho^n}\mathbf{u}^n\|^2 + \|\sqrt{\rho^n}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|^2 + 4\delta t \|\sqrt{2\mu(\rho^{n+1})}\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}\|^2 \\ = -2\delta t(\nabla(p^n + q^n), \mathbf{u}^{n+1}) - 2\delta t(\alpha(\rho^{n+1})\Sigma^{n+1}, \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}). \end{aligned}$$

- Équation sur la pression :

$$-2\delta t(\nabla(2p^n - p^{n-1}), \mathbf{u}^{n+1}) \leq \|\sqrt{\rho^n}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|^2 + \frac{\delta t^2}{\rho_1} \left[-\|\nabla p^{n+1}\|^2 + \|\nabla p^n\|^2 - \|\nabla(p^n - p^{n-1})\|^2 \right].$$

- Équation sur Σ :

$$\begin{aligned} -2\delta t(\alpha(\rho^{n+1})\Sigma^{n+1}, \mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}) \leq 2r \frac{\alpha_{max}^2}{\mu_{min}} \delta t \|\sqrt{2\mu(\rho^{n+1})}\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1}\|^2 \\ + \frac{2\theta(2\theta - 1)}{r} \delta t \|\Sigma^n - \Sigma^{n+1}\|^2 - \frac{2\theta}{r} \delta t \|\Sigma^{n+1}\|^2 + \frac{2\theta}{r} \delta t \|\Sigma^n\|^2. \end{aligned}$$

Théorème

Sous les hypothèses des théorèmes de stabilité, si $\|p^0 - p(t_0)\|_1 \leq C\delta t$ alors :

$$\|\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}^n\| + \|\rho(t_n) - \rho^n\| \leq C\sqrt{\delta t(\delta t + \theta)}.$$

Preuve : Estimations d'énergie mais avec les équations d'erreur : termes de reste en plus.

- A bi-projection method for incompressible bingham flows with variable density, viscosity and yield stress, SINUM, accepté.

Théorème

Sous les hypothèses des théorèmes de stabilité, si $\|p^0 - p(t_0)\|_1 \leq C\delta t$ alors :

$$\|\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}^n\| + \|\rho(t_n) - \rho^n\| \leq C\sqrt{\delta t(\delta t + \theta)}.$$

Preuve : Estimations d'énergie mais avec les équations d'erreur : termes de reste en plus.

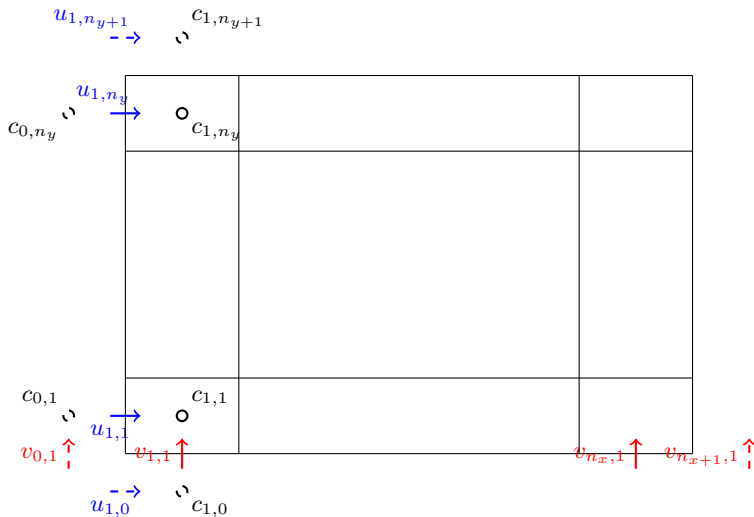
- A bi-projection method for incompressible bingham flows with variable density, viscosity and yield stress, SINUM, accepté.

Bilan : Point fixe : θ proche de 1,
Convergence : θ proche de δt .

- 1 Le modèle mathématique
- 2 Le schéma numérique de semi-discrétisation en temps
- 3 Analyse du schéma
- 4 Mise en œuvre du schéma**
- 5 Perspectives

Discrétisation en espace et implémentation

- Géométrie simple : $\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y)$, schémas de type **volumes finis** sur **grilles décalées**.



- Simulation d'écoulements bi-phasiques : méthode Level Set.
- Implémentation : code **Fortran 90**, bibliothèques **PETSc/MPI**.

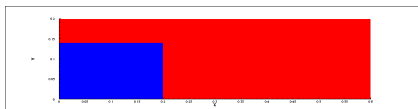


Figure – t=0

- $\rho_{\text{rouge}} = 1$, $\mu_{\text{rouge}} = 0.0001$, $\alpha_{\text{rouge}} = 0$,
 $\rho_{\text{bleu}} = 1500$, $\mu_{\text{bleu}} = 0.1$, $\alpha_{\text{bleu}} = 10$.
- Grille : 384×128 points.

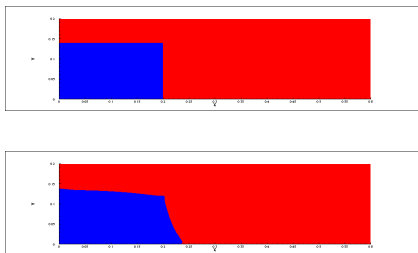


Figure – $t=0$, $t=2$

- $\rho_{\text{rouge}} = 1$, $\mu_{\text{rouge}} = 0.0001$, $\alpha_{\text{rouge}} = 0$,
 $\rho_{\text{bleu}} = 1500$, $\mu_{\text{bleu}} = 0.1$, $\alpha_{\text{bleu}} = 10$.
- Grille : 384×128 points.

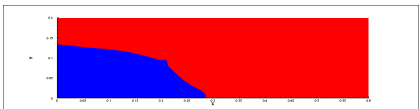
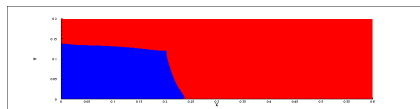
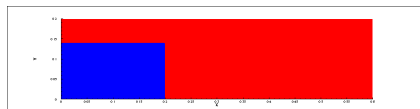


Figure – $t=0$, $t=2$, $t=3$

- $\rho_{\text{rouge}} = 1$, $\mu_{\text{rouge}} = 0.0001$, $\alpha_{\text{rouge}} = 0$,
 $\rho_{\text{bleu}} = 1500$, $\mu_{\text{bleu}} = 0.1$, $\alpha_{\text{bleu}} = 10$.
- Grille : 384×128 points.

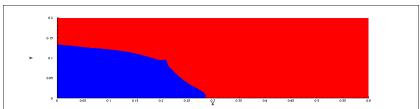
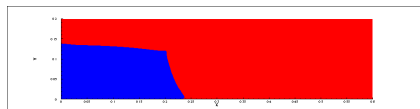
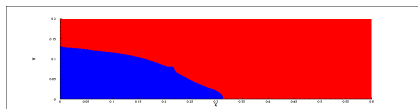
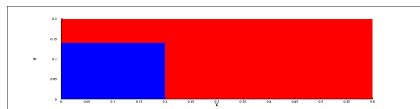


Figure – $t=0$, $t=2$, $t=3$, $t=4$

- $\rho_{\text{rouge}} = 1$, $\mu_{\text{rouge}} = 0.0001$, $\alpha_{\text{rouge}} = 0$,
 $\rho_{\text{bleu}} = 1500$, $\mu_{\text{bleu}} = 0.1$, $\alpha_{\text{bleu}} = 10$.
- Grille : 384×128 points.

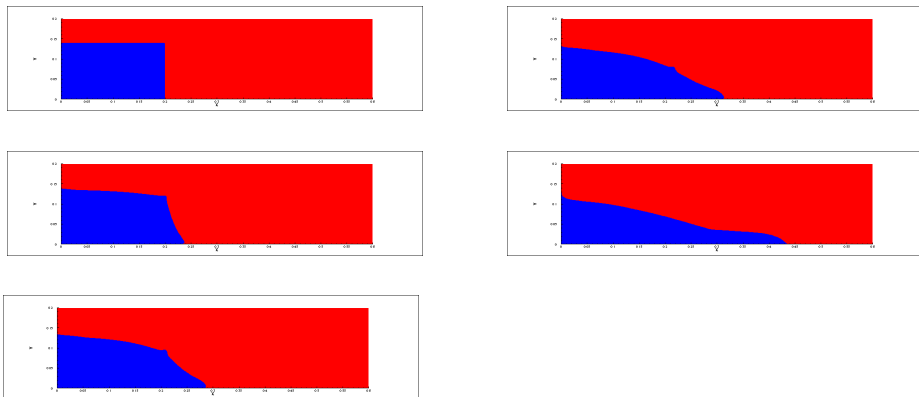


Figure – $t=0$, $t=2$, $t=3$, $t=4$, $t=7$

- $\rho_{\text{rouge}} = 1$, $\mu_{\text{rouge}} = 0.0001$, $\alpha_{\text{rouge}} = 0$,
 $\rho_{\text{bleu}} = 1500$, $\mu_{\text{bleu}} = 0.1$, $\alpha_{\text{bleu}} = 10$.
- Grille : 384×128 points.

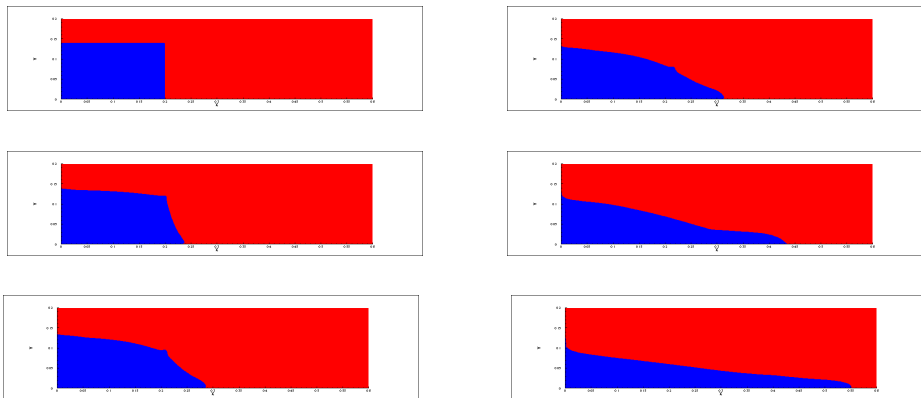


Figure – t=0, t=2 , t=3 , t=4 , t=7 , t=10

- $\rho_{\text{rouge}} = 1$, $\mu_{\text{rouge}} = 0.0001$, $\alpha_{\text{rouge}} = 0$,
 $\rho_{\text{bleu}} = 1500$, $\mu_{\text{bleu}} = 0.1$, $\alpha_{\text{bleu}} = 10$.
- Grille : 384×128 points.

- 1 Le modèle mathématique
- 2 Le schéma numérique de semi-discrétisation en temps
- 3 Analyse du schéma
- 4 Mise en œuvre du schéma
- 5 Perspectives**

- Simulation :

- Comparer le code implémenté : simulations de rupture de barrage avec un fluide visco-plastique.

Y. Liu, N.J. Balmforth, S.Hormozi, D.R. Hewitt, Two-dimensional viscoplastic dambreaks.

- Simulations plus complexes :

Fluide de Bingham poussé par un fluide Newtonien dans une conduite,
Chute de gouttes de fluide visco-plastique.

- Schéma numérique :

- Schéma d'ordre 2 en temps.