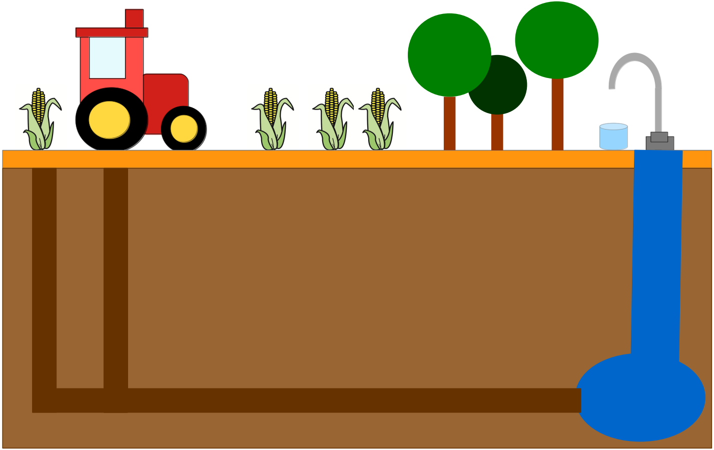
Contrôle optimal sous contrainte d'un modèle hydrogéologique : un problème de pollution des eaux en sous-sol

Éloïse Comte

6ème école EGRIN

Mardi 19 Juin 2018 - Le Lioran

Contexte



Les trois variables du modèle ...

- quantité d'engrais $p(x,t)$ épandue au cours du temps à la surface du sol
- concentration $c(x,t)$ du principal polluant issu de l'engrais dans le sous-sol
- vitesse de déplacement du soluté dans le sous-sol, $v(x,t)$.

$$\begin{cases} R\psi\partial_t c + v\cdot\nabla c - \mathrm{div}(\psi S(v)\nabla c) = -r(c) + (\gamma + p)(1-c) - gc \\ \mathrm{div}(v) = \gamma + p + g, \quad v = -\kappa\nabla\phi \qquad\qquad +CI + CB. \end{cases}$$

R : coefficient de retard
ψ : porosité
$S(v)$: tenseur de dispersion
κ : tenseur de perméabilité

$r(c)$: terme de réaction en solution
γ : apport naturel
g : autres apports ou pertes
ϕ : charge hydraulique

$$S(v) = S_m Id + S_p(v)$$
$$S_p(v) = |v|\left(\alpha_L\epsilon(v) + \alpha_T(Id - \epsilon(v))\right), \text{ avec } \epsilon(v)_{i,j} = \frac{v_i v_j}{|v|^2}.$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \leq 3$
$0 < T \leq \infty$; $J : p \in E \mapsto J(p,c) \in \mathbb{R}$ où

$$J(p,c) = \int_0^T \left(\int_\Omega \Big(f(x,p) - D(x,c) \Big)\, dx \right) e^{-\rho t}\, dt.$$

avec $E_0 \subset \{f \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), 0 \leq f \leq \bar{p}, \text{ p.p. dans } \Omega \times (0,T)\}$.

Problème de contrôle optimal :

$$\max_{p \in E_0} J(p,c)$$

sous contrainte du système d'état pour c et ϕ.

- les bénéfices agricoles sont représentés par f, dépendant de l'apport d'engrais : croissante, strictement concave, continue inférieurement sur $\mathbb{R}^+$
- les dommages environnementaux sont représentés par D, dépendant de la concentration : croissante, strictement convexe, hémicontinue
- $\rho \in]0,1[$ taux d'actualisation.

Problème de contrôle optimal sous contrainte d'un système d'EDP

Trouver

$$\max_{p \in E} J(p, c) = \int_0^T \left(\int_\Omega \Big(f(x, p) - D(x, c) \Big)\, dx \right) e^{-\rho t}\, dt$$

sous contraintes (Ec$p\phi$)

$$\begin{cases} R\psi\partial_t c + v \cdot \nabla c - \mathrm{div}(\psi S(v)\nabla c) = -r(c) + (\gamma + p)(1 - c) - gc \\ \mathrm{div}(v) = \gamma + p + g, \;\; v = -\kappa\nabla\phi \end{cases}$$

+ CI + CB.

Problème de contrôle optimal sous contrainte d'un système d'EDP

Trouver

$$\max_{p\in E} J(p,c) = \int_0^T \left(\int_\Omega \left(f(x,p) - D(x,c) \right) dx \right) e^{-\rho t}\, dt$$

sous contraintes (Ecpϕ)

$$\begin{cases} R\psi\partial_t c + v\cdot\nabla c - \mathrm{div}(\psi S(v)\nabla c) = -r(c) + (\gamma+p)(1-c) - gc \\ \mathrm{div}(v) = \gamma + p + g, \quad v = -\kappa\nabla\phi \end{cases}$$

+ CI + CB.

Trouver p dans $J(p,c)$	$\Longrightarrow$	connaître c pour avoir $J(p)$
$\Uparrow$		$\Downarrow$
connaître p pour avoir (Ec)	$\Longleftarrow$	résoudre (Ecpϕ)

Résultats génériques

(H1) $\kappa \in (\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}))^{N\times N}$ et $\phi_1 \in W^{2,p}(\bar{\Omega})$ avec $p > N$

(H2) $\kappa = \kappa^* Id$ avec $\kappa^* : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, $\kappa^* \in C^1(\bar{\Omega})$ et $\phi_1 \in W^{2,p}(\bar{\Omega})$ avec $p > N/2$

(H3) $\alpha_T > 0$

Théorème 1

Si une des hypothèses est vérifiée et si il existe un ensemble $I \subset \mathbb{R}$ tel que r a une dérivée bornée dans I et $r(0) - \gamma \leq 0$ et $r(1) + g \geq 0$ et $[0,1] \subset I$, ***alors il existe une solution globale** (c^*, p^*, ϕ^*) **au problème de contrôle optimal.***

Outils de preuve :

Théorème de point fixe de Schauder et faible semi-continuité inférieure des fonctions concaves

Question :

Unicité ?

Faibles concentrations : un cas réaliste

Hypothèse de faible concentration du polluant

"Faibles concentrations" : la quantité d'engrais épandue par l'agriculteur est du même ordre que la concentration totale de polluants dans le sol, cette dernière étant très inférieure à 1.

Adimensionnement du modèle :

$$c = c_{ref}\,\hat{c}$$

où $c_{ref} = \epsilon$ est la concentration de référence.

$$c = \epsilon c_{\epsilon,p_\epsilon}, \quad p = \epsilon p_\epsilon, \quad v = v_{\epsilon,p_\epsilon}, \quad \phi = \phi_{\epsilon,p_\epsilon}$$

réaction : $r(\epsilon, \epsilon c_{\epsilon,p_\epsilon})$

Hypothèse de faible concentration du polluant

"Faibles concentrations" : la quantité d'engrais épandue par l'agriculteur est du même ordre que la concentration totale de polluants dans le sol, cette dernière étant très inférieure à 1.

En notant $r_\epsilon(c) := r(\epsilon, \epsilon c)/\epsilon$ on a :

$(\mathcal{P}^\epsilon)$ Modèle adimensionné dépendant de ϵ :

Trouver $(p_\epsilon^*, c_\epsilon^*, \phi_\epsilon^*)$ tel que

$$J(p_\epsilon^*, c_\epsilon^*) = \max_{p_\epsilon \in E_\epsilon} J(p_\epsilon, c_{\epsilon,p_\epsilon}) = \int_{\mathbb{R}_+} \Big(\int_\Omega f(x, p_\epsilon) - D(x, c_{\epsilon,p_\epsilon})\, dx \Big) e^{-\rho t}\, dt$$

$$\begin{aligned} R\psi\partial_t(c_{\epsilon,p_\epsilon}) + v_{\epsilon,p_\epsilon} \cdot \nabla c_{\epsilon,p_\epsilon} - \mathrm{div}(\psi S(v_{\epsilon,p_\epsilon})\nabla c_{\epsilon,p_\epsilon}) \\ = -r_\epsilon(c_{\epsilon,p_\epsilon}) - g c_{\epsilon,p_\epsilon} + p_\epsilon(1 - \epsilon c_{\epsilon,p_\epsilon}) \end{aligned}$$

$$\mathrm{div}(v_{\epsilon,p_\epsilon}) = \epsilon p_\epsilon + g \text{ où } v_{\epsilon,p_\epsilon} = -\kappa \nabla \phi_{\epsilon,p_\epsilon}, + \text{CI} + \text{CB}.$$

$\epsilon \ll 1$

Hypothèse de faible concentration du polluant

"Faibles concentrations" : la quantité d'engrais épandue par l'agriculteur est du même ordre que la concentration totale de polluants dans le sol, cette dernière étant très inférieure à 1.

En notant $r_\epsilon(c) := r(\epsilon, \epsilon c)/\epsilon$ on a :

$(\mathcal{P}^\epsilon)$ Modèle adimensionné dépendant de ϵ :

Trouver $(p_\epsilon^*, c_\epsilon^*, \phi_\epsilon^*)$ tel que

$$J(p_\epsilon^*, c_\epsilon^*) = \max_{p_\epsilon \in E_\epsilon} J(p_\epsilon, c_{\epsilon,p_\epsilon}) = \int_{\mathbb{R}_+} \Big(\int_\Omega f(x, p_\epsilon) - D(x, c_{\epsilon,p_\epsilon})\, dx \Big) e^{-\rho t}\, dt$$

$$\begin{aligned} R\psi\partial_t(c_{\epsilon,p_\epsilon}) + v_{\epsilon,p_\epsilon} \cdot \nabla c_{\epsilon,p_\epsilon} - \mathrm{div}(\psi S(v_{\epsilon,p_\epsilon})\nabla c_{\epsilon,p_\epsilon}) \\ = -r_\epsilon(c_{\epsilon,p_\epsilon}) - g c_{\epsilon,p_\epsilon} + p_\epsilon(1 - \epsilon c_{\epsilon,p_\epsilon}) \end{aligned}$$

$\mathrm{div}(v_{\epsilon,p_\epsilon}) = \epsilon p_\epsilon + g$ où $v_{\epsilon,p_\epsilon} = -\kappa \nabla \phi_{\epsilon,p_\epsilon}$, + CI + CB.

$\epsilon \ll 1$

Modèle adimensionné $(\mathcal{P}^\epsilon)$: pas d'unicité de la solution

Approche

- On construit le problème effectif correspondant $(\mathcal{P}_{eff}) := \lim_{\epsilon\to 0}(\mathcal{P}^\epsilon)$.
- On montre que le problème effectif est **bien posé.**
- De plus, la démarche adoptée nous a permis de prouver que la solution de $(\mathcal{P}^\epsilon)$ converge vers la solution de $(\mathcal{P}_{eff})$.

Théorème 3

Il existe une unique solution globale (p^*, c^*, ϕ) ***au problème effectif*** *avec pour tout* $T > 0$, $c^* \in \mathcal{C}\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T; H^1(\Omega)\right)$ *et* $c^*(x,t) \geq 0$ *p.p. dans* $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, $\phi \in L^\infty(0,T; H^1(\Omega))$.

Difficultés :

- traiter les non linéarités

La limite du contrôle optimal de $(\mathcal{P}^\epsilon)$ est un contrôle optimal de $(\mathcal{P}_{eff})$.

Théorème 2

Soit $x \mapsto r(\epsilon, x)$ dérivable à dérivée bornée sur $[0,1]$ et telle que $r(\epsilon, 0) = 0$, $r(\epsilon, 1) + g \geq 0$. On suppose également que $r_\epsilon(x) := r(\epsilon, \epsilon x)/\epsilon$ converge simplement vers $\tilde{r}$ concave, dérivable à dérivée bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Lorsque $\epsilon \to 0$, toute solution $(p_\epsilon^*, c_\epsilon^*, \phi_\epsilon^*)$ du problème adimensionné converge vers l'unique solution du problème effectif et $\forall T > 0$,

$$\begin{cases} \phi_\epsilon^* \rightharpoonup \phi \text{ dans } L^q(0,T;H^1(\Omega)), \text{ pour tout } q \geq 1, \\ c_\epsilon^* \rightharpoonup c^* \text{ dans } L^2(0,T;H^1(\Omega)),\ c_\epsilon^* \to c^* \text{ dans } L^2(\Omega_T), \text{ p.p. dans } \Omega_T, \\ p_\epsilon^* \rightharpoonup p^* \text{ dans } L^q(\Omega_T), \text{ pour tout } q \geq 1. \end{cases}$$

Difficultés :

1. prouver les convergences
2. passer à la limite (termes non linéaires)
3. prouver que la limite est bien la solution optimale

Idée de preuve :

1) Prouver les convergences

2) Passer à la limite (termes non linéaires) grâce à des résultats de compacité

Comportement limite du système d'état :

$$R\psi\partial_t c + v\cdot\nabla c - \mathrm{div}(\psi S(v)\nabla c) = -\tilde{r}(c) - gc + p \text{ sur } \mathbb{R}_+\times\Omega,$$
$$S(v)\nabla c\cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

où

$$\mathrm{div}(v) = g \text{ sur } \mathbb{R}_+\times\Omega,\ v = -\kappa\nabla\phi \text{ et } \phi = \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega.$$

3) Prouver que la limite est la solution optimale

Comportement limite du problème d'optimisation :

Ce qu'on sait :

$(p_\epsilon^*, c_\epsilon^*) \to (p, c)$ *qui satisfait les équations d'état du problème effectif.*

Question :

est-ce que (p, c) *est la solution optimale de* $(\mathcal{P}_{\textit{eff}})$ *?*

Une réponse :

a priori non ... mais on prouve que (p, c) maximise l'objectif de $(\mathcal{P}_{\textit{eff}})$.

3) Prouver que la limite est la solution optimale

Comportement limite du problème d'optimisation :

Ce qu'on sait :

$(p_\epsilon^*, c_\epsilon^*) \to (p, c)$ *qui satisfait les équations d'état du problème effectif.*

Question :

est-ce que (p, c) *est la solution optimale de* $(\mathcal{P}_{\mathit{eff}})$ *?*

Une réponse :

a priori non ... mais on prouve que (p, c) maximise l'objectif de $(\mathcal{P}_{\mathit{eff}})$.

Soit (p^*, c^*) la solution optimale de $(\mathcal{P}_{\mathit{eff}})$.
On sait que $J(p, c) \leq J(p^*, c^*) := M_{opt}$.
On montre que $J(p^*, c^*) \leq J(p, c)$.

3) Prouver que la limite est la solution optimale

$$J(p,c) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Omega} f(x,p) - D(x,c)\, dx \right) e^{-\rho t}\, dt \geq \overline{\lim_{\epsilon \to 0}}\, J(p_\epsilon^*, c_\epsilon^*) = \overline{\lim_{\epsilon \to 0}}\, M^\epsilon .$$

Est-ce que $\underline{\lim}_{\epsilon \to 0} M^\epsilon \geq M_{opt}$?

3) Prouver que la limite est la solution optimale

L'équation d'état est aussi satisfaite par la limite forte dans $L^2(\Omega_T)$ et p.p. dans Ω_T de $c^*_{\epsilon_{app}}$, où $c^*_{\epsilon_{app}}$ est associée à p^* par

$$R\psi\partial_t c^*_{\epsilon_{app}} + v_{\epsilon_{app}}\cdot\nabla c^*_{\epsilon_{app}} - \mathrm{div}(\psi S(v_{\epsilon_{app}})\nabla c^*_{\epsilon_{app}}) = -r_\epsilon(c^*_{\epsilon_{app}}) - gc^*_{\epsilon_{app}} + p^*(1-\epsilon c^*_{\epsilon_{app}})$$

$$\mathrm{div}(v_{\epsilon_{app}}) = \epsilon p^* + g,\ v_{\epsilon_{app}} = -\kappa\nabla\phi_{\epsilon_{app}} \text{ dans } \Omega_T,$$

+CI+CB.

Par définition de M^ϵ, $J(p^*, c^*_{\epsilon_{app}}) \leq J(p^*_\epsilon, c^*_\epsilon) := M^\epsilon$.

3) Prouver que la limite est la solution optimale

Comme p^* ne dépend pas de ϵ, $c^*_{\epsilon_{app}} \to c^*$ et $x \mapsto J(p^*, x)$ est continue inférieurement,

$$\lim_{\epsilon \to 0} J(p^*, c^*_{\epsilon_{app}}) = J(p^*, c^*).$$

Alors

$$M_{opt} = J(p^*, c^*) = \lim_{\epsilon \to 0} J(p^*, c^*_{\epsilon_{app}}) \leq \underline{\lim}_{\epsilon \to 0} J(p^*_\epsilon, c^*_\epsilon) := \underline{\lim}_{\epsilon \to 0} M^\epsilon.$$

Finalement, on prouve que

$$J(p^*, c^*) \leq \underline{\lim}_{\epsilon \to 0} M^\epsilon \leq \overline{\lim}_{\epsilon \to 0} M^\epsilon \leq J(p, c) \leq J(p^*, c^*)$$

$$i.e.\ J(p, c) = J(p^*, c^*) := M_{opt}.$$

On conclut que $(p, c) = (p^*, c^*)$ grâce au résultat d'unicité.

Théorème 3.3

On suppose $p \in [0, \bar{p}] \mapsto f(x,p)$ *et* $c \in [0, +\infty[\mapsto D(x,c)$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ $\forall x \in \Omega$ *et* r *de classe* $\mathcal{C}^1$*. Soit* (p^*, c^*) *la solution de* $\mathcal{P}_{E_{0T}}$*. Il existe* $\mu \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ *tel que*

$$\frac{\partial f}{\partial p}(x, p^*(t,x)) = \mu(t,x)\chi_{\mathcal{S}}(x) \text{ dans } \Omega_T$$

satisfaisant la condition terminale

$$R\psi\mu(T,x) = \nu\frac{\partial D}{\partial c}(x, c^*(T,x)) \text{ dans } \Omega$$

et l'équation

$$R\psi\partial_t\mu = -v \cdot \nabla\mu - \mathrm{div}(\psi S(v)\nabla\mu) + r'(c^*)\mu + \mu R\psi\rho - \frac{\partial D}{\partial c^*}(x, c^*) \text{ dans } \Omega_T$$

munie des conditions aux bords.

Résultats numériques

Introduction du flux

$v_c = -S(v)\psi\nabla c + vc$ et $v_\mu = -S(v)\psi\nabla\mu - v\mu$

$$R\psi\partial_t c + \mathrm{div}(v_c) = -r(c) + p\chi_S$$

$$R\psi\partial_t\mu + \mathrm{div}(v_\mu) = -r'(c)\mu - R\psi\rho\mu + \frac{\partial D}{\partial c}(x, c) + g\mu$$

+ conditions aux bords, initiale, terminale.

Discrétisation par Éléments Finis Mixtes

Unicité, stabilité et convergence de la solution discrétisée

- pour le problème en concentration
- pour le problème adjoint

h : diamètre des mailles ; τ : pas de temps

Calcul de ϕ_h vérifiant l'équation d'incompressibilité.

Étape 0 : initialisation
$i = 0$, $p_h^{n,i} = p_h^n$ données quelconques.
Pour $i = i + 1$:

Étape 1 : résolution des problèmes en concentration et adjoint discrets

calcul des c_h^n vérifiant le problème en concentration, pour $p = p_h^n$,

calcul des μ_h^n vérifiant le problème adjoint.

Étape 2 : gradient conjugué non linéaire

$$f'(p_h^{n,i}) - \mu_h^n \leftarrow p_h^{n,i+1}$$

Critère d'arrêt : $\max_{1\leq n\leq N} \left| p_h^{n,i+1} - p_h^{n,i} \right| < s$, *s=seuil donné.*

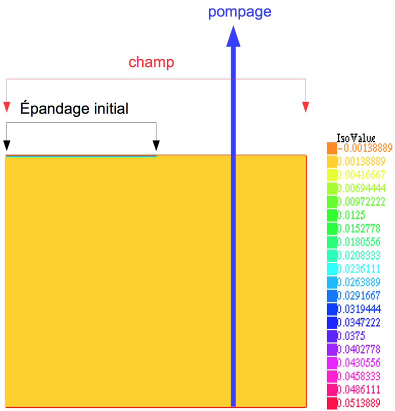


FIGURE: Quantité d'engrais initialement épandue.

Résultats numériques

Illustrations

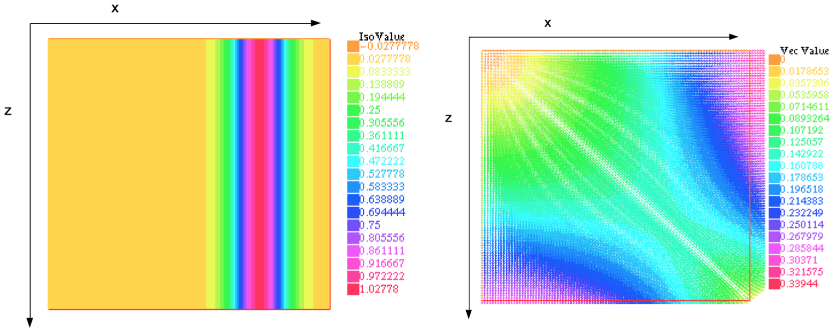


FIGURE: Fonction pompage et vecteur vitesse.

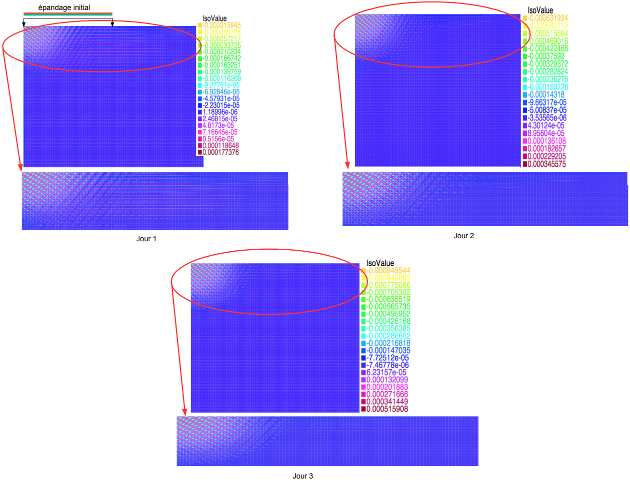


FIGURE: Concentration (résolution initiale) aux jours 1, 2 et 3.

Convergence de l'algorithme : $\frac{\sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{h=0}^{h_{max}} \left| p_h^{n,i+1} - p_h^{n,i} \right|}{n_{max} \times h_{max}}$

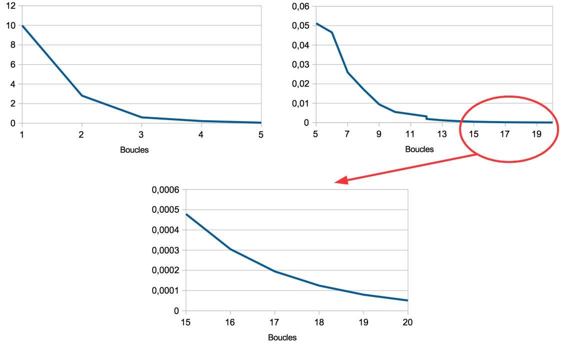


FIGURE: Moyenne des $\left| p_h^{n,i+1} - p_h^{n,i} \right|$ pour vingt boucles de calcul ($1 \leq i \leq 20$).

Étude de l'objectif :
$\int_0^T \left(\int_{\mathcal{S}} f(p) e^{-\rho t}\, dx - \int_\Omega D(c) e^{-\rho t}\, dx \right) dt - e^{-\rho T} \int_\Omega D(c)\, dx.$

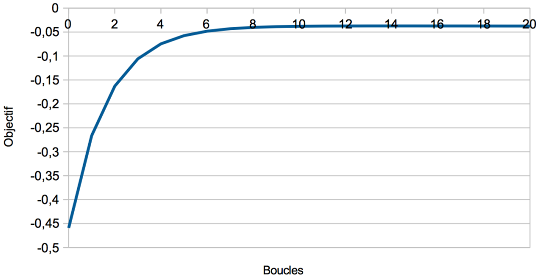


FIGURE: Objectif en fonction de vingt boucles.

Résultats numériques

Illustrations

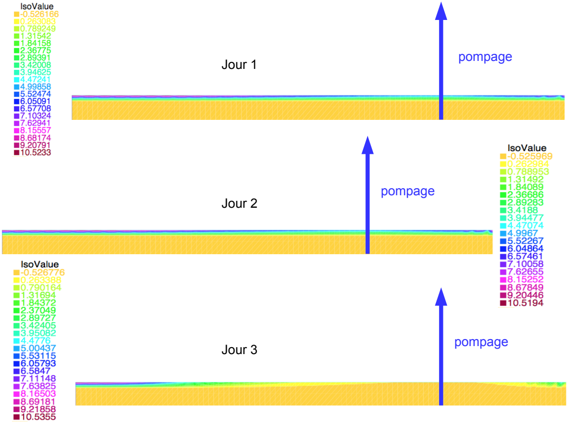


FIGURE: Approximation de la solution optimale après 15 boucles aux jours 1, 2 et 3 ($p_h^{100,15}$, $p_h^{200,15}$, $p_h^{300,15}$).

Merci de votre attention

Références

1. E. Augeraud-Véron, C. Choquet and **É. Comte**.
Optimal control for a groundwater pollution ruled by a convection-diffusion-reaction problem. J. of Optim. Theory and Appl, 2017.

2. E. Augeraud-Véron, C. Choquet and **É. Comte**.
Existence, uniqueness and asymptotic analysis of optimal control problems for a model of groundwater pollution.
Accepté avec corrections mineures dans Control, Opt. & Calc. of Var.

3. **É. Comte**.
Mixed Finite Element Method and numerical analysis of a convection-diffusion-reaction model in a porous media. **En préparation**.