L'existence et le comportement limite de solutions d'équations elliptiques avec changement de signe pour la nonlinéarité

Florica C. Cîrstea

School of Mathematics and Statistics, The University of Sydney, NSW 2006, Australia

e-mail: `florica.cirstea@sydney.edu.au`

On étudie le comportement asymptotique des solutions positives d'équations elliptiques non linéaires dans un domaine au voisinage de zéro. Plus précisément, nous déterminons la structure de l'ensemble des solutions $u \in C^2(B_1(0) \setminus \{0\})$ de

$$-\Delta u = \frac{u^{2^*(s)-1}}{|x|^s} - \mu u^q \quad \text{dans } B_1(0) \setminus \{0\}, \tag{1}$$

où $B_1(0)$ est la boule de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$), $q > 1$, $\mu > 0$ et $s \in (0, 2)$. On dénote par $2^*(s) := \frac{2(n-s)}{n-2}$ l'exponent critique pour l'opérateur de Hardy–Sobolev. Nous présentons une classification complète des singularités de solutions positives de l'équation (1), révélant jusqu'à trois types de comportements asymptotiques. Cette présentation est fondée sur les oeuvres de collaboration [1, 2] avec Frédéric Robert (Université de Lorraine) et Jérôme Vétois (McGill University).

References

[1] F.C. Cîrstea and F. Robert, Sharp asymptotic profiles for singular solutions to an elliptic equation with a sign-changing nonlinearity, *Proc. London Math. Soc. (3)*, **114**(2017), 1–34.

[2] F.C. Cîrstea, F. Robert and J. Vétois, Existence of sharp asymptotic profiles for singular solutions to an elliptic equation with a sign-changing nonlinearity, in preparation.

Anciennes et nouvelles bornes sur les valeurs propres du Laplacien

Cristian ENACHE

American University of Sharjah

cenache@aus.edu

Résumé. Dans cet exposé, nous nous intéressons aux valeurs propres du Laplacien sur diverses classes de domaines de mesure donnée : domaines planaires simplement connexes à frontière lipschitzienne, domaines n-dimensionnels à frontière lisse, polygones planaires à n-côtés, solides de Platon et surfaces fermées bidimensionnelles dans R^3, topologiquement équivalentes à une sphère. Dans chaque cas, nous considérons certaines quantités impliquant les valeurs propres de Dirichlet, Neumann et Beltrami, pour lesquelles nous obtenons de nouvelles bornes. Nos investigations utilisent des caractérisations variationnelles de valeurs propres, quelques propriétés des applications conformes, des fonctions de Bessel et des domaines symétriques, des inégalités isopérimétriques pour des moments d'inertie, respectivement une méthode de problèmes auxiliaires anisotropes. Cet exposé est basée sur quelques résultats obtenus récemment avec G.A. Philippin (Canada).

References

[1] C. Enache, G.A. Philippin, On some inequalities for low eigenvalues of closed surfaces in R^3, *Applicable Analysis*, **96** (2017), 2516-2525.

[2] C. Enache, G.A. Philippin, On some isoperimetric inequalities involving eigenvalues of symmetric free membranes, *Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik*, **95**(4) (2015), 424-430.

[3] C. Enache, G.A. Philippin, Some isoperimetric inequalities for frequencies of symmetric fixed membranes, *Applied Mathematics Letters*, **50** (2015), 10-15.

[4] C. Enache, G.A. Philippin, Some inequalities involving eigenvalues of the Neumann Laplacian, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **36** (2013), 2145-2153.

Inégalités optimales de Sobolev sur les espaces courbés: résultats de rigidité

Alexandru Kristály

Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca, Romania

alexandrukristaly@yahoo.com

Nous présentons quelques résultats de rigidité pour les variétés riemanniennes complètes soutenant les inégalités Sobolev du premier et second ordre. Nos résultats dépendent profondément de la courbure de la variété riemannienne. La présentation est basée sur les travailles [1], [2] et [3].

References

[1] E. Barbosa, A. Kristály, Second-order Sobolev inequalities on Riemannian manifolds with nonnegative Ricci curvature, *Bull. London Math. Soc.*, in press, 2017.

[2] , A. Kristály, Sharp uncertainty principles on Riemannian manifolds: the influence of curvature, *J. Math. Pures Appl.* , in press, 2017.

[3] A. Kristály, Metric measure spaces supporting Gagliardo-Nirenberg inequalities: volume noncollapsing and rigidities, *Calc. Var. Partial Differential Equations* , **55**(2016), no. 5, Art. 112, 27 pp.

Analyse asymptotique en dimension deux de quelques fonctionnelles du type Ginzburg-Landau

Petru Mironescu

Université Claude Bernard Lyon 1 et Institutul de Matematică Simion Stoilow al Academiei Române

mironescu@math.univ-lyon1.fr

Nous considérons l'énergie $E_\varepsilon(u) = \int_\Omega [(1/2)|\nabla u|^2 + (1/\varepsilon^2)W(u)]$. Ici, $W(u) := (1/4)(1-|u|^2)^2$ est le potentiel standard de Ginzburg-Landau, Ω est un domaine lisse simplement connexe dans le plan, et la donnée au bord est $g : \partial\Omega \to \mathbb{S}^1$. En général, les minimiseurs ne sont pas uniques. Néanmoins, d'après un résultat de Ye et Zhou, ils le sont pour ε petit, si g est suffisamment lisses et de degré topologique nul. Nous montrons que l'unicité reste encore vraie si g a la régularité naturelle, à savoir $g \in H^{1/2}$. Collaboration avec Alberto Farina.

Dans une autre direction, nous déterminons le comportement asymptotique des points critiques de l'énergie dans un domaine Ω fortement étoilé, lorsque le potentiel standard est remplacé par un potentiel qui s'annule le long d'une courbe de Jordan, sans aucune hypothèse de symétrie. Collaboration avec Itaï Shafrir.

Inégalités de Hardy sur les variétés Finsler

Ágnes Mester

Institute of Applied Mathematics, Óbuda University, Budapest, Hungary

mester.agnes@yahoo.com

Nous établissons des inégalités de Hardy sur une variété Finsler (M, F). Nous prouvons que la superharmonicité d'une fonction de poids fournit une condition suffisante pour obtenir des inégalités de Hardy. Plus précisément, quand ρ est une fonction de poids non négative telle que $-\boldsymbol{\Delta}\rho \geq 0$ sur $\Omega \subset M$ en sens faible, où $\boldsymbol{\Delta}$ est l'opérateur de Finsler-Laplace, on a l'inégalité de Hardy

$$\frac{1}{4}\int_\Omega \frac{u^2}{\rho^2} F^{*2}(x, D\rho)\ \mathsf{dm}(x) \leq \int_\Omega F^{*2}(x, Du)\ \mathsf{dm}(x), \forall u \in C_0^\infty(M).$$

En utilisant quelques généralisations de ce résultat, nous obtenons une inégalité de type Cacciop-poli, une inégalité pondérée de Gagliardo–Nirenberg et un principe d'incertitude. Finalment, nous prouvons les inégalités de Hardy sur les variétés Finsler de type Cartan–Hadamard, en choisissant la fonction de poids comme la fonction de distance.

Regularité des solutions des equations elliptiques non-variationnels

Santiago Montaner Garcia

Université Clermont Auvergne, France

santiagomontanergarcia@gmail.com

Dans cet exposé on va montrer un résultat sur l'integrabilité L^p, $p>1$, des derivées secondes des solutions aux equations elliptiques non-variationnels quand on suppose que les derivées secondes n'appartient qu'à L^1_{loc}. L'hypotèse sur les coefficients de l'operateur elliptique est une condition de continuité de type Dini. On montre aussi un contrexemple qui prouve que ce condition de continuité de type Dini est presque optimal et un contrexemple relatif a la regularité BMO des derivées secondes. Ces resultats sont analogues aux resultats dans [1, 4] pour solutions des equations elliptiques variationnels.

Nous supposons que $A(x)=(a_{ij}(x))$ est une matrice à coefficients réeles symétriques telle que il y à un nombre $\lambda>0$ qui verifie

$$\lambda|\xi|^2 \le A(x)\xi\cdot\xi \le \lambda^{-1}\left|\xi\right|^2,$$

pour tout $\xi\in\mathbb{R}^n,\ x\in\Omega$, où $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ est un ouvert borné.

On va considérer solutions des operateurs á coefficients continus de la forme

$$Lu = tr\left(AD^2u\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}u. \tag{2}$$

On rappelle le suivant resultat de regularité [3, Lemma 9.16]: Soient p,q telles que $1<p<q<\infty$ et soit f appartenant à $L^q(\Omega)$. Soit u appartenant $W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ et verifie $Lu=f$ dans Ω, alors

$$u\in W^{2,q}_{loc}(\Omega). \tag{3}$$

Ce résultat classique ne considére pas les cas $p=1$. Nous remarquons que (3) est vrai pourvu que les coefficients sont seulement continus. Par contre, ce condition est très faible pour améliorer l'integrabilit des derives secondes quand elles n'appartient qu'à L^1_{loc}. Neanmoins, une condition de type Dini est suffisant pour nôtre objectif. La condition de continuité de type Dini qu'on va supposer sur la matrice de coefficients est la suivante:

$$|A(x)-A(y)|\le\theta(|x-y|),$$

où $\theta:[0,1]\to[0,1]$ est une fonction monotone non-croissant qui verifie

$$\int_0^1 \frac{\theta(t)}{t}\,dt < +\infty. \tag{4}$$

References

[1] H. Brezis. *On a conjecture of J. Serrin.* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. **19**, 4 (2008) 335–338.

[2] L. Escauriaza, S. Montaner. *Some remarks on the L^p regularity of second derivatives of solutions to non-divergence elliptic equations and the Dini condition.* Rend. Lincei-Mat. Appl. **28** (2017) 49-63.

[3] D. Gilbarg, N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[4] T. Jin, V. Maz'ya, J. Van Schaftingen. *Pathological solutions to elliptic problems in divergence form with continuous coefficients.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris **347**, (13-14) (2009) 773–778.

Solutions approximatives pour le système différentiel du télégraphe

Gheorghe Moroşanu

Central European University, Budapest & Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca

morosanug@ceu.edu

Considérons dans $D = \{(x,t);\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ le système différentiel du télégraphe (voir, par exemple, [4])

$$\begin{cases} Lu_t - v_x + Ru = f_1(x,t)\,, \\ Cv_t - u_x + Gv = f_2(x,t)\,. \end{cases} \tag{5}$$

En pratique $0 < L =$ **inductance**; $0 \leq R =$ **résistance**; $0 < C =$ **capacité** par unité de longueur; $0 \leq G =$ **conductance**; $f_1(x,t) =$ **tension** par unité de longueur imprimée le long de la ligne en série avec elle; $f_2(x,t) = 0$; $u = u(t,x) =$ **intensité** du courant circulant dans la ligne; $v = v(t,x) =$ **tension** sur la ligne.

Nous associons à (5) certaines conditions aux limites, par exemple,

$$v(0,t) = ru(0,t),\ -u(1,t) = h(v(1,t)),\ 0 < t < T, \tag{6}$$

et les conditions initiales

$$u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x),\ 0 < x < 1\,. \tag{7}$$

Ici h est une fonction continue non décroissante. Si h est linéaire, alors les deux équations dans (6) expriment la loi d'Ohm. R, G et r pourraient être des fonctions non linéaires.

Pour l'existence et l'unicité de la solution (u,v) du problème (5), (6), (7) voir, par exemple, [5, Chapitre III]. Suivant une idée de J. L. Lions, nous construisons des régularisations du problème (5), (6), (7) en ajoutant les termes $-\varepsilon u_{tt}$ et $-\varepsilon v_{tt}$, $\varepsilon > 0$, aux équations de (5), plus quelques conditions à $t = T$ pour u et v (plus précisément, soit $u(\cdot,T) = u_T,\ \ v(\cdot,T) = v_T$ ou $u_t(\cdot,T) = 0,\ \ v_t(\cdot,T) = 0$) pour obtenir des problèmes complets. Les solutions de ces nouveaux problèmes sont **plus régulières** (par rapport à t) que (u,v), et pour ε assez petit elles approchent (u,v) (voir [1] et [2]).

D'autre part, si l'inductance L intervient dans (5) est assez petit et R est une constante positive, alors (u,v) est proche de la solution (**plus régulière**) du problème parabolique obtenu en remplaçant $L = 0$ dans (5) et en supprimant la condition $u(x,0) = u_0(x),\ \ 0 < x < 1$ (cf [3]) .

References

[1] L. Barbu and G. Moroşanu, Elliptic-like regularization of a fully nonlinear evolution inclusion and applications, *Comm. Contemp. Math.*, **19** (2017), No. 5, 1650037, 16 pp.

[2] L. Barbu and G. Moroşanu, Elliptic-like regularization of semilinear evolution equations and applications to some hyperbolic problems, *J. Math. Anal. Appl.*, **449** (2017), No. 2, 966-978.

[3] L. Barbu and G. Moroşanu, *Singularly Perturbed Boundary-Value Problems*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2007.

[4] K. L. Cooke and D. W. Krumme, Differential-difference equations and nonlinear initial boundary-value problems for linear hyperbolic partial differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **24** (1968), 372–387.

[5] G. Moroşanu, *Nonlinear Evolution Equations and Applications*, D. Reidel, Dordrecht–Boston–Lancaster–Tokyo, 1988.

Un problème de minimisation pour la première valeur propre du laplacien avec un grand terme de transport

Emmanuel Russ

University Joseph Fourier - Grenoble 1, Grenoble, France

Emmanuel.Russ@ujf-grenoble.fr

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné de classe C^2 et $L = -\Delta + v \cdot \nabla$ sur Ω avec condition de Dirichlet au bord, où v est un champ de vecteurs borné sur Ω. On considère la valeur propre principale minimale λ_1, et la fonction propre principale associée φ, sous la contrainte $\|v\|_\infty \leq \tau$ et on montre des propriétés asymptotiques de λ_1 et φ quand $\tau \to +\infty$. Il s'agit d'un travail commun avec François Hamel et Luca Rossi.

L'équation du milieux poreux avec avec une pression nolocale

Diana Stan

Basque Center for Applied Mathematics

dstan@bcamath.org

Nous fournissons une description assez complète des résultats obtenus dans les dernieres années sur l'équation de diffusion non linéaire $u_t = \nabla \cdot (u^{m-1}\nabla(-\Delta)^{-s}u)$, qui décrit le mouvement d'un fluide à travers d'un milieu poreux entrané par une pression non locale. Nous considérons des paramètres constants $m > 1$ et $0 < s < 1$, nous supposons que les solutions sont non négatives, et le problème se pose dans tout l'espace. Nous présentons une théorie de l'existence des solutions, des résultats sur l'unicité et la relation avec d'autres modèles. De plus, nous prouvons de nouveaux resultat comme l'existence des solutions auto-similaires pour $N = 1$ et $m > 2$, et le comportement asymptotique des solutions lorsque $N = 1$. Les cas $m = 1$ et $m = 2$ étaient plutôt bien connus.

References

[1] D. Stan, F. del Teso, J.L. Vázquez, Existence of weak solutions for a general porous medium equation with nonlocal pressure, submitted (2016), arXiv:1609.05139.

[2] D. Stan, F. del Teso, J.L. Vázquez, Porous medium equation with nonlocal pressure, to appear in Special Volume Dedicated to Profs. Haim Brezis and Louis Nirenberg.