UNE SOLUTION DU PROGRAMME DE MULTIPLICATION RÉELE EN CARACTÉRISTIQUE POSITIVE

T.M. GENDRON

Le programme de Multiplication Réelle de Manin est une approche au XIIème problème de Hilbert dans le cas des extensions quadratiques réelles de $\mathbb{Q}$, qui propose utiliser les tores quantiques au lieu des courbes elliptiques dans la solution donné par Fueter-Weber dans le cas des extensions quadratiques complexes. On define *l'invariante modulaire quantique* comme une fonction modulaire à valeurs multiples

$$j^{\mathrm{qt}} : \mathbf{R} \multimap \mathbf{R}$$

où $\mathbf{R} = \mathbb{R}$ (voir [1]) ou la completion k_∞ de $k = \mathbb{F}_q(T)$ par rapport à la place en ∞ (voir [2], [3]). Si $K = k(f)$ est quadratique et réelle sur k (où f est une unité) et $H_{\mathcal{O}_K}$ est le corps de classes de Hilbert associé a la clôture intégrale $\mathcal{O}_K$ de $\mathbb{F}_q[T]$ en K, on demontre [4] que

$$H_{\mathcal{O}_K} = K(\mathsf{N}(j^{\mathrm{qt}}(f))), \quad \text{où} \quad \mathsf{N}(j^{\mathrm{qt}}(f)) := \prod_{\alpha \in j^{\mathrm{qt}}(f)} \alpha.$$

Si $\mathfrak{M} \subset K$ est un idéal, on define le *corps de classes étroit avec unités* $K^{\mathfrak{M}}$: une extension finie du corps de classes étroit qui contient une contribution additionnelle qui provient de $\mathcal{O}_M^\times$. On associe a f le *module de Drinfeld quantique* ρ_f^{qt} – une généralisation de la notion de module de Drinfeld dont les points sont à valeurs multiples. Enfin on demontre [5] que

$$K^{\mathfrak{M}} = H_{\mathcal{O}_K}(\mathsf{Tr}(\rho_f^{\mathrm{qt}}[\mathfrak{M}]),\ \mathsf{Tr}(\rho_{f^{-1}}^{\mathrm{qt}}[\mathfrak{M}]))$$

ou $\mathsf{Tr}(\rho_f^{\mathrm{qt}}[\mathfrak{M}]),\ \mathsf{Tr}(\rho_{f^{-1}}^{\mathrm{qt}}[\mathfrak{M}])$ sont les groupes des traces des points de $\mathfrak{M}$-torsion des modules $\rho_f^{\mathrm{qt}}, \rho_{f^{-1}}^{\mathrm{qt}}$.

References

[1] Castaño Bernard, C. & Gendron, T.M., Modular invariant of quantum tori. *Proc. Lond. Math. Soc.* **109** (2014), Issue 4, 1014–1049.

[2] Demangos, L. & Gendron, T.M., Quantum j-Invariant in Positive Characteristic I: Definitions and Convergence. Arch. Math. **107** (1), 23–35 (2016).

[3] Demangos, L. & Gendron, T.M., Quantum j-Invariant in Positive Characteristic II: Formulas and Values at the Quadratics. Arch. Math. **107** (2), 159–166 (2016).

[4] Demangos, L. & Gendron, T.M., A Solution to the Real Multiplication Program in Positive Characteristic I: Quantum Modular Invariant and Hilbert Class Fields. (2017) arXiv:1607.03027

[5] Demangos, L. & Gendron, T.M., A Solution to the Real Multiplication Program in Positive Characteristic II: Quantum Drinfeld Modules and Ray Class Fields. (2017). arXiv:1709.05337

Instituto de Matemáticas – Unidad Cuernavaca, Universidad Nacional Autónoma de México, Av. Universidad S/N, C.P. 62210 Cuernavaca, Morelos, México

E-mail address: `tim@matcuer.unam.mx`

Date: September 22, 2017.