

**Ecole Doctorale de Physique de la Région Parisienne  
(ED107)**

**COURS**

# **Gravitation relativiste et expérience**

**Thibault Damour**

Institut des Hautes Études Scientifiques

Ce cours exposera en détail, sur un certain nombres d 'exemples (tests du principe d'équivalence, système solaire, pulsars binaires, ondes gravitationnelles,...) comment on compare la relativité générale à des faits expérimentaux, en expliquant les dérivations du coté théorique depuis les équations d'Einstein , jusqu'aux prédictions observables, et, du coté expérimental, quels sont les derniers résultats expérimentaux et comment ils confirment la théorie d'Einstein.

Le cours sera "self-contained" et ne nécessitera comme pré-requis que la Relativité Restreinte

5 séances de deux heures

Le mercredi de 10h à 12 h

Du mercredi 6 novembre au mercredi 4 décembre 2013

Amphi Léon Motchane, IHES

<http://www.ihes.fr>

35, Route de Chartres,

Bures-sur-Yvette

comment venir ,

Contacts :

Thibault Damour [damour@ihes.fr](mailto:damour@ihes.fr)

Gilles Montambaux, directeur-adjoint de l'Ecole Doctorale [gilles.montambaux@u-psud.fr](mailto:gilles.montambaux@u-psud.fr)

# RG2: Relativité Générale

- bibliographie succincte
- Landau-Lifchitz, vol 2, "Théorie des Champs"
  - S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology"
  - N. Straumann "General Relativity" Second Edition, Springer 2013

aspects mathématiques: Y. Choquet-Bruhat [Analysis, Manifolds and Physics, GR and the Einstein Eqs., Oxford U. Press 2009]

- RG et expérience
- T. Damour, "Experimental Tests of Gravitational Theory" sur pdg.lbl.gov
  - C.M. Will, Living Review on Relativity 9, 3 (2006)

## Rappels 1<sup>re</sup> cours

Localement

(ou le long d'une courbe)

$$g_{\mu\nu}(x^\lambda) \xrightarrow{X^\alpha} g_{\mu\nu}(X^\lambda) = \eta_{\alpha\beta} + O((\Delta X)^2)$$



$\tilde{V}$   $V_{||}$   $P'$   $V'|_{P'}$   $V'|_P = V'|_P - \omega^{\mu}_{\nu}(dx^\lambda) V^\nu$

transport parallèle infinitésimal      espace-temps plat calculateur  $X^\lambda$

connexion de Levi-Civita  $\omega^\mu_{\nu\rho} = \Gamma^\mu_{\nu\lambda} dx^\lambda$

dérivée covariante

$$\nabla_\lambda V^\mu = \partial_\lambda V^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} V^\nu$$

$$\nabla_\lambda V_\mu = \partial_\lambda V_\mu - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} V_\sigma$$

$$\boxed{\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})}$$

dérivée différentielle covariante:  $DV^\mu := dx^\lambda \nabla_\lambda V^\mu = dV^\mu + \omega^\mu_{\nu\sigma} V^\sigma$

# Courbure : plusieurs facettes

$$1. \text{ Comptage} : g_{\mu\nu}(\alpha) = g_{\mu\nu}(0) + \frac{m(m+1)}{2} \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^k \partial x^l} \Delta x^k \Delta x^l + \dots$$

$$\text{modulo } X^\alpha(\alpha) = X^\alpha(0) + \frac{X^\alpha_{\mu\nu}}{m \times m} \Delta x^\mu \Delta x^\nu + \frac{1}{2} \frac{X^\alpha_{\mu\nu\lambda}}{m \times \frac{m(m+1)}{2}} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \Delta x^\lambda + \dots$$

liberte  $m^2 - \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$

pour éliminer  $g_{\mu\nu}(0)$

$X^\alpha_{\mu\nu}$  détermine      impossible d'éliminer  $g_{\mu\nu}, g_{\lambda\mu}$   
                                → il reste

$\frac{m^2(m+1)^2 - m^2(m+1)(m+2)}{4} = \frac{m^2(m^2-1)}{12}$

combinaisons des  $\partial_{x^\lambda} g_{\mu\nu}$  inéliminables

2. transport parallèle holonomie après retour en  $P$

$$V_{\parallel}^{\mu}|_P - V_P^{\mu} = - S L^{\mu}_{\nu} (d_1 x^\alpha, d_2 x^\beta) V^\nu$$

$$S L^{\mu}_{\nu} = R^\mu_{\nu\alpha\beta} d_1 x^\alpha d_2 x^\beta = \frac{1}{2} R^\mu_{\nu\alpha\beta} d_1 x^\alpha d_2 x^\beta$$

Cartan:  $\boxed{\omega^\mu_{\nu} = \Gamma^\mu_{\nu\lambda} dx^\lambda \rightarrow S L^{\mu}_{\nu} = d\omega^\mu_{\nu} + \omega^\mu_{\sigma\lambda} \omega^\sigma_{\nu}}$

3. commutation des  $\nabla_\mu$ ?  $(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) V^\nu = R^\mu_{\nu\alpha\beta} V^\nu$

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) V_\nu = - R^\sigma_{\nu\alpha\beta} V_\sigma$$

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\nu\beta}$$

$$- \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\nu\alpha}$$

$$= \nabla_\alpha \Gamma^\mu_{\{\nu\beta\}} - \nabla_\beta \Gamma^\mu_{\{\nu\alpha\}}$$

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta}$$

tensor de courbure

tensor de Riemann-Christoffel

[1]

## Propriétés algébriques du tenseur de courbure

coordonnées  
locales cartésiennes

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}^{\circ} = g_{\mu\nu} R^{\circ}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} - \partial_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - \partial_{\nu\beta} g_{\mu\alpha})$$

Tableau de Young

$\mu$	$\alpha$
$\nu$	$\beta$

$$+ O(\partial g^2)$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}^{\circ} = -R_{\mu\nu\beta\alpha}^{\circ} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}^{\circ}$$

$$\sum_{\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}^{\circ} = 0$$

# composantes indépendantes:  $\frac{n^2(n^2-1)}{12} \rightarrow 20$  en dimension  $n=4$

Tenseur de Ricci  $[0]$

$$R_{\mu\nu} := R^{\circ}_{\mu\nu} \quad \text{symétrique}$$

Scalaire de courbure

$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} : 10$  composantes indépendantes en  $n=4$

$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Tenseur d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} \equiv S_{\mu\nu} \equiv E_{\mu\nu}$$

symétrique, 10 composantes indépendantes en  $n=4$

Propriétés différentielles :  $R \dots \sim \partial^2 g + \underbrace{\partial g \partial g}_{\text{null au 2<sup>me</sup> ordre en coord. locales cartésiennes}}$

→ Identités de Bianchi:

$$\nabla_{\lambda} S^{\mu}_{\nu} = 0 \iff R^{\mu}_{\nu\lambda\gamma}(\alpha\beta;\gamma) = 0$$

Identité contractée de Bianchi:

$$\nabla_{\lambda} G^{\mu}_{\nu} = 0$$

$$\delta(\sqrt{g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - 2 \Lambda \sqrt{g}) = \delta(\sqrt{g} g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} - 2 \Lambda \delta \sqrt{g}$$

$$g^{\mu\nu} g_{\sigma\tau} = \delta_\sigma^\mu \rightarrow \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta}$$

$$g = -\det g_{\mu\nu} \rightarrow \frac{\delta g}{g} = g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

$$\frac{\delta \sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} \delta(\sqrt{g} g^{\mu\nu}) = -\sqrt{g} (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu}$$

$$-2 \Lambda \delta \sqrt{g} = -\sqrt{g} \Lambda g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

$$\underbrace{\frac{16\pi G}{c^4} \times \delta S_{\text{matière}}}_{\frac{8\pi G}{c^4}} = \underbrace{\frac{16\pi G}{c^4} \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} T^{\mu\nu}}_{\text{vecteur}} \delta g_{\mu\nu}$$

vecteur              tenseur  
 ↓                    / \              ↓  
 $V^\alpha = g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\beta\sigma}^\sigma$

Il reste :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &\stackrel{\text{loc}}{=} \sqrt{g} g^{\mu\nu} (\partial_\sigma \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma) \\
 &\stackrel{\text{loc}}{=} \sqrt{g} \partial_\sigma V^\sigma \\
 &\equiv \sqrt{g} \nabla_\sigma V^\sigma \\
 &\equiv \partial_\sigma (\sqrt{g} V^\sigma) \rightarrow \text{terme de surface}
 \end{aligned}$$

NB :

$$\begin{aligned}
 G_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \\
 \text{satisfait } \nabla_\nu G^{\mu\nu} &\equiv 0 \quad \text{satisfait } \nabla_\nu T^{\mu\nu} = O\left(\frac{\delta S_{\text{mat}}}{\delta c^4}\right) \\
 &\text{lien entre éqs du champ gravité et éqs de mouvement de la matière}
 \end{aligned}$$

Limite newtonienne

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{\text{tot}} \quad / \text{y compris } \Lambda$$

$T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{m-2} T g_{\mu\nu} \right)$$

$$\text{qd } m=4 \quad R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right)$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma$$

champ faible:  $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \quad h \ll 1$   
 $\Gamma \sim \partial h \ll 1$

$$R_{\mu\nu} \simeq \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha \quad \partial h$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \underbrace{\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu})}_{\Gamma_{\mu\nu}^\alpha} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu h_{\nu\alpha} + \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

champ quasistationnaire:  $\partial_0 h = \frac{1}{c} \partial_t h \ll \partial_i h$

$$R_{00} \simeq \partial_i \Gamma_{00}^i + \cancel{\partial_0 \Gamma_{00}^0} - \cancel{\partial_0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha}$$

$$= \frac{1}{2} \partial_i (\partial_0 h_0^i + \partial_0 h_0^i - \partial^i h_{00})$$

$$\boxed{R_{00} \simeq -\frac{1}{2} \Delta h_{00}} \quad \Delta = \delta^{ij} \partial_{ij}$$

$$R_{00} \simeq \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{00} - \frac{1}{2} (-T_{00} + T_{ii}) g_{00}^{-1} \right)$$

$$\simeq \frac{1}{2} (T_{00} + T_{ii}) \simeq \frac{1}{2} (T^{00} + T^{ii})$$

$$R_{00} \simeq \frac{4\pi G}{c^4} (T^{00} + T^{ii})$$

$\uparrow \quad \nwarrow$  pression  $\sim \rho \vec{v}^2$

$$\boxed{T^{00} \simeq \rho c^2} \Rightarrow \rho \vec{v}^2 \sim T^{ii}$$

$$R_{00} \simeq \frac{4\pi G}{c^2} \rho$$

$$-\frac{1}{2} \Delta h_{00}$$

$$\boxed{\Delta \left( \frac{c^2}{2} h_{00} \right) \simeq -4\pi G \rho}$$

$$\text{Eq. de Poisson} \quad \Delta U = -4\pi G \rho$$

potentiel gravitationnel

$$\boxed{U(x) = G \int d^3x' \frac{\rho(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}$$

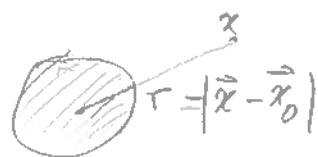
$$\Rightarrow \boxed{h_{00}^{(2)} \simeq + \frac{2}{c^2} U_{(2)} \\ g_{00}^{(2)} \simeq -1 + \frac{2}{c^2} U_{(2)}}$$

OK avec mouvement géodésique de particules d'épreuve

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \simeq -\Gamma_{00}^i \simeq -\frac{1}{2} (-\partial_i h_{00}) \simeq +\frac{1}{2} \partial_i h_{00} \simeq \frac{1}{c^2} \partial_i U$$

$$\frac{12}{c^2} \frac{d^2x^i}{dt^2} \rightarrow \boxed{\frac{d^2x^i}{dt^2} \simeq + \partial_i U}$$

# Solution de la symétrie sphérique (Schwarzschild 1916)

Analogie de  $U(\vec{r}) = + G \frac{M}{r}$  

Modèle de la géométrie autour du Soleil

$$ds^2 = -e^\nu c^2 dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Pour simplifier on suppose stationnarité (théorème de Birkhoff)

$$\text{Eqs d'Einstein dans le vide } 0 = G_t^t = G_r^r = \underbrace{G_\theta^\theta = G_\phi^\phi}_{\text{conséquence de } G_r^r = 0 = G_t^t}$$

ces identités  
impliquent aussi  
que  $G_r^r$  ne contient pas de  $\partial_r^2 g$

par identités de  
Bianchi

$$\nabla_\mu G_r^\mu = 0$$

Calcul des  $G_\nu^\mu$  (e.g.  $S2^\mu{}_\nu = d\omega^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_{\sigma\lambda} \omega^\sigma{}_\nu$ )

$$G_t^t = G_0^0 = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\nu'}{r} \right)$$

$$G_r^r = G_1^1 = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right)$$

Différence  $\rightarrow \boxed{\nu' + \lambda' = 0}$   $e^\nu e^\lambda = \text{const.} = 1$   
par choix unis de t

$$G_t^t = 0 \rightarrow (re^{-\lambda})' = 1 \rightarrow re^{-\lambda} = r + \text{const} = r - 2m$$

$\uparrow$  constante d'intégration

$$\boxed{| e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r}}$$

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)}$$

Comparant  $g_{00} = -1 + \frac{2m}{r}$  et  $g_{00}^{\text{Newton}} \simeq -1 + \frac{2GM}{c^2 r}$

suggère

$$m = \frac{GM}{c^2}$$

et M

incorpore une physique  
plus riche que  $M^{\text{Newton}} = \int d^3x \rho(x)$   
mais au repos, pression,  
énergie thermique,  
auto-énergie gravitationnelle

pour le Soleil

$$m_{\odot} = \frac{GM_{\odot}}{c^2} = 1.476625 \text{ km}$$

$$\simeq 1.5 \text{ km}$$

rayon de Schwarzschild:  
ou rayon gravitationnel

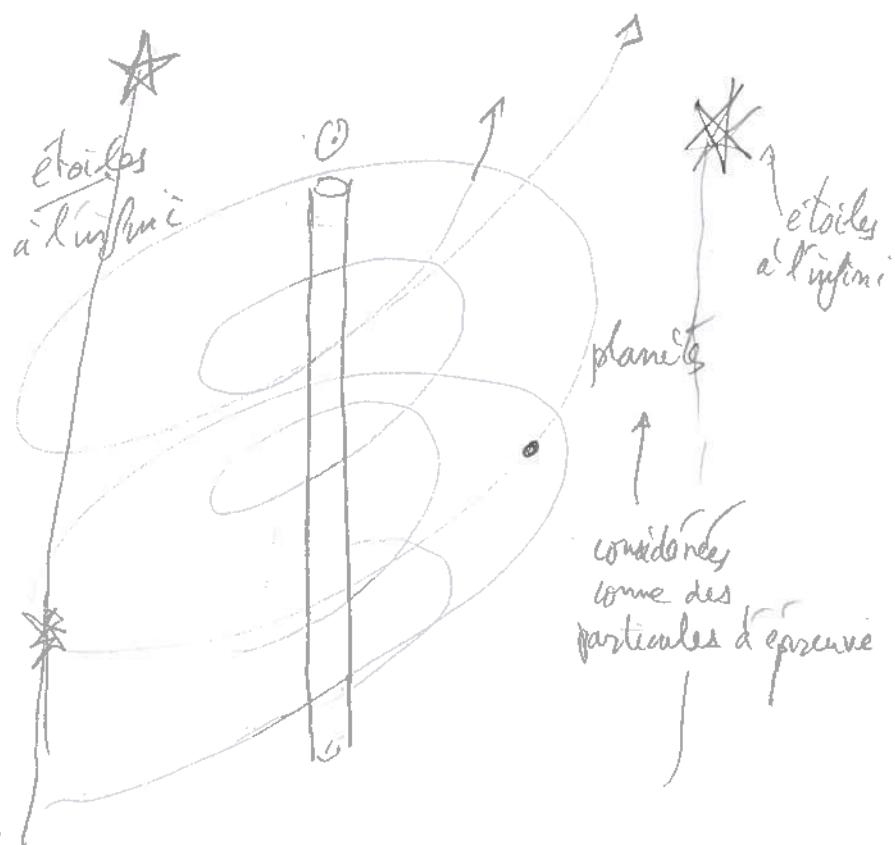
$$r_g = 2m = 2 \frac{GM}{c^2} \simeq 3 \text{ km pour } \odot$$

$$? g_{00}=0, g_{rr}=\infty ?$$

# Approche historique aux tests de la RG dans le système solaire

2.10

Modèle du système solaire  
par la sol. de Schwarzschild



- Insuffisant aujourd'hui
- problématique car
  - néglige la description relativiste des interactions entre planètes
  - néglige les effets d'auto-gravitation des planètes
  - néglige l'environnement galactique bien que  $\frac{2U_{\text{Galaxie}}}{c^2} \sim 10^{-6}$
- reste utile comme exemple simple de lien entre théorie et la RG et expérience

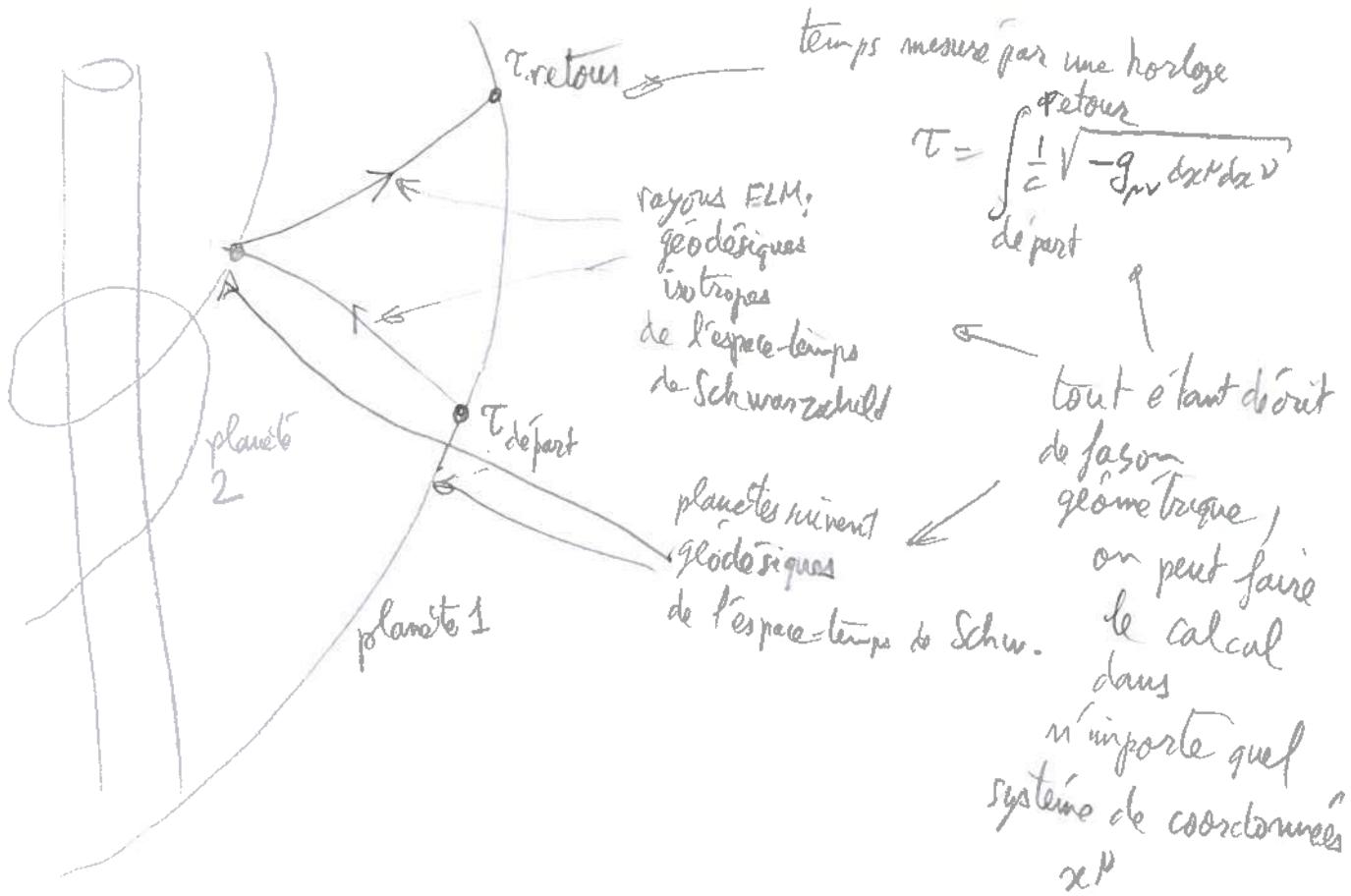
# 2.11

## Règles d'or pour l'interprétation physique de la RG (premier niveau)

**Règle I:** Décrire tout processus de mesure comme une configuration géométrique de  $(V_4, g)$ , et exprimer le résultat de la mesure comme un invariant de  $(V_4, g)$ .

**Règle II:** Utiliser le théorème de Fermi-Cartan pour réduire la description de certains effets physiques locaux à leur description en Relativité Restreinte

Par exemple: écho radar sur une planète



# Mouvement des planètes

Actions pour particule de masse  $\mu$

$$S_1[x(\lambda)] = -\mu c \int ds = -\mu c \int \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda$$

invariant sous reparamétrisations  
 $\lambda = f(\lambda')$

éliminer la  $\sqrt{\phantom{x}}$  (avec  $c=1$ )

$$S_2[x^\mu(\lambda), e(\lambda)] = \int d\lambda \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{e(\lambda)} g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} - \frac{1}{2} e(\lambda) p^2 \right]$$

invariant sous  $\begin{cases} \lambda = f(\lambda') \\ e(\lambda) \rightarrow e'(\lambda') \end{cases}$   $e'(\lambda') d\lambda' = e(\lambda) d\lambda$

$$\theta = \frac{\delta S_2}{\delta e(\lambda)} \rightarrow \frac{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}{e^2} = -p^2 \quad , \text{cad} \quad e = \frac{1}{p} \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

$\rightarrow S_2$  se réduit à  $S_1$   $\rightarrow$  mêmes courbes extrémales

Dans  $S_2[x, e]$  on peut fixer la jauge  $e(\lambda) = 1$

$$\rightarrow S_3[x(\lambda)] = \int d\lambda \left[ \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} - \frac{1}{2} p^2 \right]$$

mêmes courbes extrémales avec paramètre  $\lambda$  t.q.  $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -p^2$

Mais  $S_3[x(\lambda)]$  marche pour la limite  $p^2 \rightarrow 0$ : géodésiques isotropes

Eqs d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}[x, \dot{x}]}{\partial \dot{x}^\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x})}{\partial x^\lambda} \quad \text{avec } \mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \text{aut}$$

$$\frac{d}{d\lambda} (g_{\lambda\mu}(x) \dot{x}^\mu) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad \boxed{\dot{x}^\nu = \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \mu u^\nu = p^\nu}$$

$$\partial_{\lambda\mu} \ddot{x}^\mu + \partial_\nu \partial_{\lambda\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} \partial_\lambda g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

$$\partial_{\lambda\mu} \ddot{x}^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$$

$$\ddot{x}^\lambda + R^\lambda_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$$

Schwarzschild ( $c=1$ )

$$2\mathcal{L} = g_{\mu\nu}(r)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -\left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1-\frac{2m}{r}} + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2)$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$  sans perte de généralité

$$2\mathcal{L} = -\left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1-\frac{2m}{r}} + r^2\dot{\phi}^2$$

$$\begin{aligned} P_r &= g_{\lambda\mu} p^\mu \text{ satisfait } \dot{P}_\lambda = \frac{1}{2} \partial_\lambda g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\lambda} \end{aligned}$$

s'annule pour  $\lambda = t$  ou  $\phi$   
(variables cycliques)

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \dot{\phi} = \omega t = L$$

$$p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -\left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t} = \omega t = -E$$

$$2\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -p^2 = \omega t$$

$$2\mathcal{L} = -\frac{E^2}{1-2m/r} + \frac{\dot{r}^2}{1-2m/r} + \frac{L^2}{r^2} = -p^2$$

$$\boxed{\dot{r}^2 + W_L(r) = E^2}$$

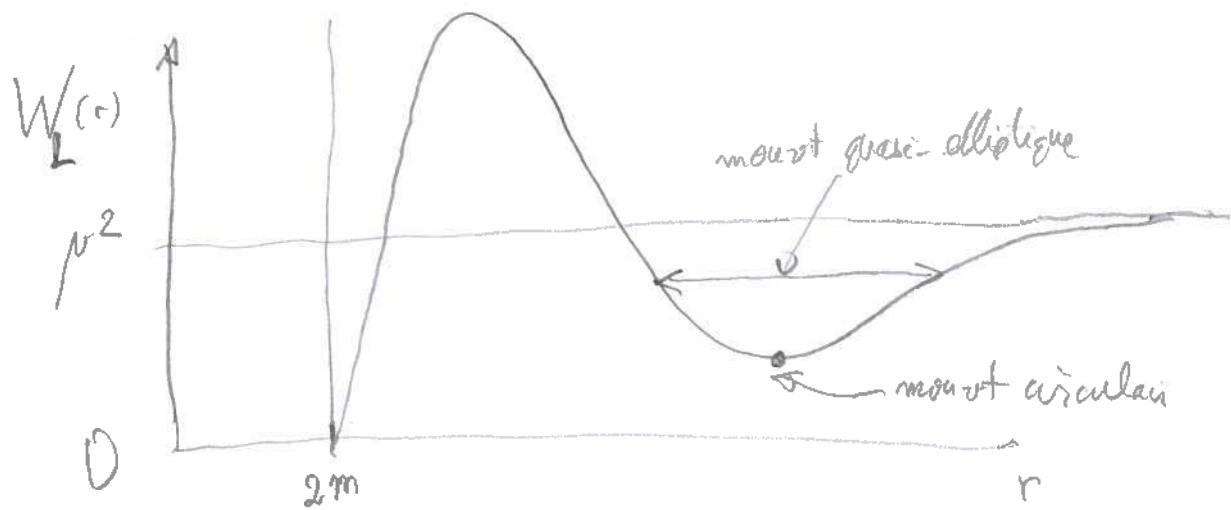
potentiel  
effectif  
relativiste

$$\boxed{W_L(r) = \left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(p^2 + \frac{L^2}{r^2}\right)}$$

$$W_L(r) = p^2 - \frac{2m p^2}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2m L^2}{r^3}$$

masse au  
repos

$\sim$  potentiel Newtonien      potentiel centrifuge      terme nouveau



Trajectoire  $r(\varphi)$

$$r^2 \dot{\varphi} = L$$

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{r^2}$$

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = r^2 \frac{\dot{r}}{L} \rightarrow \dot{r} = L \frac{r'}{r^2} = L \left(\frac{1}{r}\right)' = L u'$$

$$L^2 u'^2 + W_L(r) = E^2$$

avec  $u = \frac{1}{r}$

$$L^2 u'^2 + (1 - 2mu)(v^2 + L^2 u^2) = E^2$$

$$L^2 u'^2 + v^2 - 2mv^2 u + L^2 u^2 - 2mL^2 u^3 = E^2$$

$$u'^2 + u^2 = \frac{E^2 - v^2}{L^2} + \frac{2mv^2}{L^2} u + 2mu^3$$

$\rightarrow$  solution exacte par fonction elliptique

$\frac{du}{dp}$

$$u'' + u = \frac{mv^2}{L^2} + 3mu^2$$

solution approchée:

$$\text{Newton} \quad u_0'' + u_0 = \frac{m p^2}{L^2}$$

$$u_0 = \frac{1 + e_0 \cos \varphi}{P_0} \quad p = a(1-e^2)$$

$$\begin{aligned} u = u_0 + u_1 \rightarrow u_1'' + u_1 &\approx 3m u_0^2 = \frac{3m}{P_0^2} (1 + e_0 \cos \varphi)^2 \\ &\approx \frac{3m}{P_0^2} (1 + 2e_0 \cos \varphi + e_0^2 \cos^2 \varphi) \\ &\qquad\qquad\qquad \cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{terme résonnant} \\ &\approx \frac{6m}{P_0} u + \text{non résonnant.} \end{aligned}$$

$$u'' + u = \frac{m p^2}{L^2} + \frac{6m}{P_0} u + \text{cot} + \sim \cos 2\varphi$$

$$u'' + \underbrace{(1 - \frac{6m}{P_0}) u}_{(1 - \frac{3m}{P_0})^2} = \frac{m p^2}{L^2} + \dots$$

$$u \approx \frac{1}{p} \left[ 1 + e \cos \left( 1 - \frac{3m}{P} \right) \varphi + \dots \right]$$



$$\text{rosette} \quad q_0 + \frac{2\pi}{1 - \frac{3m}{P}} \approx q_0 + 2\pi \left( 1 + \frac{3m}{P} \right)$$

Avance du périastre par orbite:  
 (éculaire donc observable sans avoir  
 besoin d'étude sophistiquée en RG)

$$\boxed{\Delta \varphi \approx \frac{6\pi m}{P} = \frac{6\pi m}{a(1-e^2)}}$$

pour Mercure  $m \approx 1.5 \text{ km}$ ,  $a \approx 5.8 \times 10^7 \text{ km}$ ,  $e \approx 0.2$ , période  $\approx 88 \text{ jours}$ , orbite

$$\xrightarrow{(\approx 10^{-3})} \Delta \varphi \approx 43''/\text{siècle}$$

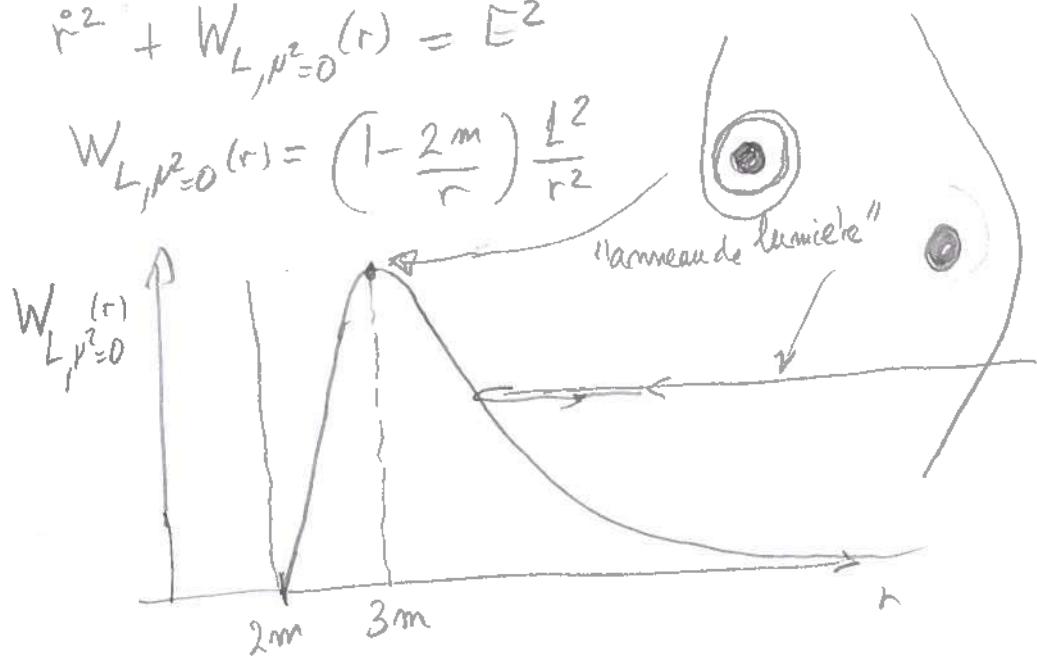
En excellent accord avec les observations ( $J_2^\odot$  bien négligeable)

## Déflexion de la lumière

Calcul historique :  $p^2 \rightarrow 0$  dans Lagrangien d'une géodésique

$$\dot{r}^2 + W_{L, p^2=0}(r) = E^2$$

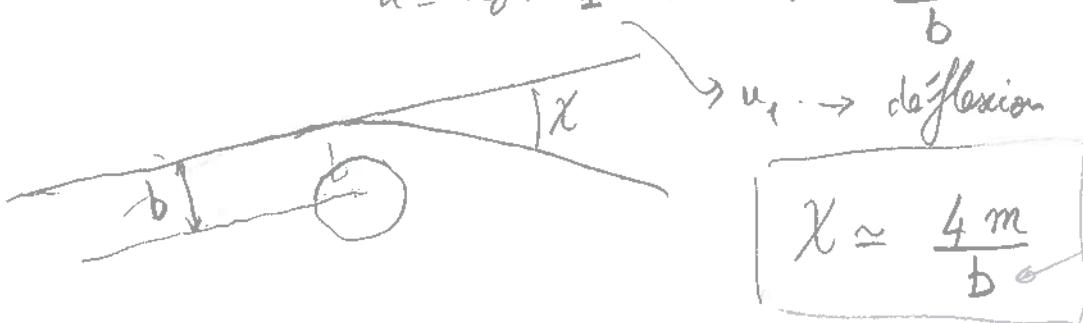
$$W_{L, p^2=0}(r) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{L^2}{r^2}$$



$$u'^2 + u^2 = \frac{E^2}{L^2} + 2m u^3$$

$$u'' + u = 3m u^2$$

$$u = u_0 + u_1 \quad u_0 = \frac{\cos\varphi}{b} \text{ ligne droite}$$

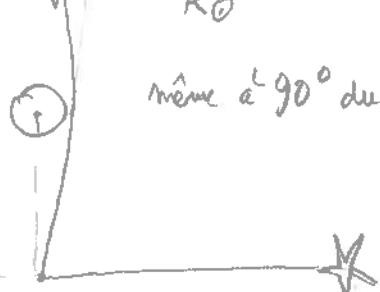


$$\boxed{\chi \approx \frac{4m}{b}} \quad \begin{array}{l} \text{paramètre} \\ \text{d'impact} \end{array}$$

pour rayon rasant la surface du Soleil:  $m = 1.5 \text{ km}$

$$\frac{4m}{R_\odot} \approx 0.86 \times 10^{-5} \approx 1''75 \quad b = R_\odot \approx 7 \times 10^5 \text{ km} \quad 1 \text{ rad} \approx 2.06265 \times 10^5 \text{ ''}$$

Mais



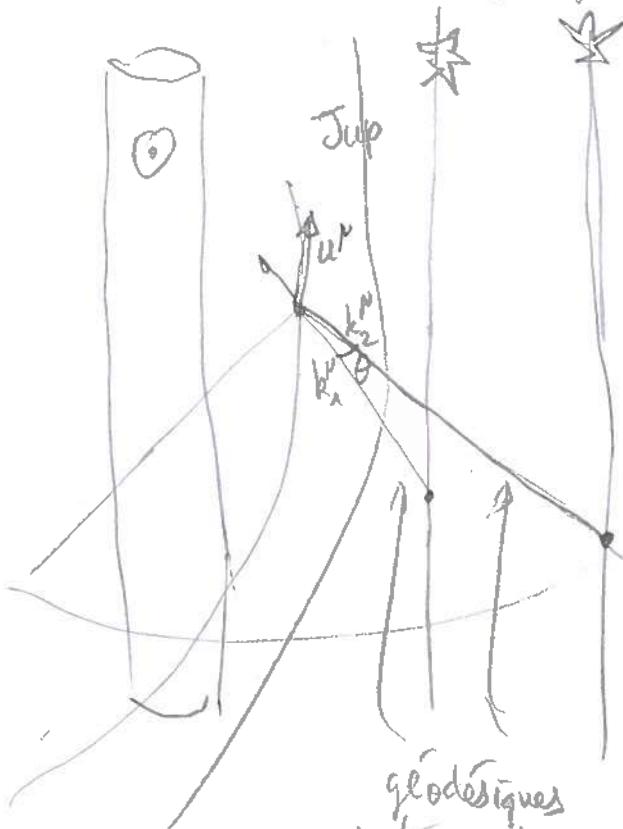
même à  $90^\circ$  du Soleil:  $b = 150 \times 10^6 \text{ km}$

$$\frac{4m}{b} \approx 4 \times 10^{-8} \approx 8 \times 10^{-3} \text{ ''}$$

Gaia va mesurer angles à  $\sim 10^{-5} \text{ ''}$ !

Besoin d'un calcul théorique plus précis et plus invariant

2.17



géodésiques  
isotropes dans  
l'espace-temps courbé  
par ☺ et les planètes

Projecteur  $\perp$  à  $u_\oplus^\mu$

$$\perp_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + u_\nu^\mu u_\mu$$

$$\cos \theta = \frac{\perp(\vec{k}_1) \cdot \perp(\vec{k}_2)}{|\perp(k_1)| |\perp(k_2)|}$$

$$= \frac{(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) k_1^\mu k_2^\nu}{(u_\mu k_1^\mu)(u_\nu k_2^\nu)}$$

$$= 1 + \frac{g_{\mu\nu} k_1^\mu k_2^\nu}{(u_\mu k_1^\mu)(u_\nu k_2^\nu)}$$

# Retard gravitationnel des signaux électromagnétiques

(Effet Shapiro, 1964 et effets reliés)

Schwarzschild en coordonnées isotropiques

$$r = \bar{r} \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^2$$

$$ds^2 = - \left( \frac{1 - \frac{m}{2\bar{r}}}{1 + \frac{m}{2\bar{r}}} \right)^2 c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^4 (dr^2 + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\phi^2)$$

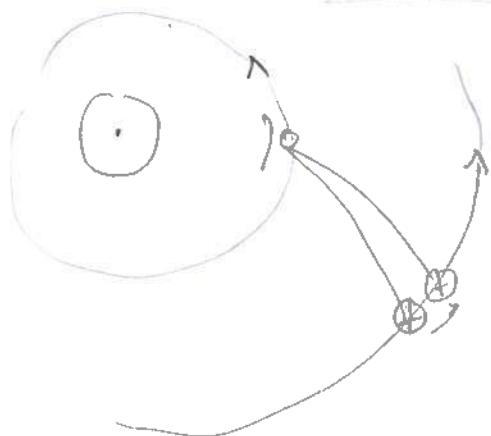
$\bar{x}^3 = \bar{r} \cos \theta$  etc...

$$= - \left( \frac{1 - \frac{m}{2\bar{r}}}{1 + \frac{m}{2\bar{r}}} \right)^2 c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^4 \delta_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j$$

$$\approx - \left(1 - 2\frac{m}{\bar{r}} + 2\left(\frac{m}{\bar{r}}\right)^2 + \dots\right) c^2 dt^2 + \left(1 + 2\frac{m}{\bar{r}} + \dots\right) \delta_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j$$

Rayon lumineux:  $ds^2 = 0 \rightarrow c^2 dt^2 \approx \left( \frac{1 + 2\frac{m}{\bar{r}}}{1 - 2\frac{m}{\bar{r}}} \right) d\bar{x}^2 \approx \left(1 + 4\frac{m}{\bar{r}}\right) d\bar{x}^2$

$c dt \approx \left(1 + 2\frac{m}{\bar{r}}\right) |d\bar{x}|$



temp<sup>condone</sup> pour aller d'un point  $\vec{x}_1$  à un point  $\vec{x}_2$

$$ct_{1 \rightarrow 2} \approx \int_1^2 d\bar{x} + 2m \int_1^2 \frac{d\bar{x}}{\bar{r}} \quad \text{puis } t \rightarrow \tau = \int \frac{ds}{c}$$

comme dans un espace euclidien

"retard relativiste"

Effet maximum quand  $\oplus \rightarrow$

O planète écho radar

Effet relié de changement de fréquence entre l'émission et l'écho reçu sur Terre, mesuré avec précision  $\sim 2 \times 10^{-5}$  par la sonde Cassini (Bertotti et al.)

# Problème à $N$ corps en RG

? Généralisation de  $V_{Coulomb} = \frac{e_1 e_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ ,  $V_{Newton} = -\frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$  ?

Electromagnétisme : Action de Fokker (1929)

en RR :  $\eta_{\mu\nu}$  + Wheeler-Feynman (1949)

$$S^{\text{tot}} [A_\mu(x); x_1^\nu(p), \dots, x_N^\nu(p)] = S_F[A] + S_o[x_a^\nu] + S_{\text{int}}[A, x_a^\nu]$$

$$S_F[A] = \int \frac{d^4x}{c} \left[ -\frac{1}{4} \frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu}(A) F^{\mu\nu}(A) \right] + S_{\text{gauge-fixing}}$$

indice  $a=1, 2, \dots, N$

$$F_{\mu\nu}(A) \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\underbrace{\partial_\nu F^{\mu\nu}}_{= 4\pi J^\mu}$$

$$\underbrace{\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu \partial_\nu A^\mu}_{(2^\mu \partial_\nu - \delta_\nu^\mu \square) A^\nu} = 4\pi J^\mu$$

$$(2^\mu \partial_\nu - \delta_\nu^\mu \square) A^\nu$$

pas inversible

besoin de fixer la jauge: e.g. jauge de Lorenz  $\partial_\nu A^\nu = 0$

$$\rightarrow \text{ajouter } S_{\text{gf}} \propto \int (\partial_\nu A^\nu)^2$$

$$S_{\text{Fgf}}[A] = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^4x}{c} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu$$

$$S_0[x_a] = \sum_a -m_a c \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx_a^\mu}{dp} \frac{dx_a^\nu}{dp}} dp = \sum_a m_a c \int ds_a$$

$$S_{\text{int}}[A, x_a] = \sum_a + \underbrace{\frac{e_a}{c} \int A_\mu(x_a) dx_a^\mu}_{\int dt \left[ e_a \left[ \frac{\vec{A}}{c} \frac{dx_a}{dt} - A^0 \right] \right]}$$

$$\int dt \left[ e_a \left[ \frac{\vec{A}}{c} \frac{dx_a}{dt} - A^0 \right] \right]$$

$\uparrow$  potentiel scalaire  
 $\vec{A} \cdot \vec{v}/c$  int. avec pot. vecteur

Si l'on considère la solution temporellement symétrique (pour éliminer les effets non conservatifs : réaction du rayonnement) de

$$\square A_\mu = -4\pi J_\mu(x)$$

↑

$$J^\mu(x) = \sum_a e_a \int ds_a^\mu \delta^{(4)}(x - x_a^\mu)$$

$$= \sum_a e_a \int ds_a u_a^\mu \delta^{(4)}(x - x_a^\mu)$$

Fonction de Green

$$\square_x G(x, y) = -4\pi \delta^{(4)}(x - y)$$

↑  
fonction de  $x^\mu - y^\mu$

$$G_{\text{ret}}(x^\mu) = \frac{\delta^{(4)}(t - \frac{|\vec{x}|}{c})}{|\vec{x}|}$$

$$G_{\text{adv}}(x^\mu) = \frac{\delta^{(4)}(t + \frac{|\vec{x}|}{c})}{|\vec{x}|}$$

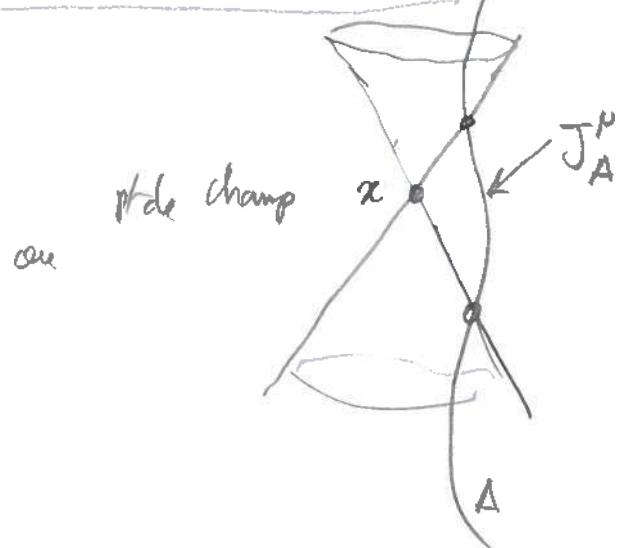
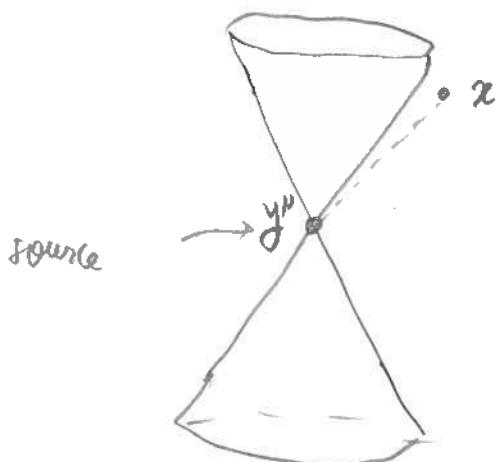
$$G_{\text{sym}}(x^\mu) = \frac{1}{2} (G_{\text{ret}} + G_{\text{adv}}) = \frac{1}{2|z|} \left( \delta^{(1)}(t - \frac{|z|}{c}) + \delta^{(1)}(t + \frac{|z|}{c}) \right)^{3.3}$$

En utilisant

$$\delta^{(1)}(\varphi(t)) = \sum_{\substack{\text{zeros } t_0 \\ \text{de } \varphi(t)}} \frac{\delta^{(1)}(t - t_0)}{|d\varphi/dt|_{t_0}}$$

$$G_{\text{sym}}(x^\mu) = c \delta^{(1)}(c^2 t^2 - \vec{x}^2) = c \delta^{(1)}(\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu)$$

$$G_{\text{sym}}(x^\mu, y^\nu) = c \delta^{(1)}(\eta_{\mu\nu} (x^\mu - y^\mu)(x^\nu - y^\nu))$$



$c=1$  pour simplifier

$$A_\mu(x) = \int d^4y \frac{G}{G_{\text{sym}}} (x-y) J_\mu(y)$$

$$= G * J_\mu$$

$$= \sum_a e_a \int dy^4 G_{\text{sym}}(x-y) \int dz_a \delta^{(4)}(y - z_a(p))$$

$$= \sum_a e_a \int ds_a G_{\text{sym}}(x - z_a(s_a)) u_{ap}$$

Action de Fokker : action pour la dynamique des particules obtenue en éliminant le champ d'interaction (par sa solution comme fonctionnelle des particules)

$$S_{\text{Fokker}}[x_a^{\rho(s)}] = S_0[x_a^{\rho(s)}] + \underbrace{\left[ S_{\text{champ}}[A_\nu] + S_{\text{int}}[A_\nu, x_a(s)] \right]}_{\text{sol}} \quad A_\nu = G \times J[x_a(s)]$$

on \$S\_{\text{red}}\$

$$S_{\text{tot}}[A^{\text{sol}}[x_a(s)], x_a(s)]$$

$$\frac{\delta S_{\text{red}}[x_a(s)]}{\delta x_a(s)} = \frac{\delta S_{\text{tot}}[A^{\text{sol}}, x_a(s)]}{\delta x_a(s)} + \frac{\delta S_{\text{tot}}[A^{\text{sol}}, x]}{\delta A(x)} \frac{\delta A^{\text{sol}}[x_a(s)]}{\delta x_a(s)}$$

$S_{\text{red}}[x_a(s)]$   
est bien une action  
pour la dynamique  
des particules

éqs du mouvement  
des particules dans  
le champ  $A^{\text{sol}}$

$= 0$  car  
 $A^{\text{sol}}$  est solution des  
éqs de champ

$$S_{\text{red}}[x_a^{\rho(s)}] = \sum_a -m_a \int ds_a + S_{\text{int}}^{\text{red}}[x_a]$$

$$S_{\text{int}}^{\text{red}}[x_a] = -\int \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi} (\partial_\nu A_\nu)^2 + \int A_\nu J^\nu$$

$$\text{terme surface} + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi} A_\nu \square A_\nu^{\text{sol}} = -\frac{1}{2} A_\nu J^\nu$$

$$S_{\text{Fokker}}[x_a] = \sum_a -m_a \int ds_a + \frac{1}{2} \int A_\mu^{\text{ext}} J^\mu d^4x$$

$$\underbrace{\quad}_{S_0} \quad \underbrace{\quad}_{S_{\text{int, red}}}$$

$$S_{\text{int, red}} = +\frac{1}{2} \iint d^4x d^4y J^\mu(x) G_{\text{sym}}(x-y) J_\mu(y)$$

$$S_{\text{Fokker}}[x_a] = \frac{1}{2} \sum_a \sum_b \iint ds_a ds_b e_a u_a^\mu G(x_a - x_b) e_b u_b^\mu$$

Fokker  $\rightarrow$  Wheeler-Feynman  $\rightarrow$  Feynman  
diagrammes à la Feynman

$$S_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_a \iint \frac{ds_a}{ds'_a} \left\{ \begin{array}{l} e_a u_a^\mu(s_a) \\ G(x_a - x_b) \\ e_a u_a^\mu(s'_a) \end{array} \right\} + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \iint ds_a ds_b \left\{ \begin{array}{l} e_a u_a^\mu \\ e_b u_b^\mu \\ G(x_a - x_b) \end{array} \right\}$$

$$G(x_a - x_b) = \delta((x_a - x_b)^2)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta(t_a - t_b - \frac{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|}{c})}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|} + \frac{\delta(t_a - t_b + \frac{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|}{c})}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|} \right]$$

# Action non locale dans le temps

3.6

Dans référentiel de Lorentz

$$t = ct$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$



Lagrangien

$$S = \int dt L$$

non localité:  $\Delta t \sim \frac{r}{c} \ll \text{Période si } \frac{v}{c} \ll 1$

→ développement formel en puissances de  $\frac{1}{c}$

$$G(\vec{x}_a - \vec{x}_b) = \frac{\delta(t_a - t_b)}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|} + \frac{1}{c^2} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t_a^2} \delta(t_a - t_b) |\vec{x}_a - \vec{x}_b| + O(\frac{1}{c^4})$$

$$e_a e_b \iint dt_a dt_b \left[ \frac{\delta(t_a - t_b)}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|} - \frac{1}{2c^2} \frac{\partial}{\partial t_a} \frac{\partial}{\partial t_b} \delta(t_a - t_b) |\vec{x}_a - \vec{x}_b| \right] \left( -1 + \frac{\vec{v}_a(t_a) \cdot \vec{v}_b(t_b)}{c^2} \right)$$

$$- e_a e_b \int \frac{dt}{|\vec{x}_a(t) - \vec{x}_b(t)|}$$

corrections relativistes

int. Coulombienne

$$\sim \frac{1}{2c^2} \iint dt_a dt_b \delta(t_a - t_b) \left[ \frac{\partial}{\partial t_a} \frac{\partial}{\partial t_b} |\vec{x}_a(t_a) - \vec{x}_b(t_b)| \right]$$

$$\text{et } \iint dt_a dt_b \frac{\delta(t_a - t_b)}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|} \left( + \frac{\vec{v}_a(t_a) \cdot \vec{v}_b(t_b)}{c^2} \right)$$

Lagrangien de Darwin (1922)  $S_{\text{red}} = \int dt L[\vec{x}_a, \vec{v}_a]$

$$L = \sum_a -m_a c^2 \sqrt{1 - \vec{v}_a^2/c^2}$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{r_{ab}} \left[ 1 - \frac{1}{2c^2} \vec{v}_a \cdot \vec{v}_b - \frac{1}{2c^2} (\vec{n}_{ab} \cdot \vec{v}_a) (\vec{n}_{ab} \cdot \vec{v}_b) \right]$$

$$+ O(\frac{1}{c^4})$$

$$\vec{n}_{ab} = (\vec{x}_a - \vec{x}_b) / |\vec{x}_a - \vec{x}_b|$$

À l'ordre suivant,  $\frac{1}{c^4}$ , le Lagrangien contient nécessairement les accélérations  $\vec{a}_a = \vec{\dot{v}}_a = \vec{\ddot{x}}_a$ , et est donc un Lagrangien généralisé  $L(q, \dot{q}, \ddot{q})$

## Cas gravitationnel

Action réduite (à la Fokker) pour la gravitation

pour détails voir Damour+Esposito-Farése / CQG 9, 2093 (1992), et refs  
 ↴ PRD 53, 5541 (1996) } incluses

$$S_{\text{tot}}[g_{\mu\nu}(x); x_a^\mu(p)] = S_g[g_{\mu\nu}] + S_m[x_a^\nu; g_{\nu\mu}]$$

$c=1$

$$S_g[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(g)$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\rho - \partial\rho - \rho \nabla$$

$$\text{par parties} \quad \sqrt{g} g \partial\rho = \partial(\sqrt{g} g \Gamma) - \partial(\sqrt{g} g) \Gamma$$

$$\begin{array}{ccc} \overset{\uparrow}{t_0 \text{ de surface}} & & \overset{\uparrow}{\text{remplaçable}} \\ \rightarrow -2x g \Gamma \Gamma \text{ de } R \end{array}$$

$$S_{gE}[g_{\mu\nu}] = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma)$$

$$S_{gE} \sim \int \sqrt{g} g^{..} g^{..} g^{..} \partial g_{..} \partial g_{..}$$

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$\text{ordre quadratique} \quad S_{gE} \sim \int d^4x (\partial h)^2$$

Mais, équations pour  $h$ : eq. d'Einstein linéarisées 3.9

$$R_{\mu\nu}^{\text{lin}} = \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \partial_\nu \Gamma_{\sigma\mu}^{\sigma}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} \eta^{\sigma\lambda} (\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\mu\lambda} - \partial_\lambda h_{\mu\nu})$$

$$2R_{\mu\nu}^{\text{lin}} = -\square h_{\mu\nu} - \partial_{\mu\nu} h_{\sigma}^{\sigma} + \partial_{\mu\sigma} h_{\nu}^{\sigma} + \partial_{\nu\sigma} h_{\mu}^{\sigma}$$

analogie à  $\partial^\nu F_{\mu\nu} = -\square A_\mu + \partial_\mu (\partial^\sigma A_\sigma)$

Analogie de la jauge de Lorenz:  $\partial^\nu A_\nu = 0$

$$\partial^\nu (h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu}) = 0 \text{ ou } O(h^2)$$

condition d'harmonicité:  $H^\mu := g^{\mu\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^\nu = 0$

$$S_{g\text{Egauge-fixed}}[g] = S_{g\text{E}} + \text{terme } \propto \int g g_{\mu\nu} H^\mu H^\nu$$

$$\sim \int \bar{g} g'' g'' g'' \partial g.. \partial g..$$

avec

$$S_{g\text{Egf}} = -\frac{1}{64\pi G} \int d^4x \left( \partial^\lambda h^{\mu\nu} \partial_\lambda h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial^\lambda h \partial_\lambda h \right) + O(h\partial h\partial h)$$

$$S_m[x_a^\mu(p), g_{\mu\nu}] = \sum_a -m_a \int ds_a$$

$$= \sum_a -m_a \int \sqrt{-g_{\mu\nu}(x_a) \frac{dx_a^\mu}{dp} \frac{dx_a^\nu}{dp}} dp$$

remplaçant  $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$

paramètre  $dp_a = ds_a^{(0)} = \sqrt{-\gamma_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_a^\nu}$

$$S_m[x_a, g] = \sum_a -m_a \int ds_a^{(0)}$$

$$+ \sum_a \frac{1}{2} m_a \int ds_a^{(0)} h_{\mu\nu}(x_a) \frac{dx_a^\mu}{ds_a^{(0)}} \frac{dx_a^\nu}{ds_a^{(0)}} + O(h^2)$$

$$\overset{\text{lim}}{S_{mt}} = \frac{1}{2} \int d^4x \ h_{\mu\nu}(x) T_{(0)}^{\mu\nu}(x)$$

avec  $T_{(0)}^{\mu\nu}(x) = \sum_a m_a \int ds_a^{(0)} \frac{dx_a^\mu}{ds_a^{(0)}} \frac{dx_a^\nu}{ds_a^{(0)}} \delta^{(4)}(x - x_a)$

schematicquement

$$S^{\text{tot}} = \sum_a -m_a \int d\zeta_a^{(0)} + \int d^4x \left[ (\partial h)^2 + h \partial h \partial h + \dots \right] \quad 3.11$$

$$+ \sum_a m_a \int d\zeta_a \frac{u^\mu}{(\zeta_a)} \frac{u^\nu}{(\zeta_a)} (h_{\mu\nu} + h^2 + \dots)$$

Résoudre l'équation d'Einsteïn pour  $h_{\mu\nu}$ ; ou plutôt pour

$$\boxed{\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \gamma_{\mu\nu}}$$

$$(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu})^{\text{lin}}_{\text{harmonique}} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu}$$

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G (T_{\mu\nu}^{(0)} + h T^{(0)} + \dots) + h \partial^2 h$$

Méthode d'approximations successives (à la Picard)

Propagateur : inverse de

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \underbrace{\square (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta})}_\text{termes non linéaires} h_{\alpha\beta}$$

$$\square^{-1} \left( \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \frac{1}{D-2} \gamma_{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta} \right)$$

propagateurs symétrique

$$G_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(x,y) = \left( \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \frac{1}{D-2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \right) G_{\text{scalaire}}(x-y)$$

$$x \quad G_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(x,y)$$

~~~~~y

$$\delta((x-y)^2) = \delta(\eta_{\mu\nu}(x-y)^\mu (x-y)^\nu)$$

$$\Box G = -4\pi \delta^{(4)}$$

A l'ordre "linéarisé", cad "one-graviton exchange"

$$S_{\text{int, red}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \int h_{\mu\nu} T_{(0)}^{\mu\nu} \quad \text{analogie de} \quad \frac{1}{2} \int A_\mu J^\mu$$

$$= -4\pi G_N \int T_{(0)}^{\mu\nu} \square^{-1} \left( T_{(0)}^{\rho\nu} - \frac{1}{D-2} \delta_\nu^\rho \eta_{\mu\nu} \right)$$

$$= + G_N \int d^D x d^D y \quad T_{(0)}^{\mu\nu}(x) \quad G_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(x, y) \quad T_{(0)}^{\rho\sigma}(y)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{a,b} 2 G_N \iint dS_a^{(0)} dS_b^{(0)} \quad m_a u_a^\mu u_a^\nu \quad G_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(x_a, x_b) \quad m_b u_b^\rho u_b^\sigma$$

$$m_a u_a^\mu u_a^\nu \left| \begin{array}{c} G_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(x_a, x_b) \\ \hline a & b \end{array} \right. m_b u_b^\rho u_b^\sigma$$

electromagnetism:  $\epsilon_{a\alpha} u_a^\mu \left( G_\mu^{\alpha\beta} \right) e_b u_b^\beta = \epsilon_{a\alpha} u_a^\mu \delta_\mu^\alpha \delta((x-y)^2) e_b u_b^\alpha$

gravitation:  
factor  $\frac{2G_N}{m_a m_b u_a^\nu u_b^\nu} G^{\alpha\beta} \left( \frac{2G_N m_a m_b u_a^\mu u_b^\nu (\delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} - \frac{1}{D-2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta})}{\delta((x-y)^2) m_b u_b^\alpha u_b^\beta} \right)_X$

scalaire  
 $-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + g \int ds_a \phi_{ta} g_a \left( \dots \right) g_b \phi_{tb} = g_a \delta((x-y)^2) g_b$

cas statique:  
 $\vec{v}_a = \vec{v}_b = 0$   
 $u_a^\mu = u_b^\mu = u^\mu$

$\frac{\delta(t_a - t_b)}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|} \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_a \epsilon_b (u_a^\mu u_b^\nu) = -\epsilon_a \epsilon_b \\ 2G_N m_a m_b [(u_a u_b)^2 - \frac{1}{D-2} u_a^2 u_b^2] \\ + G_N m_a m_b \text{ en } D=4 \\ + g_a g_b \end{array} \right.$

# Corrections relativistes à Coulomb/Newton/...

3.14

Partie universelle venant du développement de  $\delta(t \mp \gamma c)/r$  en  $\gamma_c$ ,  
et facteurs dépendants du spin du champ échange'

scalaire  $s=0$   $f_0(u_a, u_b) = 1$

vecteur  $s=1$   $f_1(u_a, u_b) = u_a \cdot u_b$

tenseur  $s=2$   $f_2(u_a, u_b) = 2(u_a \cdot u_b)^2 - 1$

interaction  $\frac{1}{2} \sum_{a,b} L_{ab}$  à l'ordre  $\frac{v^2}{c^2}$  au delà de l'ordre le plus bas:

$$L_{ab}^{spins} = (-)^s \frac{q_a q_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} \left[ 1 + \frac{1}{2c^2} (\vec{v}_a^2 + \vec{v}_b^2) - \frac{3}{2c^2} (\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b) - \frac{1}{2c^2} (\vec{m}_{ab} \cdot \vec{v}_a) (\vec{m}_{ab} \cdot \vec{v}_b) + \frac{\gamma_s}{c^2} (\vec{v}_a - \vec{v}_b)^2 \right]$$

$$\boxed{\gamma_s = -1 + \frac{s^2}{2} \begin{cases} -1 & \text{pour } s=0 \\ -\frac{1}{2} & \text{pour } s=1 \\ +1 & \text{pour } s=2 \end{cases}}$$

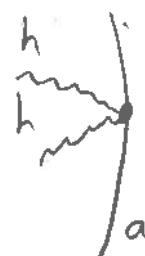
# Effets liés à la non linéarité

3.15

$$S_g^{\text{non linéaire}} \sim h \partial h \partial h + \dots$$



$$S_m^{\text{non linéaire}} \sim \int d\sigma_a u_a^\mu u_a^\nu (h^2 + \dots)$$



$$\Rightarrow S_{\text{gredaud}} = \left( \text{wavy line from } a \text{ to } b \right) + \left( \text{wavy line from } a \text{ to } c \text{ and from } c \text{ to } b \right) + \left( \text{wavy line from } a \text{ to } b \text{ and from } b \text{ to } c \right)$$

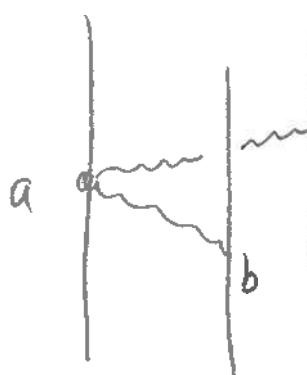
$$G m_a m_b \\ \times \left( 1 + \frac{\vec{v}^2}{c^2} + \dots \right)$$

$$\frac{G^2}{c^2} m_a m_b m_c$$

$$\frac{G^2}{c^2} m_a m_b m_c$$

Viriel :  $v^2 \sim \frac{Gm}{r_{ab}}$

composantes



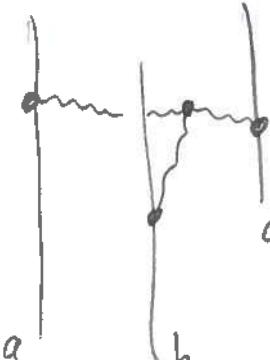
facteur 'a'  
calculer :

$$8S \sum_a \int d\sigma_a h^2 \sim \int d\sigma_a \left( \sum_b h_b \right) \left( \sum_c h_c \right)$$

$$\sim \sum_{a,b,c}^m \int d\sigma_a h_b h_c$$

$$\sim \sum_{a,b,c}^m \int dt \frac{m_b}{|x_a - x_b|} \frac{m_c}{|x_a - x_c|}$$

$$\delta L_m^{\text{non-lin}} \sim \sum_{a,b,c} \frac{G^2 m_a m_b m_c}{c^2 |\vec{x}_a - \vec{x}_b| |\vec{x}_a - \vec{x}_c|}$$

Alors que  vient de

$$\int d^4x h \partial h \partial h = \int dt \delta L$$

$$\delta L_{\text{cubiqu}} = \int d^3x h \partial h \partial h \dots$$

Approximation la plus basse

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}^{(0)}$$

$$\uparrow$$

$$\sum_a m_a \int u_a^\mu u_a^\nu \delta^{(4)}(x - \vec{x}_a) ds_a^{(0)}$$

$$\frac{v}{c} \ll 1 \Rightarrow T^{00} \gg T^{0i} \gg T^{ij}$$

$$\Rightarrow \bar{h}_{00} \gg \bar{h}_{0i} \gg \bar{h}_{ij}$$

Mouvement lent

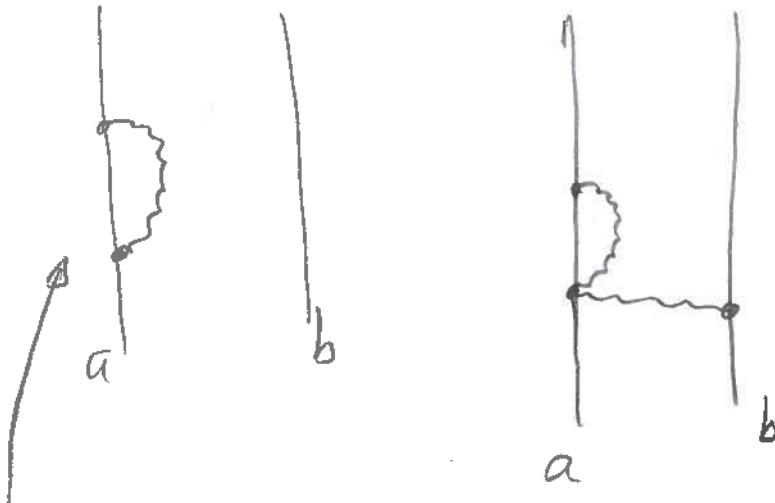
$$\square \bar{h}_{00} \approx \Delta \bar{h}_{00} \simeq -16\pi G T_{(0)}^{00}$$

$$\bar{h}_{00} \simeq \frac{4U}{c^2} \quad \Delta U = -4\pi G P$$

$$\delta L_{\text{cubiqu}} \sim \int d^3x U \partial_i U \partial_i U \sim \int d^3x 2 \left(\frac{U^2}{2}\right) \partial_i U \sim - \int d^3x \frac{U^2}{2} \Delta U$$

$$\sim + 2\pi G \int d^3x P U^2 \sim S_m^{\text{non-lin'vac}}$$

# Effets d'auto-gravitation



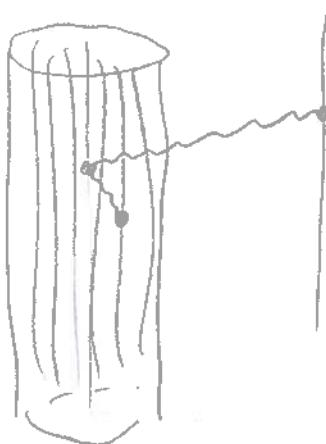
$$L_{aa} \sim \frac{G m_a m_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} \Bigg|_{\begin{array}{l} m_a = m_b \\ \vec{r}_b = \vec{r}_a \end{array}} = \infty$$

Traitement formel :  $D = 4 + \varepsilon$   
regularisation dimensionnelle

$$\frac{G m_a^2}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^{D-3}} = \frac{G m_a^2}{r^{1+\varepsilon}} \rightarrow 0$$

si  $Re(\varepsilon) < -1$

Traitement plus physique



Finalement, en RG et à l'approximation 1/c<sup>2</sup> au delà de Newton, le Lagrangien à N corps est:

$$L(\vec{x}_a, \vec{v}_a) = L^{1\text{-corps}} + L^{2\text{-corps}} + L^{3\text{-corps}}$$

$$L^{1\text{-corps}} = \sum_{a=1}^N -m_a c^2 \sqrt{1 - \vec{v}_a^2/c^2} = \sum -m_a c^2 \left( 1 - \underbrace{\frac{1}{2c^2} \vec{v}_a^2}_{\frac{1}{2} m_a \vec{v}_a^2} - \underbrace{\frac{1}{8c^4} (\vec{v}_a^2)^2}_{\frac{1}{8c^2} m_a (\vec{v}_a^2)^2} + \dots \right)$$



$$L^{2\text{-corps}} = \frac{1}{2} \sum_{ab} \frac{G_N m_a m_b}{r_{ab}} \left[ 1 + \frac{3}{2c^2} (\vec{v}_a^2 + \vec{v}_b^2) - \frac{7}{2c^2} (\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b) - \frac{1}{2c^2} (\vec{m}_{ab} \cdot \vec{v}_a) (\vec{m}_{ab} \cdot \vec{v}_b) \right]$$

$$L^{3\text{-corps}} = -\frac{1}{2} \sum_{b \neq a \neq c} \frac{G_N^2 m_a m_b m_c}{c^2 r_{ab} r_{ac}} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \left( \text{wavy line} \right) \\ + \\ \left( \text{wavy line} \right) + \left( \text{wavy line} \right) \end{array}$$

N.B.: L<sup>"3-corps"</sup> contient aussi des interactions à 2 corps : b=c ≠ a



$L^{3\text{-corps}}$  dépend des aspects non linéaires de la RG

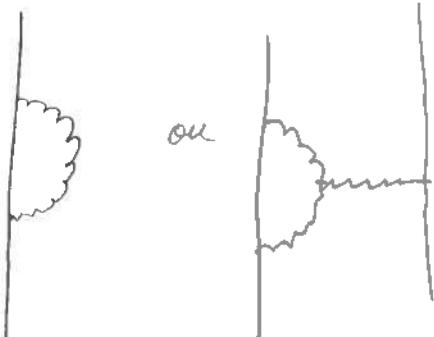
Les termes en  $v^2/c^2$  dans  $L^{2\text{-corps}}$  sont analogues aux interactions magnétiques :  $\int dt \vec{A} \cdot \vec{v}$  avec  $\vec{A} \propto \vec{v}' \rightarrow \int dt \vec{v} \cdot \vec{v}'$   
 $\rightarrow$  effets "gravitomagnétiques".

La forme de ces termes (coefficients 3/2, 7/2, -1/2) est complètement déterminée par le spin ( $s=2$ ) du champ gravitationnel

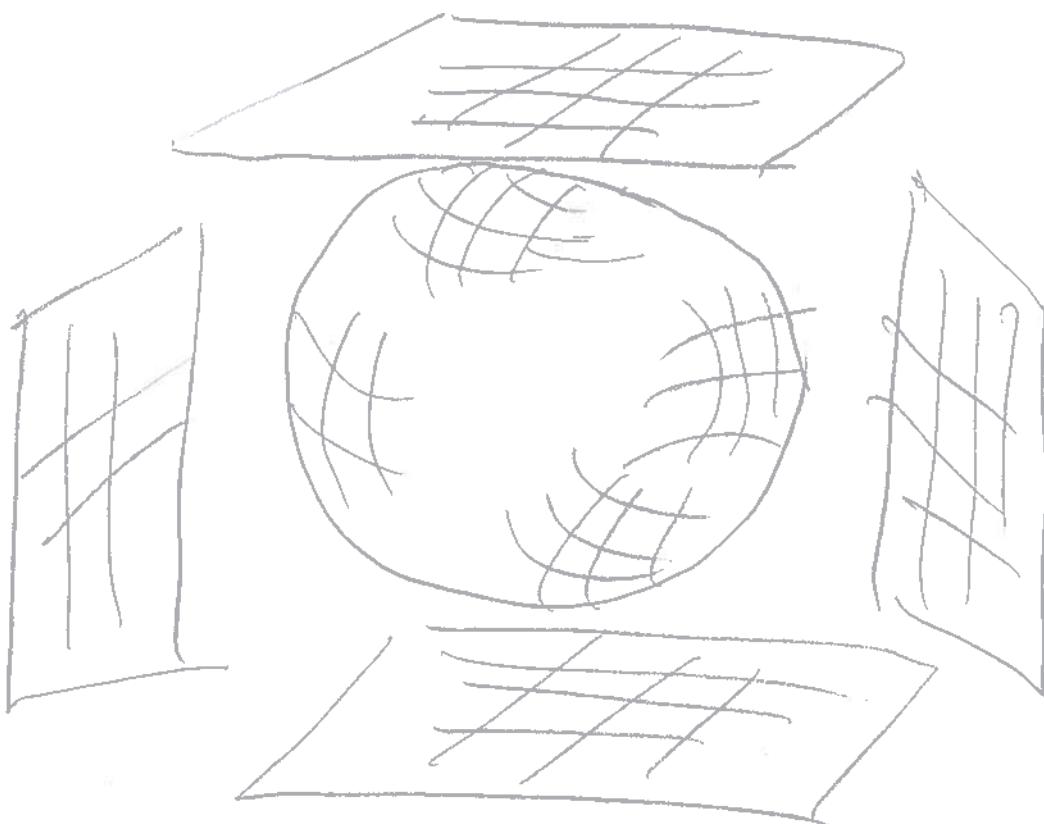
et  $\boxed{\gamma_s = -1 + s^2/2} \rightarrow \text{terme } \gamma_s (\vec{v}_a - \vec{v}_b)^2/c^2$

# RG4 Approche multi-carte au problème du mouvement en Relativité Générale

? traitement de l'auto-gravitation

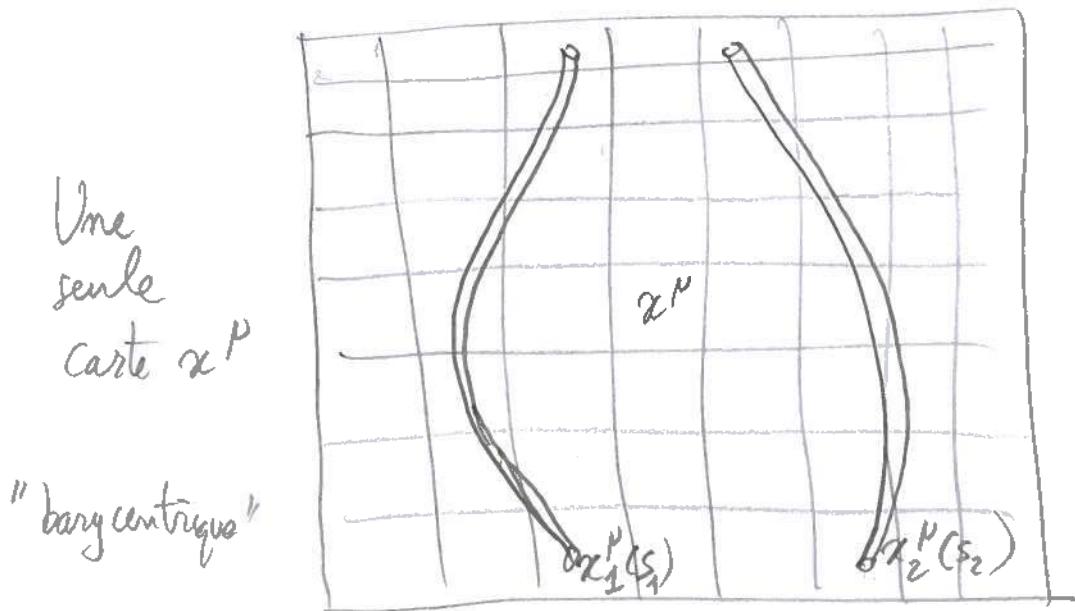


Variétés

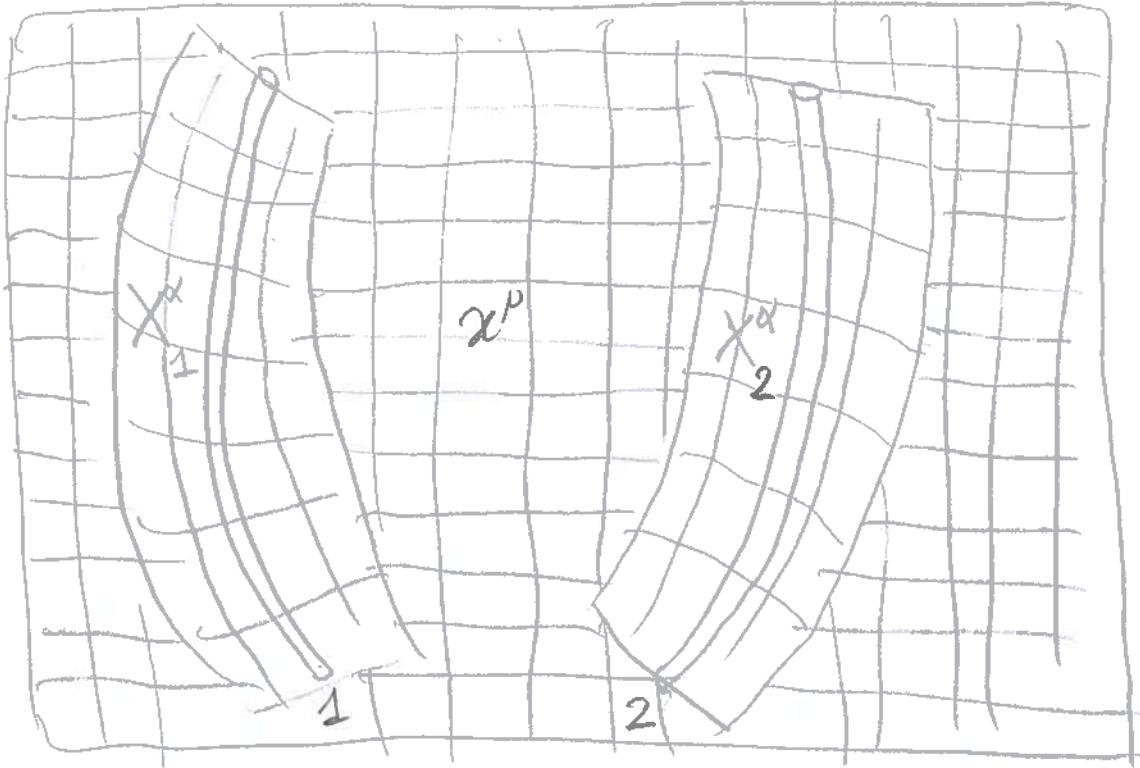


Atlas = ensemble recouvrant de cartes locales.

# Approche traditionnelle au problème à $N$ corps



- déformation apparente des corps
  - problème pour définir un "centre de masse", et des moments multipolaires,
  - problème des champs forts: BN, NS
- Approche multi-carte { une carte globale  $x^P$  "barycentrique"  
et  $N$  cartes locales  $X_A^\alpha$  "géocentriques", etc.. }



# Première approximation post-Newtonienne : 1PN

formulation de Blanchet-Damour Ann. IHP 50, 377  
(1989)

Approximation Newtonienne

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{00} = -1 + \frac{2}{c^2} U + O(\frac{1}{c^4}) \\ g_{ij} = \left(1 + \frac{2}{c^2} U\right) \delta_{ij} \quad \Delta U = -4\pi G \rho \\ g_{0i} = O(\frac{1}{c^3}) \quad \rho \approx \frac{T^{00}}{c^2} \end{array} \right.$$

Pour avoir corrections en  $\frac{v^2}{c^2}$  et  $\frac{U}{c^2}$  aux équations du mouvement:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \partial_i U + \frac{1}{c^2} (\dots)$$

il faut

- les termes en  $O(\frac{1}{c^4})$  dans  $g_{00}$
- les termes en  $O(\frac{1}{c^3})$  dans  $g_{0i}$



vertex cubique

cad termes  $\partial \partial h h h$  de l'action

ou termes non linéaires  $\sim \partial \partial h h$  dans les équations d'Einstein

# 4.4

## Paramétrisation exponentielle de la métrique

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{00} = - \exp\left(-\frac{2}{c^2}w\right) = -\left(1 - \frac{2}{c^2}w + \frac{2}{c^4}w^2 + O(\frac{1}{c^6})\right) \\ g_{0i} = -\frac{4}{c^3}w_i + O(\frac{1}{c^5}) \\ g_{ij} = + \exp\left(\frac{2}{c^2}w\right) \delta_{ij} = \left(1 + \frac{2}{c^2}w + O(\frac{1}{c^4})\right) \delta_{ij} \end{array} \right.$$

→ rend les eqs. d'Einstein linéaires à l'ordre 1PN

Termes sources

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma := \frac{T^{00} + T^{ss}}{c^2} \\ \sigma^i := \frac{T^{0i}}{c} \end{array} \right.$$

$$= O(\frac{1}{c^4})$$

$$\Delta w + \frac{3}{c^2} \partial_t^2 w + \frac{4}{c^2} \partial_t \partial_i w_i = -4\pi G \sigma + O(4)$$

$$\Delta w_i - \partial_{ij} w_j - \partial_t \partial_i w = -4\pi G \sigma^i + O(2)$$

quasi-Maxwell, avec invariance de jauge

↑  
un potentiel scalaire  $w$   
et un potentiel vecteur  $w_i$

$$w' = w - \frac{1}{c^2} \partial_t \lambda$$

$$w'_i = w_i + \frac{1}{4} \partial_i \lambda$$

4.5

onde harmonique pour  $x^0$ :

$$\theta = \square_g x^0 = -\frac{4}{c^3} (\partial_t w + \partial_i w_i) + O(5)$$

i.e.  $\partial_t w + \partial_i w_i = 0$  "à la Lorenz"

$$\Delta w - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 w = -4\pi G \sigma$$

$$\Delta w_i = -4\pi G \sigma^i$$

Champs gravito-électriques et gravito-magnétiques

$$e_i[w] = \partial_i w + \frac{4}{c^2} \partial_t w_i$$

$$b_{ij}[w] = \epsilon_{ijk} b_k[w] = -4 [\partial_i w_j - \partial_j w_i]$$

→ invariants de jauge

→ satisfont des éqs du type Maxwell

Solitaires IPN

moyenne symétrique ±

$$w(t, \vec{x}) = \frac{G}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \sigma(t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}, \vec{x}') = \frac{G}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \left[ \frac{\sigma(t, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{2c^2} \partial_t^2 \sigma(t, \vec{x}') |\vec{x} - \vec{x}'| \right]$$

$$w_i(t, \vec{x}) = G \int d^3x' \frac{\sigma^i(t, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

# Application à un seul corps (au repos)



$$\partial_t w = 0$$

$$\Delta w = -4\pi G \sigma$$

$$\sigma^i = 0$$

$$\Delta w^i = 0$$

$$w = G \int d^3x' \frac{\sigma(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = G \frac{M}{|\vec{x}|}, \quad M = \int d^3x' \sigma(x')$$

$$= \int d^3x' \frac{T^{00} + T^{ss}}{c^2}$$

si corps à symétrie sphérique

$$ds^2 = -e^{-\frac{2w}{c^2}} c^2 dt^2 + e^{\frac{2w}{c^2}} d\vec{x}^2 = -\left(1 - \frac{2w}{c^2} + \frac{4w^2}{c^4}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2w}{c^2}\right) d\vec{x}^2$$

Lien avec solution de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2 d\Omega^2$$

coordonnées isotropiques:  $r = \bar{r} \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^2$

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - \frac{m}{2\bar{r}}}{1 + \frac{m}{2\bar{r}}}\right)^2 c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^4 (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$$\simeq -\left(1 - 2\frac{m}{\bar{r}} + 2\left(\frac{m}{\bar{r}}\right)^2\right) c^2 dt^2 + \left(1 + 2\frac{m}{\bar{r}} + \dots\right) \delta_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j$$

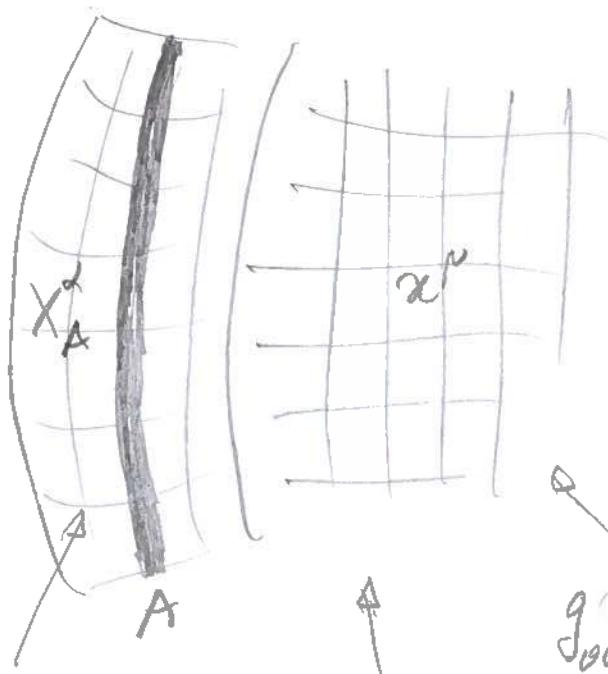
# Application au cas de N corps : Mécanique Céleste Relativiste

4.7

formalisme de Damour-Soffel-Xu PRD 43, 3273 (1991)

PRD 45, 1017 (1992)  
etc...

multi-carte :  $\begin{cases} x^\mu \\ X^\alpha \\ X_A \leftarrow A=1, 2, \dots, N \end{cases}$



carte globale

$$g_{00}(x) = e^{-2w(x)/c^2}, \dots$$

Eqs linéaires pour  $w, w_i$

A<sup>ième</sup> carte locab

$$G_{00}^A = -e^{-2W_A(X_A)}, \dots$$

Eqs linéaires pour  $W_A, W_{A\alpha}$

transformation de coordonnées

On définit la masse, le spin, et les moments multipolaires du corps A dans son référentiel propre :

$$\boxed{\begin{aligned} x^\mu &= f^\mu(X^\alpha) \\ &= z^\mu(X^0) + e_a^\mu(X^0)(X^a + O(\bar{x}^2)) \end{aligned}}$$

Dans la carte locale A:

$$\boxed{W_\alpha^A(X_A^\beta) = W_\alpha^{+A}(X_A^\beta) + \bar{W}_\alpha^A(X_A^\beta)}$$

partie engendrée localement

$$W^{+A} = G \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l}{l!} \partial_L \left( \frac{M_L^A(T + \frac{R}{c})}{R} \right) + \text{jauge}$$

$$= G \left[ \frac{M^A}{R} + \underset{\uparrow}{d_i} \left( \frac{M^A}{R} \right) + \frac{1}{2} \underset{\uparrow}{d_{ij}} \left( \frac{M^A}{R} \right) + \dots \right]$$

masse (locale)      dipôle      quadropôle

+ moments multipolaires de type magnétique

$$S_L^A = \{ S_i^A, S_{ij}^A, \dots \}$$

partie venant de l'extérieur:  
effets inertIELS + effets des autres corps  
développement multipolaire de "marées"

$$\bar{W}^A = \sum_l \frac{1}{l!} \left[ \hat{X}^L G_L^A(T) + \frac{1}{2(2l+3)c^2} \frac{\vec{X}^2 \hat{X}^L}{dT^2} d^2 G_L^A(T) \right] + \text{jauge}$$

moments de marées de type électrique

$$G^A, G_i^A, G_{ij}^A, \dots$$

+ moments de marées de type magnétique

$$H_i^A, H_{ij}^A, \dots$$

# 4.9

## Dérivation à la d'Alembert des éqs du mouvement de $N$ corps

(tenant compte de l'auto-gravitation et avec spins et moments multipolaires quelconques)

Théorème:  $\nabla_\alpha T_A^{\alpha\beta}(X) = 0 \Rightarrow$  locallement

$$\frac{d^2 M_a^A}{dT^2} = \sum_{l \geq 0} \frac{1}{l!} M_L^A G_{aL}^A + \frac{1}{c^2} \tilde{F}_a [ M_L^A S_L G_L H_L ]$$

Consequence: si l'on définit le "repère local du centre de masse de A" par la condition  $M_a^A = 0$  (pas de dipole dans  $W_A^+$ ) on a une condition d'équilibre entre "forces gravitationnelles" et "forces d'inertie"

$$[ M_a^A G_a^A + \frac{1}{2!} M_{bc}^A G_{abc}^A + \dots + \frac{1}{c^2} \tilde{F}_a [ \dots ] = 0 ]$$

↑ force gravitationnelle      ↑ forces témarées      ↑ termes 1PN  
 ↓ d'inertie (invariant  
l'accélération de A  
par rapport à la carte globale  $x^\mu$ )

Pour un corps dont les moments multipolaires sont nuls, on trouve

$$G_a^A = 0 \iff \text{la ligne } X_A^a = 0 \text{ est une géodésique de la métrique centrale de A "extérieure": } \begin{cases} \bar{G}_{00} = -\exp -2 \bar{W}/c^2 \\ \bar{G}_{0a} = -4 \bar{W}_a/c^3 \end{cases}$$

→ on retrouve Lorentz-Droste-Einstein Infeld Hoffmann

## Métrique et Eqs du Mouvement dans d'autres théories de la gravitation

10

Formalisme post-Newtonien paramétrisé (PPN, Eddington, ...; Will)

On introduit des paramètres non-dimensionnelles  $\beta, \gamma, \dots$  représentant des déviations possibles par rapport aux prédictions de la RG.

Par ex. pour 1 corps

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2}{c^2}U + \frac{2}{c^4}\beta U^2\right)c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2\gamma}{c^2}U\right)d\vec{x}^2$$

$\uparrow$                                            $\downarrow$

$\beta_{RG}=1$                                        $\gamma_{RG}=1$

Cela permet que divers tests de la RG sondent des aspects différents de la théorie : / linéaires :  $\gamma$   
- vertex cubique :  $\beta$

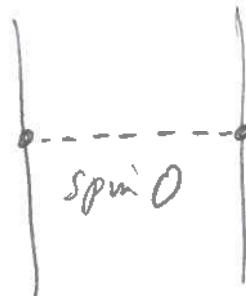
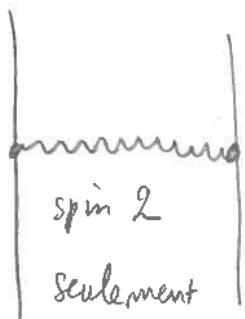
Cela permet aussi de découvrir des tests nouveaux de la gravitation relativiste : comme l'effet Nordtvedt (1968)

# 4.11

Reformulation en termes de champ (et de diagrammes)  
du formalisme PPN (Damour-Esposito-Farese 1992, 1996)

R G

+ champ scalaire



$$S = \int \frac{d^4x}{c} \frac{c^4}{16\pi G_*} \left[ R(g_*) - 2 g_*^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \right] + S_m(t_m) e^{2a(\varphi)} g_{\mu\nu}^*$$

↑  
 terme équivalent de  $\varphi$   
 ↑  
 couplage de la matière

$\tilde{g}_{\mu\nu}(z) = e^{2a(\varphi)} g_{\mu\nu}^*(z)$   
 ↑  
 fonction de couplage  
 de  $\varphi$  à la matière  
 $\int \tilde{m}_a d\tilde{S}_a$   
 par ex:

$$-\sum_a c \int \tilde{m}_a e^{a(\varphi)} \sqrt{-g_{\mu\nu}^* dx^\mu dx^\nu}$$

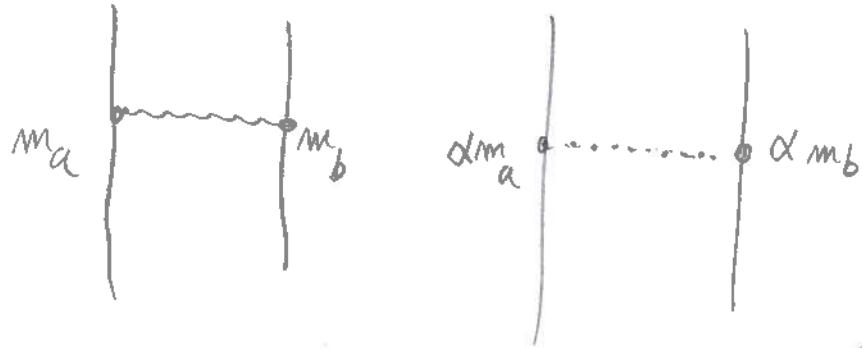
masse dépendante de  $\varphi / g_{\mu\nu}^*$

Coefficient de  
couplage de  $\varphi$   
à la masse  $m_a$

$$\alpha(\varphi) = \frac{\partial \ln [\tilde{m}_a e^{a(\varphi)}]}{\partial \varphi} = \frac{\partial a(\varphi)}{\partial \varphi}$$

Alors

4.12



$\varphi_0 = \varphi_{\text{asymptotique}}$

$$\Rightarrow \tilde{G} \frac{\tilde{m}_a \tilde{m}_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tilde{G} = G * e^{2\alpha(\varphi_0)} \left( 1 + \alpha(\varphi_0)^2 \right)}$$

et comme on avait  
pour les termes en  $v^2/c^2$

$$\gamma_s = -1 + \frac{1}{2}s^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_0 = -1 \leftarrow \text{pur spin } 0 \\ \gamma_2 = +1 \leftarrow \text{pur spin } 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{mélange} \\ \alpha^2 \\ 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\gamma_2 + \alpha^2 \gamma_0}{1 + \alpha^2} = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}$$

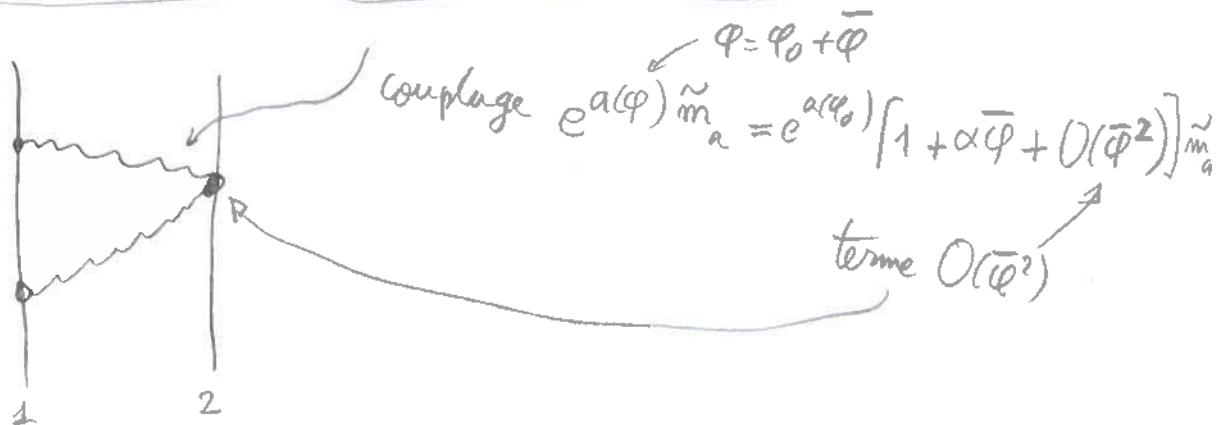
$$\gamma_{-1} = -2 \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}$$

$\Rightarrow$  Test mesurant  $\gamma_{-1} \Rightarrow$  limite sur la présence de  $\varphi$  scalaire ( $s=0$ )  
se mélangeant à  $g_{\mu\nu}$  ( $s=2$ )

# Effets non-linéaires liés à $\varphi$

4.13

①



→ rajoute un terme en  $\frac{m_1^2 m_2}{|x_1 - x_2|^2}$  → modifie  $\beta$ :

$$\boxed{\beta - 1 = \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \alpha \frac{(1 + \alpha^2)^2}{(1 + \alpha^2)^2}}$$

②

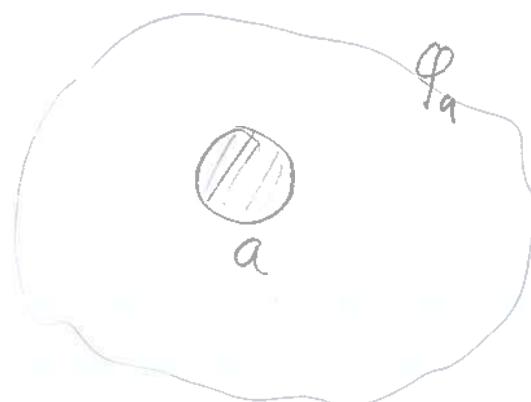
Pour un corps dont l'auto-gravitation n'est pas négligeable

$$\tilde{m}_a = \tilde{m}_a^0 + \tilde{G}(a) \hat{E}_a^{\text{grav}}$$

énergie de liaison gravitationnelle

$$\tilde{G}(a) = G_* e^{2\alpha(a_a)} \left(1 + \left(\frac{\partial \alpha(a_a)}{\partial a}\right)^2\right)$$

valeur "asymptotique" de  $\varphi$  vue par le corps a



4.14

Action  $\int \tilde{m}_a(\varphi_a) d\tilde{s}_a = - \int \underbrace{\tilde{m}_a(\varphi_a)}_{\substack{\text{dépendance} \\ \text{supplémentaire} \\ \text{du à l'auto-gravité}}} e^{a(\varphi_a)} ds_a$

$\underbrace{\phantom{m_a(\varphi_a)}}_{\text{habitud}}$

$$\Rightarrow \tilde{G}_{ab} \frac{\tilde{m}_a(\varphi_0) \tilde{m}_b(\varphi_0)}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|} \quad \text{avec}$$

$$\tilde{G}_{ab} \approx G_F e^{2a(\varphi_0)} (1 + \alpha^2(\varphi_0)) \left\{ 1 + (4\beta - 8 - 3) \left( \frac{E_a^{\text{grav}}}{mc^2} + \frac{E_b^{\text{grav}}}{mc^2} \right) \right\}$$

effet Nordtvedt: nul en RG

non nul dans les autres théories

→ violation de l'universalité de la chute libre par  $\frac{E^{\text{grav}}}{mc^2}$

# Quelques tests dans le système solaire

Sonde Cassini (Bertotti et al 2003)



ondes électromagnétiques,  
principe de Fermat

$$0 = ds^2 = -(1 - \frac{2U}{c^2}) c^2 dt^2 + (1 + 2\gamma U) d\vec{x}^2$$

$$c dt = \left(1 + \frac{\gamma+1}{c^2} U\right) |d\vec{x}|$$

$$ct_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 |d\vec{x}| \left(1 + \frac{\gamma+1}{c^2} U\right)$$

→ effet relatif de changement  
de fréquence entre l'émission et la réception d'un écho sur Terre

et "retard" gravitationnel  
(Shapiro 1964)

$$\boxed{\gamma - 1 = (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}}$$

⇒ Beaucoup d'autres tests de  $\gamma$ , cad des interactions  
"gravitomagnétiques"

Effet de Sitter



"boucle de courant"  
dans le champ  $\vec{B} = -4\vec{v} \times \vec{E}$   
gravitomagnétique apparent géocentrique.

Couplage Spin-orbite



pour satellites terrestres

Couplage Spin-spin



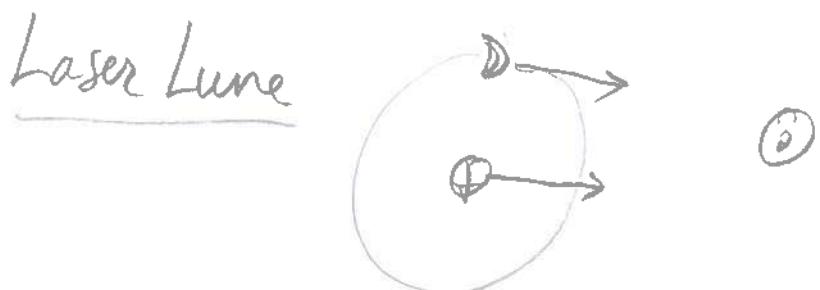
gyroscope GPB

Tests de  $\beta$  ou  $\eta = 4\beta - \gamma - 3$  (non linéaires) 4.16

Avance du périhélie des planètes (Mercure, ...)

$$\Delta\varphi = \frac{2+2\gamma-\beta}{3} \times \underbrace{\frac{6\pi GM}{c^2 P_a}}_{RG} p = a(1-e^2)$$

Données de la sonde Messenger (Verma et al 2013) suggèrent des limites sur  $\beta-1$  et  $\gamma-1$  de l'ordre de  $10^{-5}$



$$\left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{Terra-Lune}} = (-0.8 \pm 1.3) \times 10^{-13}$$

contraignent  $\eta = 4\beta - \gamma - 3$  ( $\frac{E_D^{\text{grav}}}{m_D} \neq \frac{E_{\oplus}^{\text{grav}}}{m_{\oplus}}$ )

$$\eta = 4\beta - \gamma - 3 = (1.8 \pm 2.9) \times 10^{-4}$$

Faut-il conclure de

$$\frac{1-\gamma}{2} = \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} \underset{\sim}{\sim} (-1 \pm 1) \times 10^{-5}$$

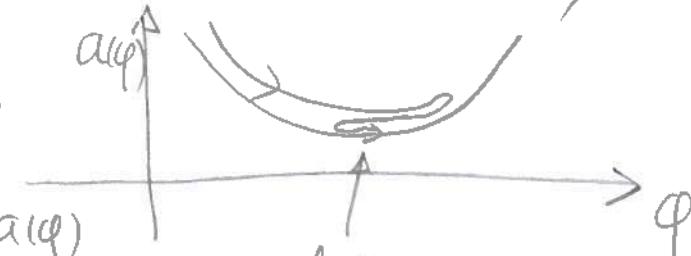
cad  $\alpha^2 \lesssim 10^{-5}$

$$\text{couplage } \alpha(\varphi_0) = \left. \frac{\partial a(\varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0}$$

qu'il n'est pas naturel d'avoir une constante scalaire à la gravitation, et donc que la gravitation est purement  $s=2$  ?

Pas forcément : en effet  $\exists$  mécanisme d'attraction <sup>(cosmologique)</sup> de  $\varphi_{\text{cosmo}} = \varphi_0$  vers  $\alpha(\varphi) = 0$  (Damour-Nordtvedt 93, Damour-Polyakov 94)

si  $V(\varphi) = 0$  couplage de  $\varphi$



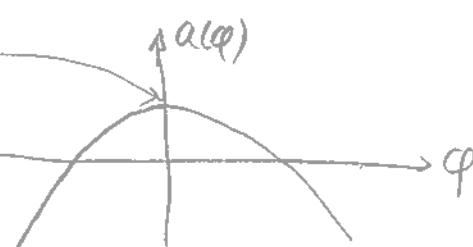
à la matière  $\propto a(\varphi)$

cosmologiquement attiré vers minimum de  $a(\varphi) \rightarrow \alpha(\varphi) = \frac{\partial a}{\partial \varphi} = 0$

en bien

$$\text{si } V(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

et



ou

$$\text{si } a(\varphi) = \alpha_0 \varphi \text{ et}$$

$$V(\varphi) \approx \frac{1}{\varphi^n} \quad (\text{Khoury Weltman 2004})$$

$$V_{eff}(\varphi)$$

$$V(\varphi) + p_a(\varphi)$$

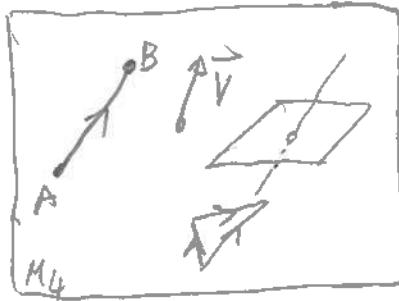
"Caméléon"

En outre : les tests dans le système solaire ne sondent que les champs gravitationnels faibles et quasi-stationnaires. Les choses peuvent être différentes dans d'autres régimes.

# RAPPELS de RELATIVITÉ RESTREINTE

Espace-temps de Poincaré-Minkowski :  $M_4$

structure affine



[manuel récent de RR par E. Gourgouthom]

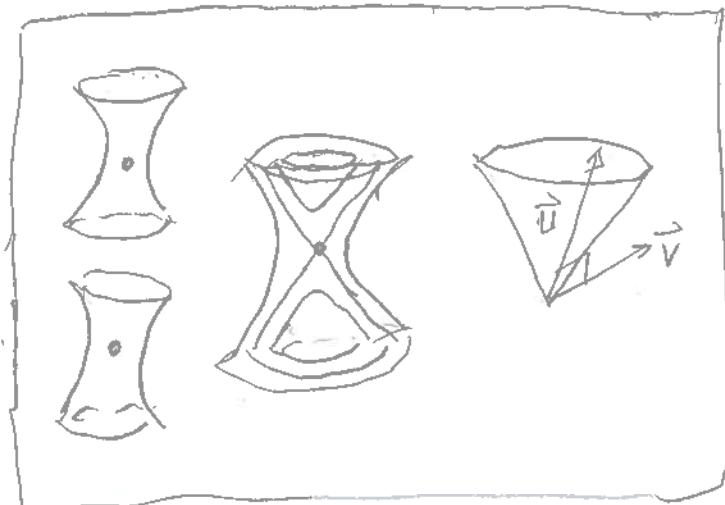
structure (chrono-géométrique)

$$s_{AB}^2 = f(\vec{AB}, \vec{AB}) = \vec{AB} \cdot \vec{AB}$$

metric plate

repères affines quelconques

$$\xrightarrow{\text{K}} \vec{e}_p \cdot \vec{e}_v = f_{pv}$$

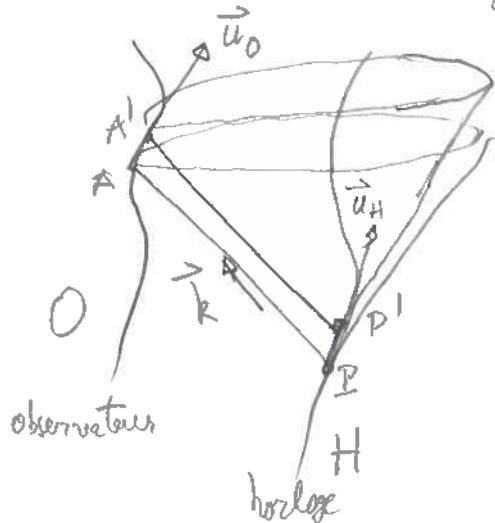


repères affines orthonormés

$$\vec{e}_p \cdot \vec{e}_v = \eta_{vv} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \\ 0 & +1 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} = x^v \vec{e}_v \quad x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

Penser géométriquement : e.g. effet Doppler général



$$\vec{PP}' = \vec{u}_H d\tau_H = \vec{dP}$$

$$\vec{PA}' = \vec{u}_0 d\tau_0 = \vec{dA}$$

$$0 = (\vec{PA})^2 = (\vec{PA}')^2 \quad 0 = d(\vec{PA})^2 = 2 \vec{PA} \cdot (d\vec{A} - d\vec{P})$$

$$\vec{PA} \propto \vec{k} \text{ uotrope } (\vec{k}^2 = 0)$$

$$0 = \vec{k} \cdot (\vec{u}_0 d\tau_0 - \vec{u}_H d\tau_H)$$

$$\frac{d\tau_0}{d\tau_H} = \frac{(\vec{k} \cdot \vec{u}_H)^{\text{émission}}}{(\vec{k} \cdot \vec{u}_0)^{\text{réception}}}$$

# Calcul tensoriel



changement repère affine  $\{O, \vec{e}_p\} \rightarrow \{O', \vec{e}'_p\}$

$$\begin{aligned}\vec{e}_p &= A_p^{\nu'} \vec{e}_{\nu'}, \quad (\text{convention de}) \\ \overrightarrow{O'O} &= B^{\mu'} \vec{e}_{\mu'} \quad (\text{sommation d'Einstein})\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{O'P} = x^{\mu'} \vec{e}_{\mu'} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = B^{\mu'} \vec{e}_{\mu'} + x^{\nu} \vec{e}_{\nu}$$

coordonnées affines  $x^{\mu'} = A_{\nu}^{\mu'} x^{\nu} + B^{\mu'}$  si orthonormées

vecteur  $\vec{V} = V^{\mu} \vec{e}_{\mu} = V^{\mu} \vec{e}_{\mu}$   $V^{\mu'} = A_{\nu}^{\mu'} V^{\nu}$  Lorentz

tensor  $\overset{\equiv}{T}: [p] \quad T^{\mu_1 \nu_1 \dots}_{\rho_1 \sigma_1 \dots} = A_{\mu}^{\mu'} A_{\nu}^{\nu'} \dots A_{\rho}^{\rho'} A_{\sigma}^{\sigma'} \dots T^{\mu' \nu' \dots}_{\rho' \sigma' \dots}$

$\epsilon V \otimes V \otimes V^* \otimes V^*$  matrices inverses  $A_{\sigma}^{\mu'} A_{\nu}^{\sigma'} = \delta_{\nu}^{\mu'} = \delta_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

calcul tensoriel :  $T_{\nu}^{\mu} = a R_{\nu}^{\mu} + b S_{\nu}^{\mu}$  combinaisons linéaires

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \quad \text{transposition}$$

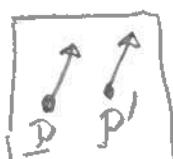
$$T_{\nu}^{\mu} = R_{\nu\sigma}^{\mu\sigma} \quad \text{contraction}$$

métrique plate  $\delta_{\mu\nu} \rightarrow \delta^{\mu\nu}$  inverse  $\delta^{\mu\nu} \delta_{\nu\sigma} = \delta_{\sigma}^{\mu}$

$$T_{\mu}^{\nu} = \delta_{\mu\sigma} T^{\sigma\nu} \quad \text{mouvement d'index avec } \delta_{\mu\nu}, \delta^{\mu\nu}$$

champ tensoriel :  $T_{\nu}^{\mu}(x^{\lambda}): T_{\nu}^{\mu'}(x^{\lambda'}) = A_{\nu}^{\mu'} A_{\nu'}^{\nu} T_{\nu'}^{\mu'}(x^{\lambda})$

transport parallèle



$\rightarrow \text{différentiation: } T_{\nu}^{\mu}{}_{\lambda} = \frac{\partial T_{\nu}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} = \partial_{\lambda} T_{\nu}^{\mu} = T_{\nu}^{\mu}{}_{\lambda}$

# RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Rapprochement par Einstein d'identités physiques remarquables

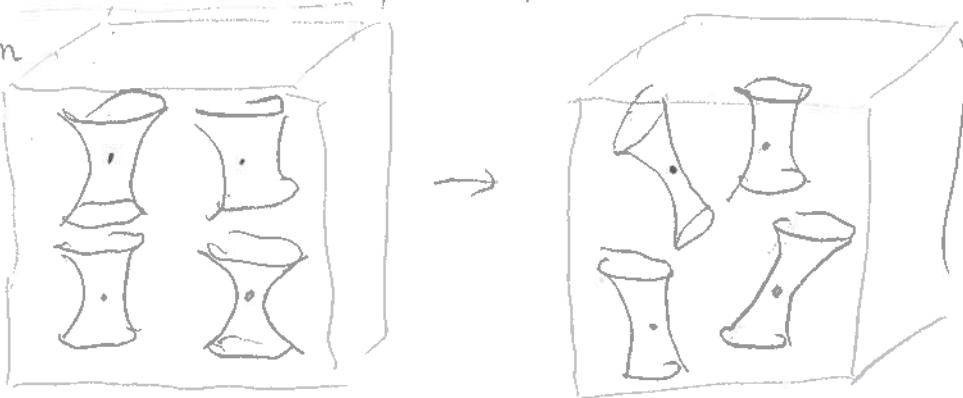
$$\begin{aligned} m_i &= m_g \\ m_i &= \frac{E_0 \text{ totale}}{c^2} \\ m_g &= m_g^{\text{passive}} = m_g^{\text{active}} \end{aligned}$$

- ← universalité de la chute libre  $m_i \vec{a} = m_g \vec{g}$
- ascenseur d'Einstein / efface  $\vec{g}$  crée
- source de la gravitation = énergie
- action et réaction  $F_g = G \frac{m_g^{\text{passive}} m_g^{\text{active}}}{r^2}$

Les 2 postulats fondamentaux de la RG

1. ) gravitation = géométrie (de l'espace-temps)

deformation  
de  
Minkowski



$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$$

$g_{\mu\nu}(x)$  se couvre de façon universelle et minimale à tous les champs

du modèle standard (remplacement  $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}(x)$ ):  $\int \frac{d^4x}{c} L_{SM}$

$$\begin{aligned} L_{SM} [\psi, A_\mu, H; g_{\mu\nu}] &= -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{4\pi} \right) \sum_{\text{cgs}} \sqrt{g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta}^a - \sum \sqrt{g} \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{\mu\nu} \overline{D_\mu H} D_\nu H - \sqrt{g} V(H) - \sum \lambda \sqrt{g} \bar{\psi} H \psi \end{aligned}$$

$$g = -\det(g_{\mu\nu}(x)); \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c$$

L'action de la matière  $S_{\text{mat}} = \int \frac{d^4x}{c} L_{SM}$  est invariante sous  $x'^\mu = f^\mu(x^\nu)$

2. Action pour la gravitation:  $S_g = \int \frac{d^4x}{c} \mathcal{L}_g [g_{\mu\nu}]$

$$\mathcal{L}_g [g_{\mu\nu}] = \frac{c^4}{16\pi G} \sqrt{g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(g)$$

$$R_{\mu\nu}(g) = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

La RG est donc définie par l'action totale

$$S_{\text{tot}} [\varphi, A_\mu, H; g_{\mu\nu}] = \underbrace{\int \frac{d^4x}{c} \mathcal{L}_g [g_{\mu\nu}]}_{S_g[g_{\mu\nu}]} + \underbrace{\int \frac{d^4x}{c} \mathcal{L}_{SM} [\varphi, A_\mu, H; g_{\mu\nu}]}_{S_m[\varphi, A_\mu, H; g_{\mu\nu}]}$$

La théorie est invariante sous des changements arbitraires de coordonnées

$x'^\mu = f^\mu(x^\nu)$  : "Principe de relativité générale"

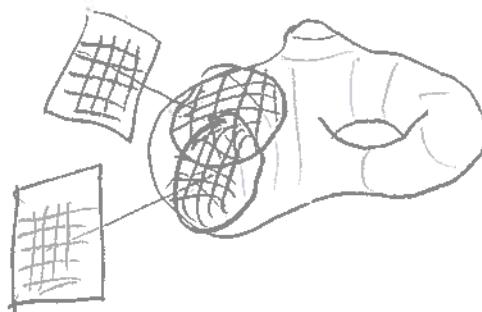
# Introduction élémentaire au cadre mathématique de la RG

Variétés différentiables:  $V_n$  a<sup>c</sup> n dimensions

topologiquement:  $V_n$  = espace topologique séparé dont tout point admet un voisinage homeomorphe a<sup>c</sup>  $\mathbb{R}^n$

généralisation de

localement  
on peut  
étiqueter de  
façon continue les  
points de  $V_n$  par n nombres réels



( $x^1, x^2, \dots, x^n$ ) "carte"

En général, il n'existe pas de "carte" globale.

→ besoin d'un ensemble de cartes locales (un "atlas")  
pour recouvrir tout  $V_n$ ; avec conditions de différentiabilité  
pour les changements de coordonnées  $x'^i = f^i(x^j)$  dans l'intersection des cartes.

Champ scalaire application  $V_n \rightarrow \mathbb{R}$

en coordonnées  $F(P) = f(x^i) = f(x^{i'})$

localement dans chaque carte

Vecteur: intuitivement: couple de points infinitiment voisins



puis  $\vec{V}_P = \frac{\overrightarrow{PP'}}{\epsilon}$

géométriquement

espace tangent  $T_P$   
au point  $P$



en composantes

$$\left. \begin{array}{l} P \leftrightarrow x^\mu \\ P' \leftrightarrow x^\mu + dx^\nu \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} \vec{PP'} &\leftrightarrow dx^\mu \\ \vec{V} &= \frac{\vec{PP'}}{\epsilon} \leftrightarrow \frac{dx^\nu}{\epsilon} \end{aligned}$$

tel que, sous changement de coordonnées  $x^{\mu'} = f^\mu(x^\nu)$

$$dx^{\mu'} = \left( \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \right)_P dx^\nu$$

$$V^{\mu'}_P = \left( \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \right)_P V^\nu$$

Définition intrinsèque :

opérateur de dérivation <sup>des fonctions relatives</sup> le long de  $\vec{V}$  :  $\vec{V}(F) = \frac{F(P') - F(P)}{\epsilon}$

$$= V^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} F$$

satisfaisant  $\vec{V}(\alpha F + \beta G) = \alpha \vec{V}(F) + \beta \vec{V}(G)$

+ Leibniz :  $\vec{V}(FG) = F \vec{V}(G) + \vec{V}(F) G$

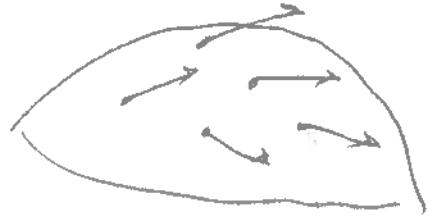
Base naturelle associée à la carte locale  $x^\nu$

$$\vec{e}_\nu = \frac{\vec{PP'}}{\epsilon} \text{ avec } P \leftrightarrow (x^1, \dots, x^\nu, \dots, x^n), P' \leftrightarrow (x^1, \dots, x^\nu + \epsilon, \dots, x^n)$$

cad  $(\vec{e}_\nu)^\nu = \delta_\nu^\nu = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

on  $\vec{e}_\nu(F) = \frac{\partial F}{\partial x^\nu}$  ou supplément  $\vec{e}_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \partial_\nu$

Champ vectoriel: donnée de  $\vec{V}_P$  en chaque  $P$



Dans carte locale  $V^\mu(x^\nu)$  avec  $V^{\mu'}(x^{\nu'}) = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} V^\mu(x^\nu)$

$$\text{composantes naturelles } \vec{V} = V^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} = V^\mu \partial_\mu$$

## Calcul tensoriel

en composantes naturelles  $\overset{\overbrace{\quad}^P}{T}_{\overset{\overbrace{\quad}^q}{}}^{p}$  de variance  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ : composantes  $T_{\rho\sigma\dots}^{\mu\nu\dots}$

$$\text{avec } T_{\rho'\sigma\dots}^{\mu'\nu'}(x') = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \dots \frac{\partial x^P}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\sigma'}} \dots T_{\rho\sigma\dots}^{\mu\nu\dots}(x)$$

↓ P  
 matrices inverses  $\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} = \delta_\nu^{\mu'}$

Définition intrinsèque par produit tensoriel de vecteurs et co-vecteurs (espace dual des vecteurs) ou comme une forme multilinéaire

$$T(A, B, \dots, \vec{U}, \vec{V}, \dots) \in \mathbb{R}$$

✓✓✓  
 vecteurs  $\in T_P$  espace tangent.  
 $\in T_P^*$  espace cotangent

Partie algébrique du calcul tensoriel: comme dans  $M_4$

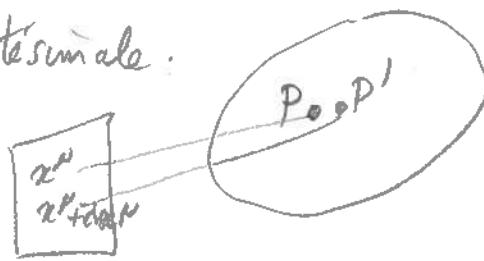
$$T_\nu^\mu = \alpha R_\nu^\mu + \beta S_\nu^\mu, \quad \tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$$

$$T_{\rho\sigma}^{\mu\nu} = R_\rho^\mu \cdot S_\sigma^\nu, \quad \text{contraction } T_\nu^\mu(P) = R_{\nu\sigma}^{\mu\sigma}(P)$$

mais  $\partial_\lambda T_\nu^\mu$  n'est pas un tenseur

# Variétés (pseudo-) riemanniennes

distance infinitésimale :



$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\lambda) dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x)$$

plus abstrairement : on munit la variété d'un champ tensoriel symétrique de type  $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

On suppose que  $g_{\mu\nu}(x)$  est non dégénérée :  $\det g_{\mu\nu}(x) \neq 0$

En chaque point

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \sum_{\alpha=1}^n \varepsilon_\alpha (\theta^\alpha)^2$$

signature de  $g_{\mu\nu} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$   $\varepsilon_\alpha = \pm 1$

Variété riemannienne

$+, +, +, + \dots$

Variété lorentzienne

$- , +, +, + \dots$

$$\theta^\alpha = A^\alpha_\mu(x) dx^\mu$$

Tenseur métrique contravariant :  $g^{\mu\nu}$ ;  $g^{\mu\sigma}(x) g_{\sigma\nu}(x) = \delta_\nu^\mu$

Abaissement et élévation d'indices.

$$T^{\mu\nu}_{\rho\sigma} \xrightarrow{\rho\sigma} T^\nu_{\mu\rho}{}^\sigma_{\sigma(x)} = g_{\rho\alpha(x)} T^{\alpha\nu}_{\mu\sigma(x)}$$

$$T^{\mu\nu} \xrightarrow{\rho\sigma} T^{\mu\nu} {}^\rho_{\rho(x)} {}^\sigma_{\sigma(x)} = g^{\rho\alpha}_{\alpha(x)} T^{\mu\nu} {}^\rho_{\rho(x)} {}^\sigma_{\sigma(x)}$$

# Coordonnées localement cartésiennes (lorentziennes)

idée: simplifier au maximum  $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$  au voisinage d'un point par un changement de carte:  $x^\mu \rightarrow X^\alpha$

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow G_{\alpha\beta}(X^\delta) \quad \text{avec } g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} G_{\alpha\beta}(X)$$

liberté:  $X^\alpha_p(x) = \underbrace{X^\alpha_p}_{P} + \underbrace{X^\alpha_p}_{P}(x^\lambda - x^\lambda_p) + \frac{1}{2} \underbrace{X^\alpha_{\mu\nu}}_{P} (x^\lambda - x^\lambda_p)(x^\nu - x^\nu_p) + \dots$

$\overset{n^2 \text{ nombres}}{\uparrow}$   
pour simplifier

$$g_{\mu\nu}(x_p) \frac{m(m+1)}{2}$$

$\overset{\uparrow}{OK}$  on peut réduire

$$\underset{P}{G_{\alpha\beta}} \rightarrow \delta_{\alpha\beta} \text{ ou } \eta_{\alpha\beta}$$

avec  $\frac{m(m-1)}{2}$  paramètres libres

$$\text{dans } X^\alpha_p : SO(n)$$

$\frac{m^2(m+1)}{2}$  nombres

pour simplifier

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} : \frac{m^2(m+1)}{2}$$

$\overset{\uparrow}{on \text{ peut simplifier}}$

$$\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial X^\delta} = 0$$

$\frac{m^2(m+1)(m+2)}{6}$  nombres pour simplifier

$$\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\rho} \frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

$\overset{\uparrow}{pas \text{ suffisant}}$

$\text{pour annuler}$

$$\frac{\partial^2 G_{\alpha\beta}}{\partial X^\lambda \partial X^\delta}$$

→: En tout point d'une variété (pseudo-) riemannienne, il existe des cartes localement cartésiennes (lorentziennes) telles que

$$G_{\alpha\beta}(X)|_P = \eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \quad \text{et} \quad \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial X^\delta}|_P = 0$$

cad  $G_{\alpha\beta}(X) = \eta_{\alpha\beta} + O((X - X_p)^2)$

# Calcul explicite :

1.10

$X_P^\alpha$  tel que:  $\frac{g_{\mu\nu}}{P} = \eta_{\alpha\beta} X_P^\alpha X_P^\beta$  "décomposition en carrés"

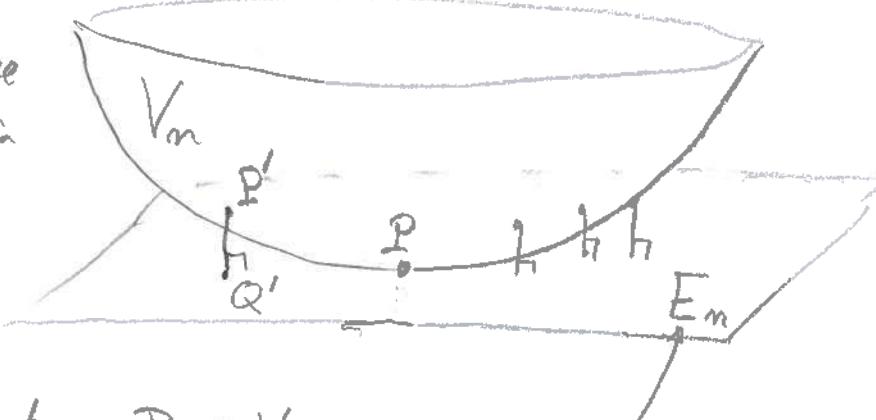
$X_P^\alpha$  donné par  $X_P^\alpha = X_\lambda^\alpha |_{\Gamma_{\mu\nu}^\lambda}$  avec

$$\left| \Gamma_{\mu\nu}^\lambda := \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \right|$$

symétrique en  $\mu\nu$

Géométriquement, si on plonge  $V_m$  dans un espace euclidien assez grand

on peut faire une projection orthogonale de  $V_m$  sur

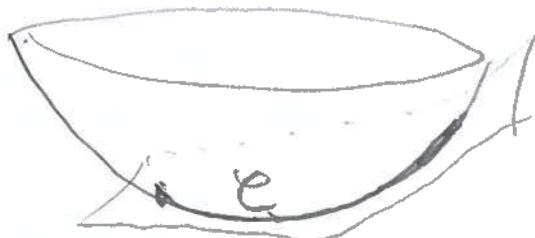


l'espace-tangent en  $P$  à  $V_m$

$E_m$  = espace plat (euclidien)  
osculateur à  $V_m$  au point  $P$

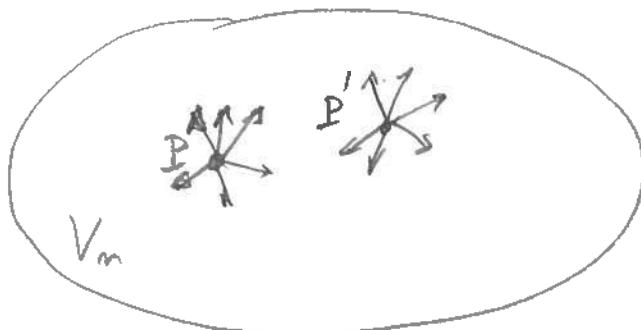
Théorème de Cartan-Fermi:  $\exists X^\alpha$  t.q.

$G_{\alpha\beta}(X) = \eta_{\alpha\beta}$ ,  $\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial X^\lambda} = 0$  le long de n'importe quelle courbe de  $V_m$ : espace plat osculateur le long d'une courbe  $C$

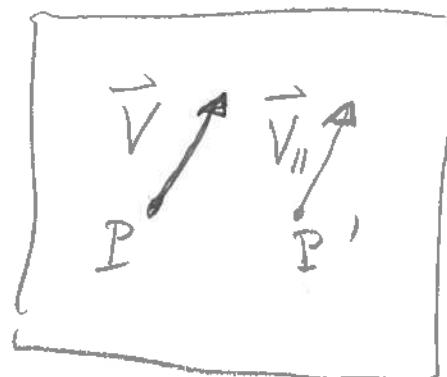


## Connexion riemannienne

Problème : manque de "connexion" entre les "hérissons" des vecteurs en deux points différents de  $V_m$



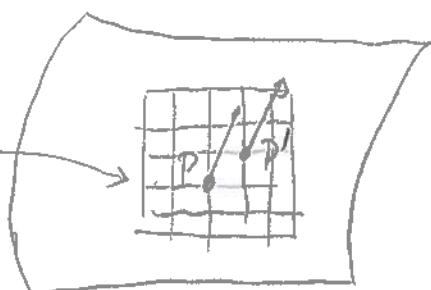
Dans un espace affine (comme  $M_4$ )



Dans un espace (pseudo-) riemannien on peut définir une connexion infinitésimale quand  $P'$  est très voisin de  $P$

analytiquement

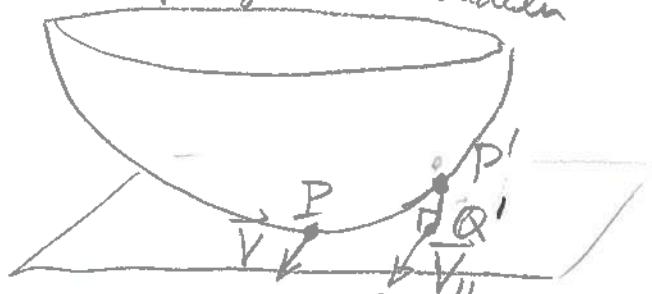
en coordonnées  
localement  
cartésiennes



$X^\alpha$  on définit le transport  
parallèle infinitésimal  
du vecteur  $\vec{V} = V^\alpha(x) \partial/\partial x^\alpha$

$$\text{par } V_\parallel^\alpha|_{P'} := V^\alpha|_P$$

géométriquement (Levi-Civita)  
plongement euclidien



on projette  $\vec{V}_\parallel(Q')$   
sur le plan tangent  
à  $V_m$  en  $P'$

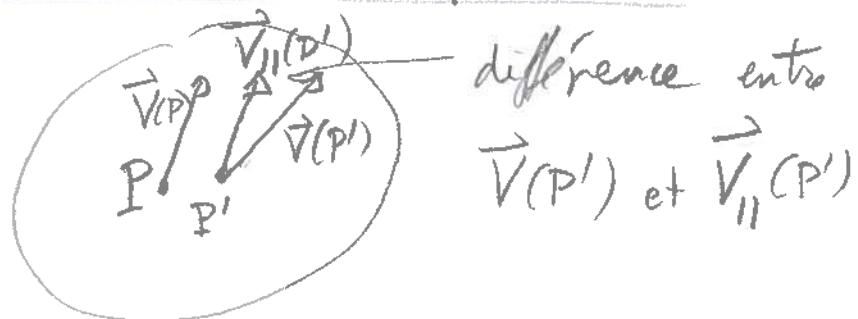
En formules

$$V_{\parallel}^{\alpha}|_{P'} = \left[ \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} V_{\parallel}^{\mu} \right]_{P'} = \left( X_{\mu}^{\alpha} + X_{\mu\nu}^{\alpha} dx^{\nu} \right) V_{\parallel}^{\mu}|_{P'} = X_{\mu}^{\alpha} V_{\parallel}^{\mu}|_{P'} \\ = V^{\alpha}|_P$$

$\uparrow$

$$X_{\mu\nu}^{\alpha} = X_{\mu}^{\alpha} \Gamma_{\nu}^{\lambda} \quad \Gamma_{\nu}^{\lambda}$$

$$\Rightarrow V_{\parallel}^{\mu}|_{P'} := V^{\mu}|_P - \left[ \Gamma_{\nu}^{\mu} dx^{\nu} V^{\nu} \right]_P$$

Dérivation covariante d'un champ vectoriel.

$$\Delta \vec{V} = \vec{V}(P') - \vec{V}_{\parallel}(P') \leftrightarrow \Delta V^{\mu} = \nabla_{\lambda} V^{\mu} dx^{\lambda}$$

$$\boxed{\nabla_{\lambda} V^{\mu} \equiv V^{\mu}_{;\lambda} := \partial_{\lambda} V^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} V^{\sigma}}$$

tensor [1]

dérivée covariante d'un champ de tensors  $T_{\nu\dots}^{\mu\dots}(x)$ 

$$\nabla_{\lambda} T_{\nu\dots}^{\mu\dots} \equiv T_{\nu\dots;\lambda}^{\mu\dots} = \partial_{\lambda} T_{\nu\dots}^{\mu\dots} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu} T_{\nu\dots}^{\sigma\dots} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} T_{\sigma\dots}^{\mu\dots} + \dots \\ = T_{\nu\dots,\lambda}^{\mu\dots} + T_{\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu} - T_{\sigma}^{\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} + \dots$$

↑  
indice de différentiation

## Propriétés de la dérivation covariante

$$\nabla_\lambda (c_1 R_v^\mu + c_2 S_v^\mu) = c_1 \nabla_\lambda R_v^\mu + c_2 \nabla_\lambda S_v^\mu$$

$$\nabla_\lambda (R_v^\mu S_\sigma^\rho) = (\nabla_\lambda R_v^\mu) S_\sigma^\rho + R_v^\mu \nabla_\lambda S_\sigma^\rho$$

$$\nabla_\alpha (\sum \limits_{\beta} T_{\alpha}^{\beta}) = \sum \limits_{\alpha=\beta} \nabla_\lambda T_{\alpha}^{\beta}$$

champ  
scalaire

$$\nabla_\lambda \varphi = \partial_\lambda \varphi$$

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \varphi = \nabla_\nu \nabla_\mu \varphi$$

métrique

$$\boxed{\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0}$$

$$\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$$

$$\nabla_\lambda \delta_\nu^\mu = 0$$

# Équations d'Einstein

Action  $S = S_{\text{gravitation}}[g_{\mu\nu}] + S_{\text{matière}}[t, A_\nu, H; g_{\mu\nu}, \Gamma^\lambda_{\mu\nu}]$

remplace  $t$   
 $\partial \rightarrow \nabla$

Définition du tenseur d'énergie-impulsion de la matière

$$T^{\mu\nu} := \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_{\text{matière}}}{\delta g_{\mu\nu}}$$

symétrique

(où  $g = -\det g_{\mu\nu}$ )

cad

$$\delta S_{\text{matière}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4x}{c} \sqrt{g} T^{\mu\nu} (\square) \delta g_{\mu\nu} + \text{termes de surface}$$

Théorème :  $\frac{\delta S_{\text{matière}}}{\delta t} = 0 + \text{invariance } S_{\text{mat}}[t, g_{\mu\nu}] \Rightarrow \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$

sous difféomorphismes

e.g. Maxwell  $S_F = -\frac{1}{4} \frac{1}{4\pi} \sqrt{g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$   $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_F}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{4\pi} (F^{\mu\sigma} F_{\sigma\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta})$$

$$S_{\text{gravitation}} = \int \frac{d^4x}{c} \sqrt{g} \frac{c^4}{16\pi G} [R(g) - 2\Lambda]$$

constante cosmologique.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} T^{\alpha\beta}$

$\Leftrightarrow T_{\mu\nu}^\Lambda = -\frac{c^4}{8\pi G} \Lambda g_{\mu\nu}$  des membres de droite

# Tests expérimentaux du couplage entre matière et gravité

1<sup>ere</sup> postulat de la RG:

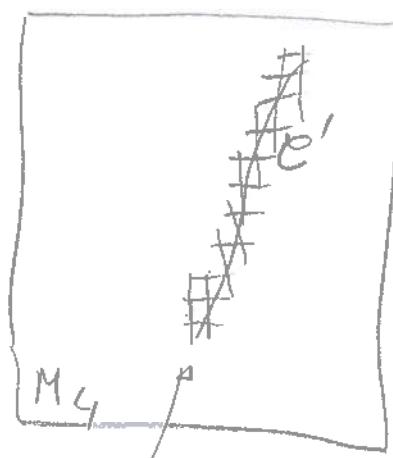
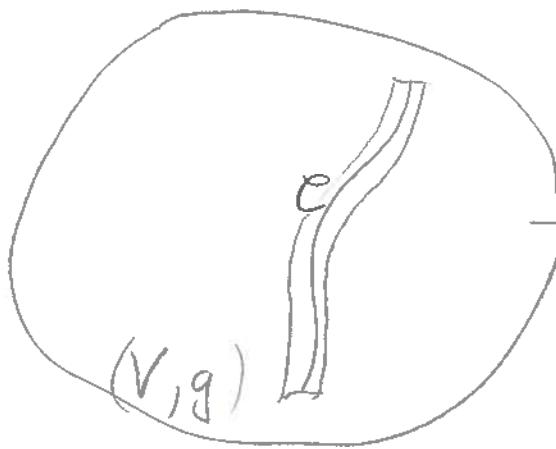
"Principe d'Equivivalence"

$$S_{\text{matière}}^{\text{RG}}[t, A_\mu, \eta_{\mu\nu}; g_{\mu\nu}^{(2)}] = \left(S_{\text{matière}}^{\text{RE}}\right)_{\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}^{(2)}}$$

mais localement:  $g_{\mu\nu}^{(2)} \xrightarrow{x^0} G_{\alpha\beta}(x^\mu) = \eta_{\alpha\beta} + O((x-x_p)^2)$

et c'est même vrai le long d'une courbe quelconque.

Si cette courbe est la ligne d'univers du centre de masse d'un système isolé (cas y petit)



mais  $C'$  = ligne droite dans  $M_4$  pour un système isolé

$\rightarrow C$  se développe en une ligne droite sur  $M_4$  osculatrice

$\rightarrow C$  est une géodésique satisfaisant

$$u^\nu = \frac{dx^\nu}{ds}$$

$$u^\nu \nabla_\nu u^\lambda = \frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

et le long de cette géodésique  $G_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta} + O((x-x_p)^2)$

1.15

Consequences observables (voir références dans la revue de TD:  
du 1<sup>er</sup> postulat RG) (Exp. Tests of Gravitational Theory  
sur pdg.lbl.gov, puis Reviews)

C<sub>1</sub>: "Constance des constantes": dans un petit laboratoire local, les constantes non-dimensionnées décrivant la physique non gravitationnelle locale sont celles du modèle standard en RR (indépendamment, par exemple, de l'évolution cosmologique globale de l'Univers)

e.g.

$$\alpha_{\text{em}} = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.035999679(94)}$$

$$\mu = \frac{m_p}{m_e} = 1836.15267247(80)$$

### Confirmations expérimentales

Oklo, Gabon (fission nucléaire spontanée, il ya  $\sim 2 \times 10^9$  ans)

$$|\Delta \ln \alpha| = \left| \frac{\alpha_{\text{Oklo}} - \alpha_{\text{maintenant}}}{\alpha} \right| < 1 \times 10^{-7}$$

$$|\Delta \ln(\lambda_{\text{mg}} / \lambda_{\text{acs}})| < 4 \times 10^{-9}$$

Spectres astronomiques (en absorption)

$$|\Delta \ln \nu| \leq 3 \times 10^{-6} @ z = 2.8$$

# 1.16

## Tests en laboratoire: comparaison d'horloges atomiques

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d \ln(\alpha_{\text{exp}})}{dt} = (-2.5 \pm 2.6) \times 10^{-17} \text{ an}^{-1} \\ \frac{d \ln N}{dt} = (-1.5 \pm 3.0) \times 10^{-16} \text{ an}^{-1} \\ \frac{d \ln(n_q/n_{\text{aco}})}{dt} = (7.1 \pm 4.4) \times 10^{-15} \text{ an}^{-1} \end{array} \right.$$

à comparer à l'âge de l'univers  $\sim 10^{10}$  ans

Il y a aussi des limites strictes sur une dépendance possible des constantes sur le potentiel gravitationnel environnant.

## C<sub>2</sub>: Invariance de Lorentz locales

les expériences non gravitationnelles locales ne doivent exhiber aucune direction privilégiée dans l'espace-temps

( $\rightarrow$  isotropie spatiale, absence de vitesses privilégiées)

"isotropie de l'espace": modèle jonet : atome d'Hydrogène

$$\hat{H}_0 \psi = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{r} \right) \psi = E \psi$$

$\delta_{ij} \partial_i \partial_j$        $r^2 = \delta_{ij} x^i x^j$   
 même métrique euclidienne

vient / du propagateur de l'électron  $\overline{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} \psi$

/ du propagateur du photon  $\eta^{\mu\nu} F_{\mu\nu} F_{\nu\rho}$

Si on avait des métriques différentes pour l'électron et photon

dans coordonnées où  $g_{\psi}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ ,  $g_F^{\mu\nu} / g_F^{00} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$

$$\Rightarrow \frac{re^2}{r} \rightarrow \frac{e^2}{\sqrt{(\delta_{ij} + h_{ij}) x^i x^j}}$$

directions privilégiées  
qui levant la

dégenerescence habituelle  
due à la symétrie sphérique

→ perturbation  
de  $\hat{H}$

$$\hat{H}_1 = \frac{e^2}{2} h_{ij} \frac{x^i x^j}{r^3}$$

Exp. récente (2011) sur  
déplacements quadripolaires niveaux énergie nucléaires:

$$|h_{ij}| \leq 10^{-29}$$

### C<sub>3</sub> Universalité de la chute libre

des corps d'épreuve non auto-gravitants doivent suivre des géodésiques de  $(V_4, g)$

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

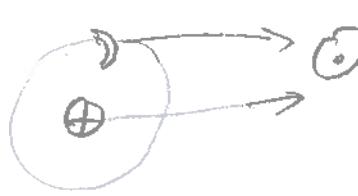
indépendamment de leur masse et composition

Exp. de laboratoire (Adelberger et al.)

$$\left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{BeTi} = (0.3 \pm 1.8) \times 10^{-13}$$

$$\left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{BeAl} = (-0.7 \pm 1.3) \times 10^{-13}$$

Exp. céleste : laser lune



$$\left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{Terre-Lune} = (-0.8 \pm 1.3) \times 10^{-13}$$

teste non seulement le "principe d'équivalence faible"  
mais aussi le "principe d'équivalence fort",  
incluant les effets d'auto-gravitation des corps.

## C<sub>4</sub> Universalité du ralentissement gravitationnel des fréquences

éq. des géodésiques  $\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$

sont une conséquence de l'action effective

$$S_{\text{particule}} = -mc \int ds = -mc \int \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}$$

$$x^0 = ct \rightarrow S_{\text{particule}} = -mc^2 \int dt \sqrt{-g_{00}(x) - 2g_{0i}(x)\frac{v^i}{c} - g_{ij}\frac{v^i v^j}{c^2}}$$

doit se réduire, quand  $v \ll c$ , à  $S_{\text{Newton}} = \int dt \left( \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + m U(x, t) \right)$

potentiel Newtonien  $U(x) = \sum_a \frac{G m_a}{|x - y_a|}$

$\Rightarrow$ , indépendamment des éqs de champ,  $g_{00}(x) = -1 + \frac{2}{c^2} U(x) + O(\frac{1}{c^4})$

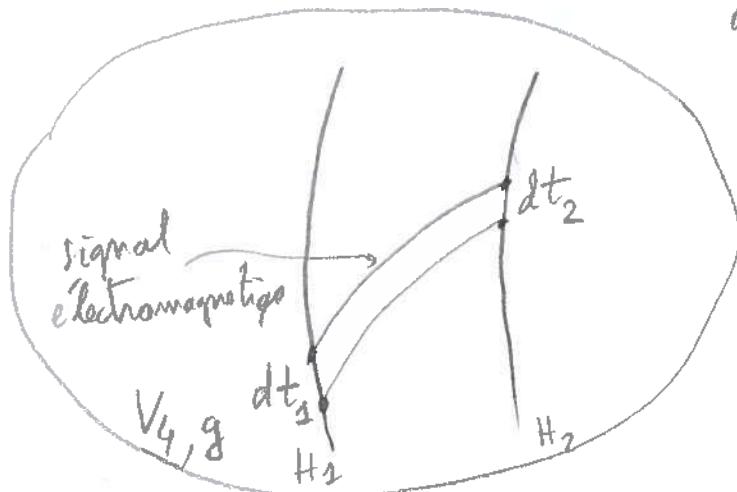
$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + O(\frac{1}{c^2})$$

$$g_{0i}(x) \leq O(\frac{1}{c^2})$$

$\Rightarrow$  temps propre d'une horloge

$$\begin{aligned} dt &= \frac{ds}{c} = \sqrt{-g_{00} - 2g_{0i}\frac{v^i}{c} - g_{ij}\frac{v^i v^j}{c^2}} dt \\ &\simeq \left(1 - \frac{1}{c^2} U(x) - \frac{1}{2} \vec{v}^2\right) dt \end{aligned}$$

Dans un champ gravitationnel stationnaire,



deux horloges identiques  $H_1, H_2$

au repos

stationnaire

invariance  $t \rightarrow t + cst$

$\Rightarrow$  temps de propagation d'un signal lumineux = constant

$$dt_1 = dt_2$$

mais

$$dt_1 \stackrel{\text{à l'émission}}{\approx} \left(1 - \frac{1}{c^2} U(x_1)\right) dt_1$$

$$dt_2 \stackrel{\text{à l'absorption}}{\approx} \left(1 - \frac{1}{c^2} U(x_2)\right) dt_2$$

$$\frac{\frac{dt_1}{dt_1 \text{ réel en } 2}}{\frac{dt_1}{dt_1 \text{ émission}}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{c^2} U(x_2)\right) dt_2}{\left(1 - \frac{1}{c^2} U(x_1)\right) dt_1} = 1 + \frac{1}{c^2} (U(x_1) - U(x_2))$$

1978 exp. de Versot-Levine : comparaison horloge maser à Hydrogène dans une fusée à une horloge semblable au sol

$$\text{vérifie effet } \propto 1 + \frac{\alpha}{c^2} (U(x_1) - U(x_2))$$

$$|\alpha - 1| < 2 \times 10^{-4}$$



Avec horloges les plus stables actuelles  
on voit l'effet gravitationnel sur fréquences

$$\text{pour } \Delta z = 1.6 \text{ cm } \left[ \frac{\Delta \nu}{\nu} = 1.6 \times 10^{-18} \right]$$

Hinkley et al., Science 13 Sept 2013

Rapport à la Friche .. OGF

# RG5

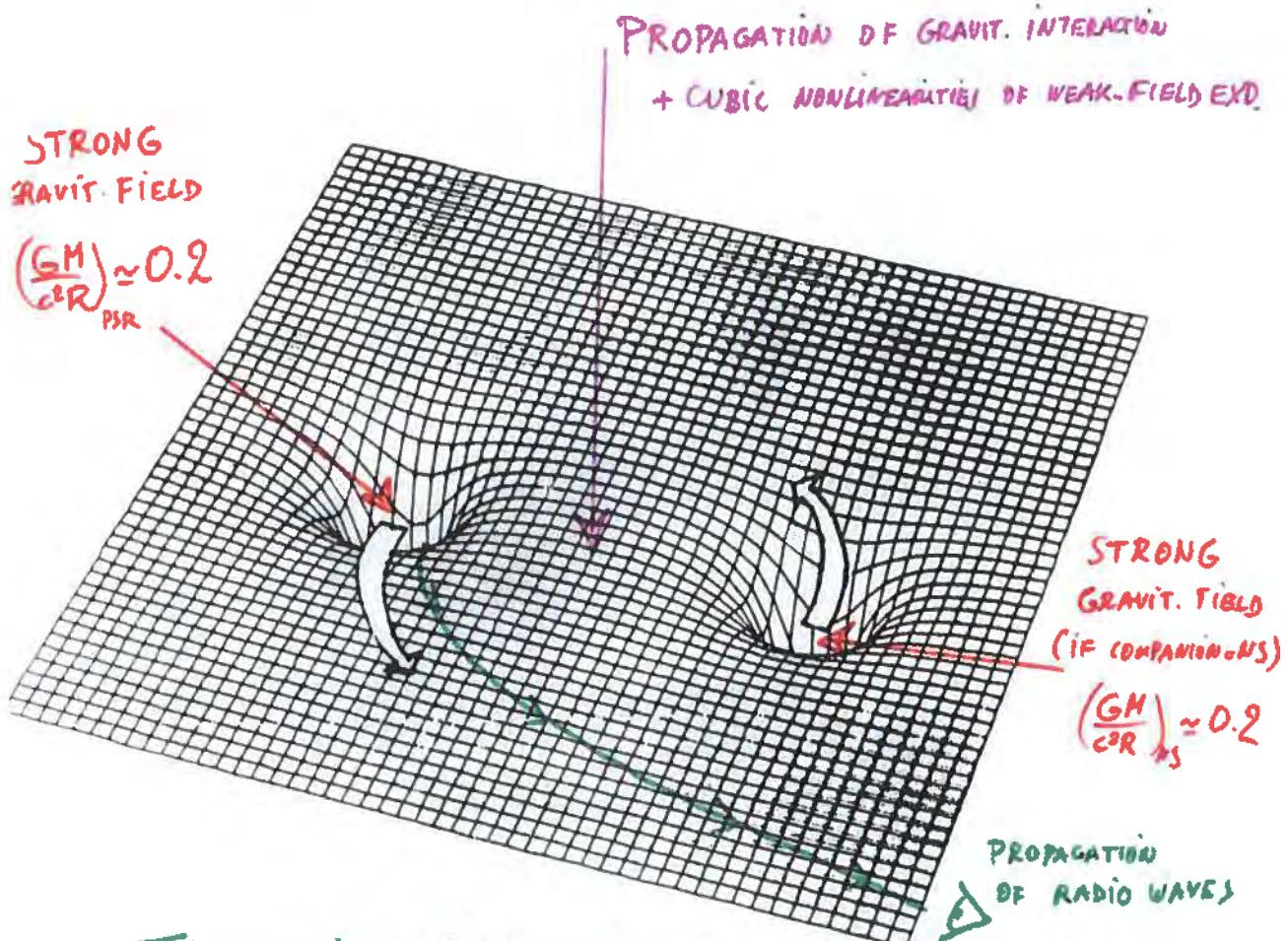
# PULSARS BINAIRES

Thibault DAMOUR  
(IHES)



## BINARY PULSARS: FIRST POSSIBILITY OF PROBING THE FULL STRUCTURE OF RELATIVISTIC GRAVITY

- RADIATIVE EFFECTS [FIELD PROPAGATION]
- HIGHLY NON-LINEAR EFFECTS [STRONG FIELDS]

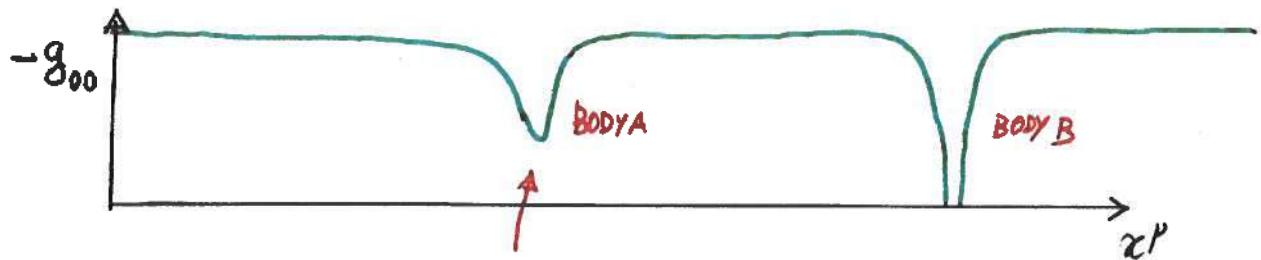


### THEORETICAL ASPECTS OF BINARY PULSARS:

- ① MOTION OF TWO STRONGLY SELF-GRAVITATING BODIES  
( T.D. DERUELLE '81 , T.D. '82, '83 )
- ② RELATIVISTIC TIMING OF A BINARY PULSAR  
( BLANDFORD-TUROFSKY '76 , T.D. & DERUELLE '85, '86 )
- ③ USE OF BINARY PULSARS AS PROBES OF RELATIVISTIC GRAVITY  
( EARDLEY '75 , WILL-EARDLEY '77 , T.D. '88 , T.D. & TAYLOR '92 )

# MOTION OF STRONGLY SELF-GRAVITATING BODIES

OLNO 4



$$-g_{00} = 1 - \frac{2Gm_A}{R}$$

FOR NEUTRON STAR,  $m_A \approx 1.4 M_\odot$   
 $Gm_A \approx 2 \text{ km}$

$$\frac{2Gm_A}{R_A} = \frac{4 \text{ km}}{10 \text{ km}} = 0.4$$

$$-g_{00}(r_A) = 1 - 0.4$$

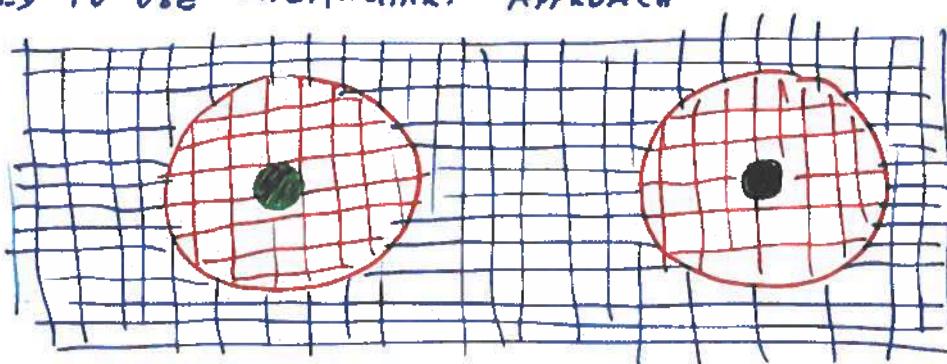
FOR BLACK HOLE:

$$\frac{2Gm_B}{R_B} = 1$$

- CANNOT (A PRIORI) USE THE TRADITIONAL ONE-CHART APPROACH  
BECAUSE COUPLING BETWEEN INTERNAL & EXTERNAL EFFECTS  
IS ILL-TREATED AND MIGHT LEAD TO FICTITIOUS EFFECTS

$$\propto \left( \frac{Gm_A}{c^2 R_A} \right)^n \frac{Gm_B}{|x_A - x_B|} \sim (0.4)^n \frac{Gm_B}{|x_A - x_B|} : \text{NUMERICALLY LARGE}$$

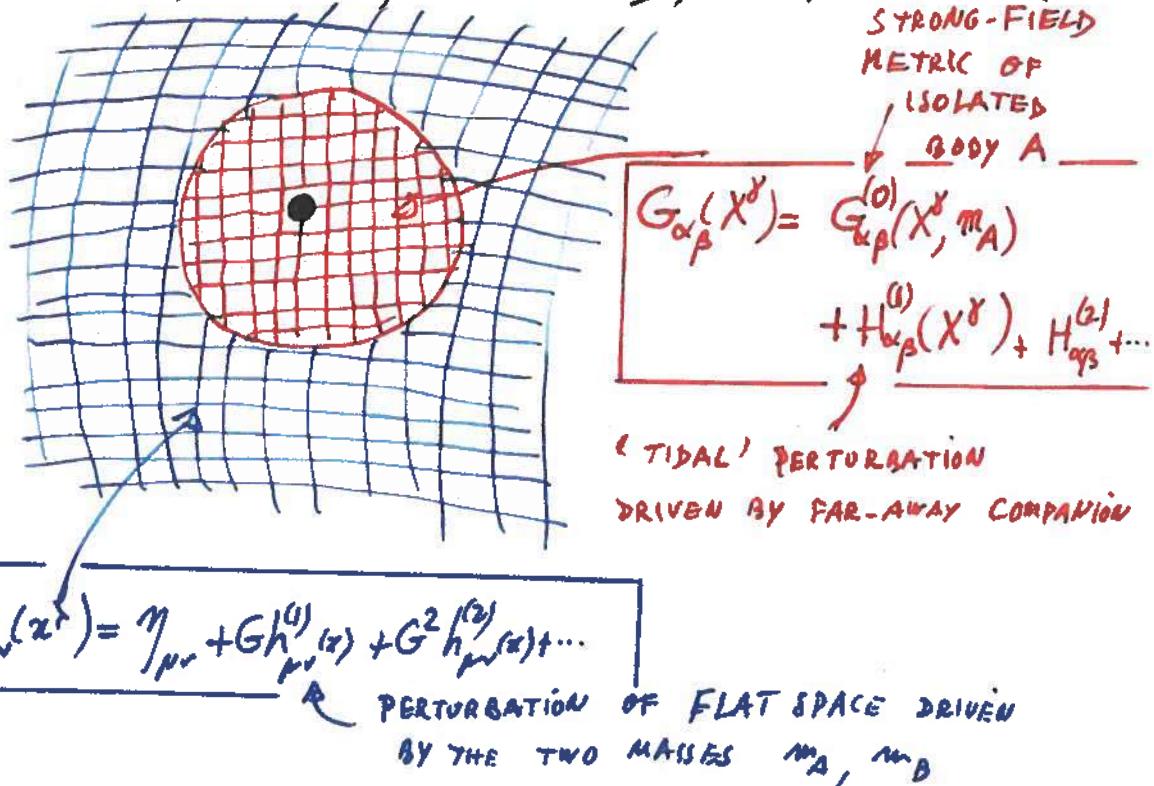
- NEED TO USE MULTI-CHART APPROACH



# MULTI-CHART AND MATCHING

OL 5

Einstein, Infeld, Hoffmann '38, Manasse '63, Demianski, Grischchuk '74,  
D'Eath '75, Kates '80, Damour '83, Thorne, Hartle '85



THE TWO EXPANSIONS MUST MATCH IN SOME INTERMEDIATE

$$\text{DOMAIN : } \frac{Gm_A}{c^2} \ll R_A \ll R \ll d = |x_A - x_B|$$

3 NON-LINEAR TRANSFORMATION BETWEEN THE TWO COORDINATE SYSTEMS  
 $x^\mu = (ct, x^i) \leftrightarrow X^\alpha = (c\tau, X^a)$

$$x^\mu = z^\mu(\tau) + e_a^\mu(\tau) X^a + \frac{1}{2} f_{ab}^\mu(\tau) X^a X^b + \dots$$

IMAGE OF 'CENTER'  $X^a = 0$   
 IN EXTERNAL CHART      ↗ LINEAR DEFORMATION      ↗ NON-LINEAR DEFORMATIONS  
 $e_a^0 \sim v_A^a/c$   
 $e_a^i \sim \delta_a^i + \frac{v_A^a}{c} + \frac{Gm_0}{c^2}$

→ DEFINES 'WORLDLINE OF A'

# SIMPLEST CASE: NON-SPINNING BODIES

06

## • EFFACEMENT OF INTERNAL STRUCTURE (Damour 183)

$$\delta G_{\text{eff}}(x^r) \stackrel{\text{STRUCTURE-DEPENDENT}}{=} H_{\nu_B}^{(\text{STRUCT.-DEP})}(x) \sim \frac{G^6}{c^{12}} k \frac{m_A^5 m_B}{R^3 d^3}$$

"Love number"

tidal field  
of companion

BY MATCHING  $\Rightarrow$  EFFECT IN EXTERNAL METRIC

$$\delta g_{\mu\nu}(z) \stackrel{\text{STRUCT.-DEP}}{\sim} \frac{G^6}{c^{12}} k \frac{m_A^5}{|z-z_1|^3} \frac{m_B}{|z-z_2|^3}$$

5PN EFFECT, i.e.  $\left(\frac{v}{c}\right)^{10}$  SMALLER THAN NEWTON

## • USEFUL TECHNICAL TOOL :

REPRESENT COMPACT BODIES BY DELTA-FUNCTION SOURCES

+ USE ANALYTIC CONTINUATION TO DEAL WITH SELF-GRAVITY EFFECTS

EITHER RIESZ-KERNELS OR DIMENSIONAL-CONTINUATION

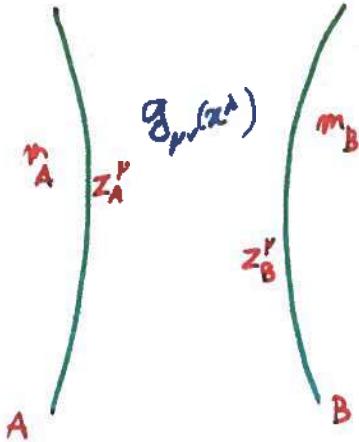
↑ SIMPLER

$$S = \int \frac{d}{c} x^r \sqrt{g} \frac{c^4}{16\pi G} R(g) - \sum_a m_a c \int \sqrt{-g_{\mu\nu}(z_a^\lambda)} dz_a^\mu dz_a^\nu$$

WHERE  
 $d = 3 + \epsilon$   
 $\epsilon \in \mathbb{C}$

POINT-PARTICLE ACTION  
 $g_{\mu\nu}(x^\lambda = z_a^\lambda)$  A PRIORI SINGULAR,  
 BUT  $d \in \mathbb{C} \Rightarrow$  WELL-DEFINED

# RELATIVISTIC GRAVITATIONAL INTERACTION OF TWO POINT <sup>OLMO 7</sup> MASSES



E.G. HARMONIC COORDINATES  $g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$  (BACK TO ONE CHART)

EXPLICIT FORM OF EINSTEIN'S Eqs

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu,\lambda}$$

$$-g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + g^{\alpha\beta}g^{\delta\sigma}(g_{\mu\alpha,\delta}g_{\nu\beta,\delta} - g_{\mu\alpha,\gamma}g_{\nu\delta,\beta} + g_{\mu\delta,\gamma}g_{\beta\delta,\nu} + g_{\nu\alpha,\gamma}g_{\beta\delta,\nu} - \frac{1}{2}g_{\alpha\delta,\nu}g_{\beta\delta,\nu})$$

$$= \frac{16\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} - \frac{1}{d-1}g_{\mu\nu}T^\lambda_\lambda)$$

$$T_{\mu\nu}(z) = \sum_a m_a c^2 \int ds_a \frac{g_{\mu\alpha}(z_a)g_{\nu\beta}(z_a)}{\sqrt{g(z_a)}} \frac{dz_a^\alpha}{ds_a} \frac{dz_a^\beta}{ds_a} \delta^{(d+1)}(z^\lambda - z_a^\lambda(s_a))$$

$\int ds_a = \sqrt{-g_{\mu\nu}(z_a^\lambda) dz_a^\mu dz_a^\nu}$

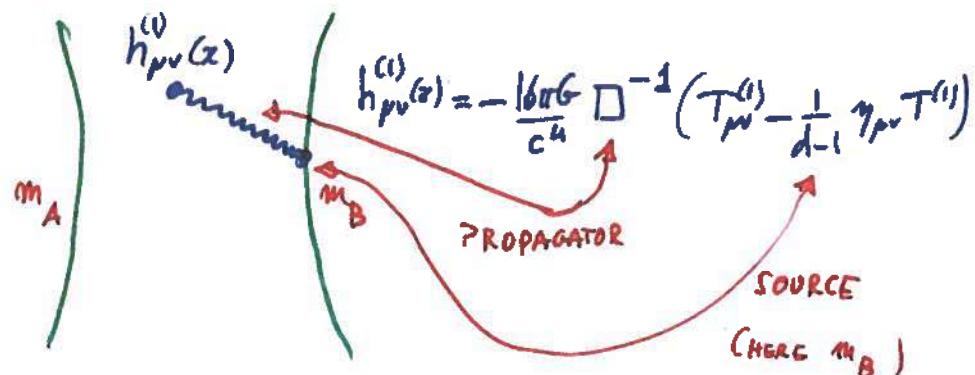
OL8

SOLVE EINSTEIN'S EQS BY SUCCESSIVE APPROXIMATION

$$g_{\mu\nu}(x^\lambda) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(1)}(x^\lambda) + h_{\mu\nu}^{(2)}(x^\lambda) + \dots$$

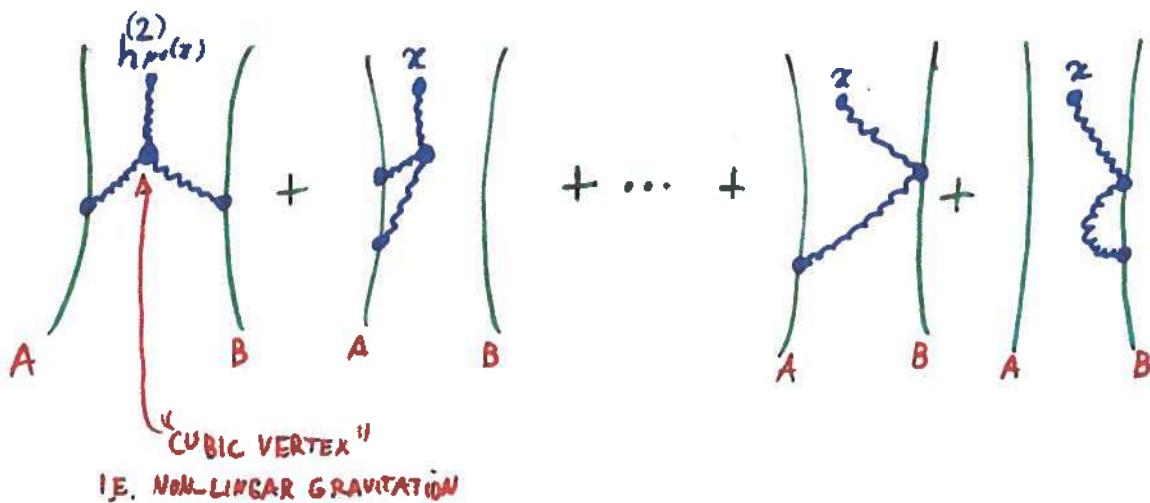
$$\square h_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{d-1} \eta_{\mu\nu} T^{(1)} \right)$$

$$T_{\mu\nu}^{(1)} = \sum_a m_a c \int d\sigma_a \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} \frac{dz_a^\alpha dz_a^\beta}{ds_a} \delta^{(d+1)}(x - z_a)$$



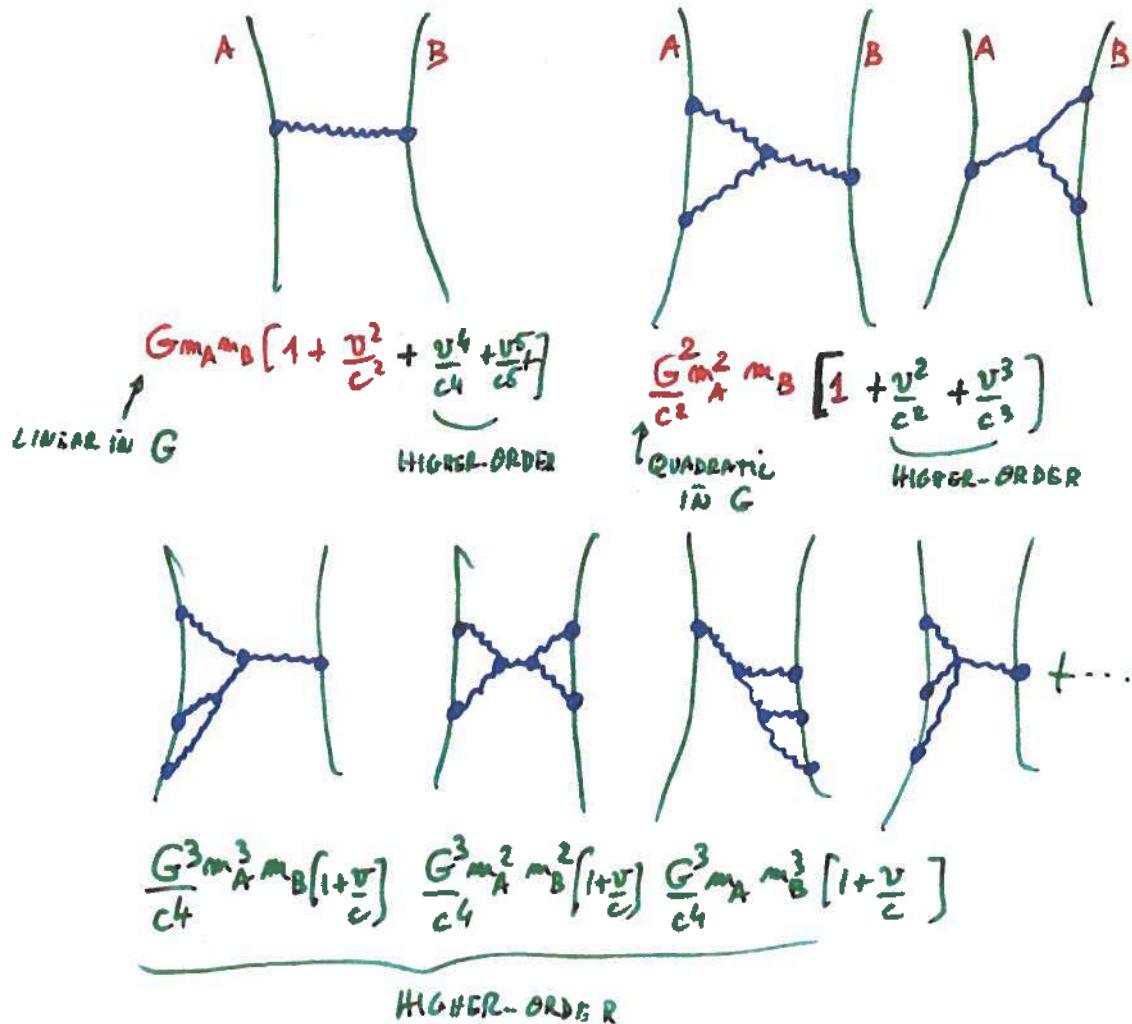
AT NEXT APPROXIMATION

$$\square h^{(2)} \sim h^{(1)} \partial^2 h^{(1)} + \partial h^{(1)} \partial h^{(1)} + h^{(1)} T^{(1)}$$

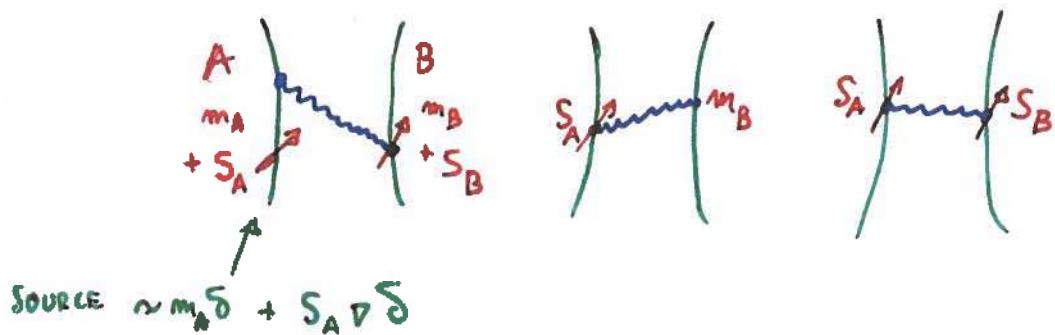


OL 15

## HIGHER-ORDER RELATIVISTIC DYNAMICAL EFFECTS



## + SPIN-DEPENDENT EFFECTS



# $(V/c)^5$ EQUATIONS OF MOTION IN GENERAL RELATIVITY

G6  
OL16

The problem of motion in Newtonian and Einsteinian gravity 183

accelerations. Then each body must satisfy the following equation of motion (Damour and Deruelle, 1981a; Damour, 1982):

$$a^i = A_0^i(\bar{z} - \bar{z}') + c^{-2} A_2^i(\bar{z} - \bar{z}', \bar{v}, \bar{v}') + c^{-4} A_4^i(\bar{z} - \bar{z}', \bar{v}, \bar{v}', \bar{S}, \bar{S}') + c^{-5} A_5^i(\bar{z} - \bar{z}', \bar{v} - \bar{v}') + O(c^{-6}), \quad (154)$$

with

$$A_0^i = -Gm'R^{-2}N^i, \quad (155)$$

$$A_2^i = Gm'R^{-2}\{N^i[-v^2 - 2v'^2 + 4(vv') + \frac{3}{2}(Nv')^2 + 5(Gm/R) + 4(Gm'/R)] + (v^i - v'^i)[4(Nv) - 3(Nv')]\}, \quad (156)$$

$$A_4^i = B_4^i + C_4^i + D_4^i, \quad (157)$$

$$\begin{aligned} B_4^i &= Gm'R^{-2}\{N^i[-2v'^4 + 4v'^2(vv') - 2(vv')^2 + \frac{3}{2}v^2(Nv')^2 + \frac{9}{2}v'^2(Nv')^2 \\ &\quad - 6(vv')(Nv')^2 - \frac{15}{8}(Nv')^4 + (Gm/R)(-\frac{15}{4}v^2 + \frac{3}{2}v'^2 - \frac{5}{2}(vv') + \frac{39}{2}(Nv)^2 \\ &\quad - 39(Nv)(Nv') + \frac{17}{2}(Nv')^2) + (Gm'/R)(4v'^2 - 8(vv') + 2(Nv)^2 \\ &\quad - 4(Nv)(Nv') - 6(Nv')^2)] \\ &\quad + (v^i - v'^i)[v^2(Nv') + 4v'^2(Nv) - 5v'^2(Nv') - 4(vv')(Nv) \\ &\quad + 4(vv')(Nv') - 6(Nv)(Nv')^2 + \frac{9}{2}(Nv')^3 \\ &\quad + (Gm/R)(-\frac{5}{4}(Nv) + \frac{25}{4}(Nv')) + (Gm'/R)(-2(Nv) - 2(Nv'))]\}. \quad (158) \end{aligned}$$

$$C_4^i = G^3 m' R^{-4} N^i \left[ -\frac{11}{4} m^2 - 9m'^2 - \frac{62}{2} mm' \right], \quad (159)$$

$$D_4^i = \left( \frac{S^{ik}}{m} + 2 \frac{S'^{ik}}{m'} \right) (v^j - v'^j) \left( \frac{Gm'}{R} \right)_{,kl} + \left( 2 \frac{S^{ki}}{m} + 2 \frac{S'^{ki}}{m'} \right) (v^l - v'^l) \left( \frac{Gm'}{R} \right)_{,lk}, \quad (160)$$

and

$$\begin{aligned} A_5^i &= \frac{4}{3} G^2 m m' R^{-3} \{ V^i [-V^2 + 2(Gm/R) - 8(Gm'/R)] \\ &\quad + N^i (NV) [3V^2 - 6(Gm/R) + \frac{22}{3}(Gm'/R)] \}. \quad (161) \end{aligned}$$

The two parameters  $m$  and  $m'$  appearing in eqs. (154)–(161) are the 'Schwarzschild masses' of the condensed bodies. They are two constants which appear in the external gravitational field, in which are hidden many internal structure effects (see the discussion of the 'effacement of internal structure' in Section 6.14). On the other hand, the spin tensors undergo a slow evolution (on the post-Newtonian time scale, i.e.  $\beta_e^{-2}$  times the orbital period) which is also obtained in the Einstein–Infeld–Hoffmann–Kerr-type approach (Damour, 1982, and references therein). Introducing, à la Schiff, a suitable spin-vector,  $\bar{S}$ , associated with  $S_{\mu\nu}$ , the law of evolution ('spin precession') reads for the first body (see also references in Section 6.13.2)

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = \left[ \frac{Gm'}{c^2 R^2} \bar{N} \times \left( \frac{3}{2} \bar{v} - 2\bar{v}' \right) \right] \times \bar{S} + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \quad (162)$$

"DRESSED  
MASSES"  
IN CORPORATING  
STRONG-SELF-FIELD  
EFFECTS

GRAVITATIONAL  
RADIATION  
DAMPING

DIRECT  
EFFECT OF  
PROPAGATION  
OF GRAVITY  
AT SPEED C

# DYNAMICS OF $N$ COMPACT BODIES

OL11

LAGRANGIAN

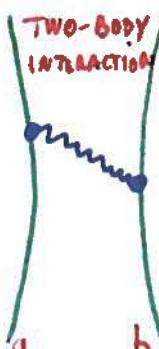
$$S[\vec{z}_a] = \int dt L[\vec{z}_a]$$

(in  $d=3$  dimensions)

Lorentz, Drost 1917  
Einstein, Infeld, Hoffmann 1938  
Fock 1939, Landau, Lifshitz  
+ ...

$$L[\vec{z}_a] = \underset{\uparrow}{L^{(0)}} + L^{(2\text{-body})} + L^{(3\text{-body})} + \dots$$

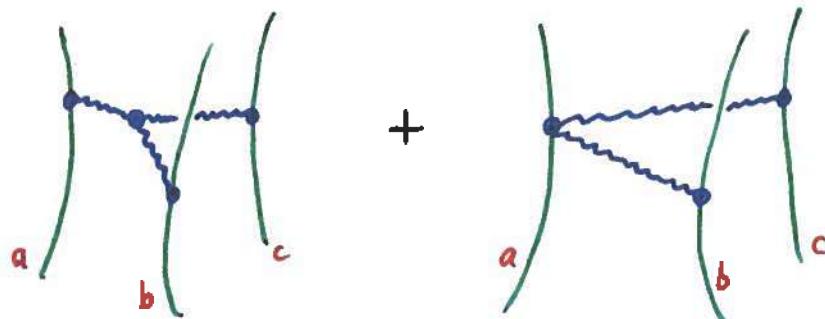
$$\text{FREE MOTION: } L^{(0)} = -m_a c^2 \sqrt{1 - \vec{v}_a^2/c^2}$$



$$L^{(2\text{-body})} = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{G m_a m_b}{r_{ab}} \left[ 1 + \frac{3}{2c^2} (\vec{v}_a^2 + \vec{v}_b^2) - \frac{7}{2c^2} (\vec{n}_{ab} \cdot \vec{v}_a)(\vec{n}_{ab} \cdot \vec{v}_b) + O(\frac{1}{c^4}) \right]$$

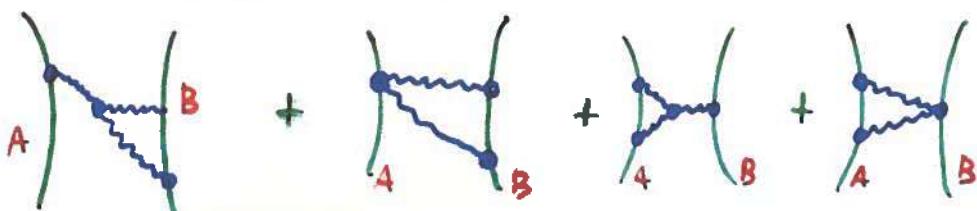
$$r_{ab} = |\vec{z}_a - \vec{z}_b| ; \quad \vec{n}_{ab} = (\vec{z}_a - \vec{z}_b)/r_{ab}$$

THREE-BODY  
INTERACTIONS



$$L^{(3\text{-body})} = -\frac{1}{2} \sum_{b \neq a \neq c} \frac{G^2 m_a m_b m_c}{r_{ab} r_{ac} c^2}$$

$\downarrow$  INCLUDES THE '2-BODY' CASE  $b=c$



## PHYSICAL EFFECTS LINKED TO HIGHER-ORDER TERMS

EQ. OF MOTION  $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \sim \frac{GMm}{R^2} \left[ 1 + \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^4}{c^4} + \frac{v^5}{c^5} + \text{SPIN-ORBIT TERMS} \right]$

1PK

↑  
QUANTITATIVE MODIFICATIONS OF 1PK BUT NO NEW QUANTITATIVE EFFECT (BECAUSE STILL CONSERVATIVE)

↑  
ACCELERATION OF ORBITAL MOTION + SECULAR VARIATION OF MANY QUANTITIES

↑  
WOBBLING OF ORBITAL PLANE + SPIN PRECESSION

**MODIFICATION OF PERIASTRON ADVANCE**

$x_1 = \frac{m_A}{M} = 1 - e_i^2$

$k = \frac{3(GMn)^{2/3}}{c^2(1-e_i^2)} \left[ 1 + \frac{(GMm)^{2/3}}{c^2(1-e_i^2)} \left( \frac{39}{4}x_1^2 + \frac{27}{4}z_2^2 + 15x_1z_2 \right) - \frac{(GMn)^{2/3}}{c^2} \left( \frac{13}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}z_2^2 + \frac{13}{3}x_1z_2 \right) \right]$

FROM  $v^4/c^4$  TERMS

FROM SPIN-ORBIT TERMS

EFFECTS OF  $v^5/c^5$  TERMS :

ORBITAL PHASE  $n(t-t_0) = 2\pi \frac{t-t_0}{P_b} \rightarrow 2\pi \left[ \frac{t-t_0}{P_b} - \frac{1}{2} \dot{P}_b \left( \frac{t-t_0}{P_b} \right)^2 \right]$

$$\dot{P}_b = - \frac{192\pi v}{5c^5} (GMn)^{5/3} \frac{1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4}{(1-e^2)^{7/2}}$$

# TIMING OF BINARY PULSARS IN GENERAL RELATIVITY

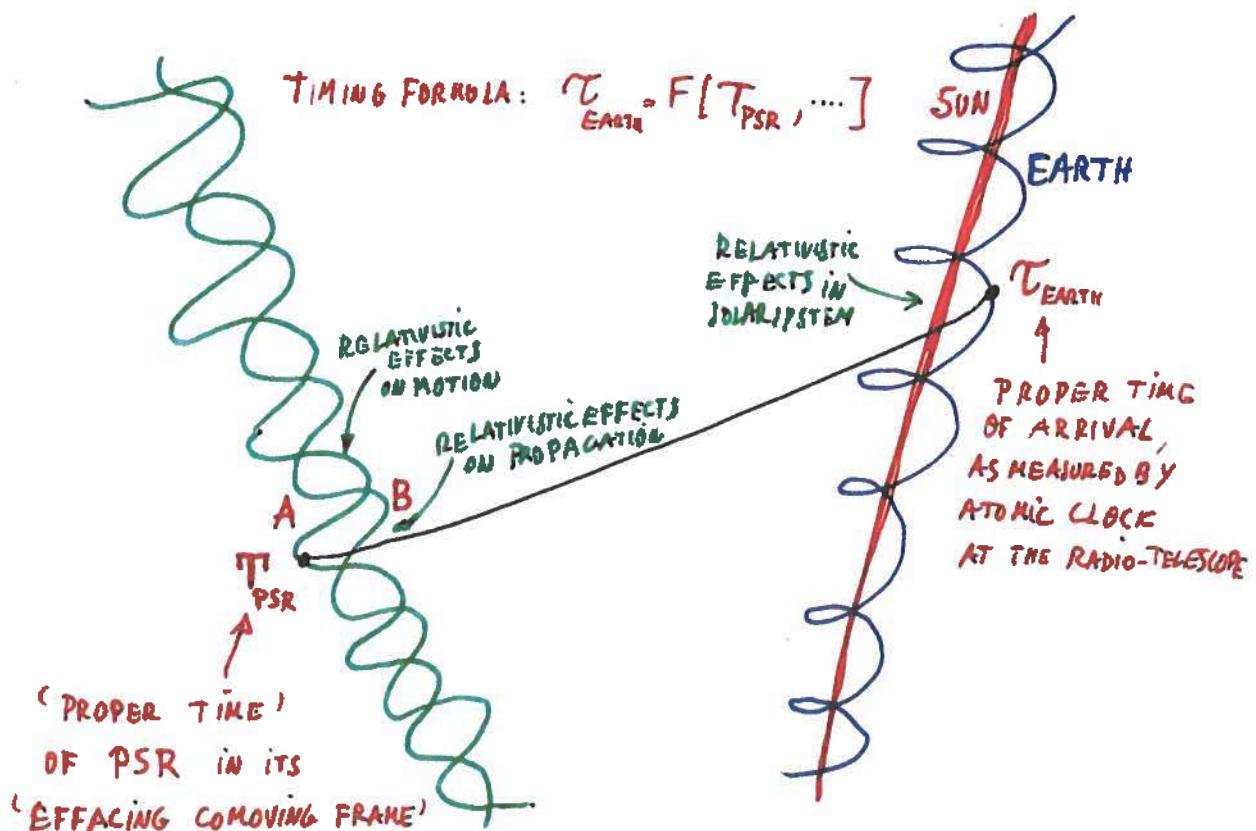
## INTERPRETATION OF GENERAL RELATIVITY

Einstein had been confused for several years by "general covariance", meaning of coordinates, ...

G.R. DEFINES ITS OWN INTERPRETATION

TIMING OF BINARY PULSARS IS A PRIME EXAMPLE

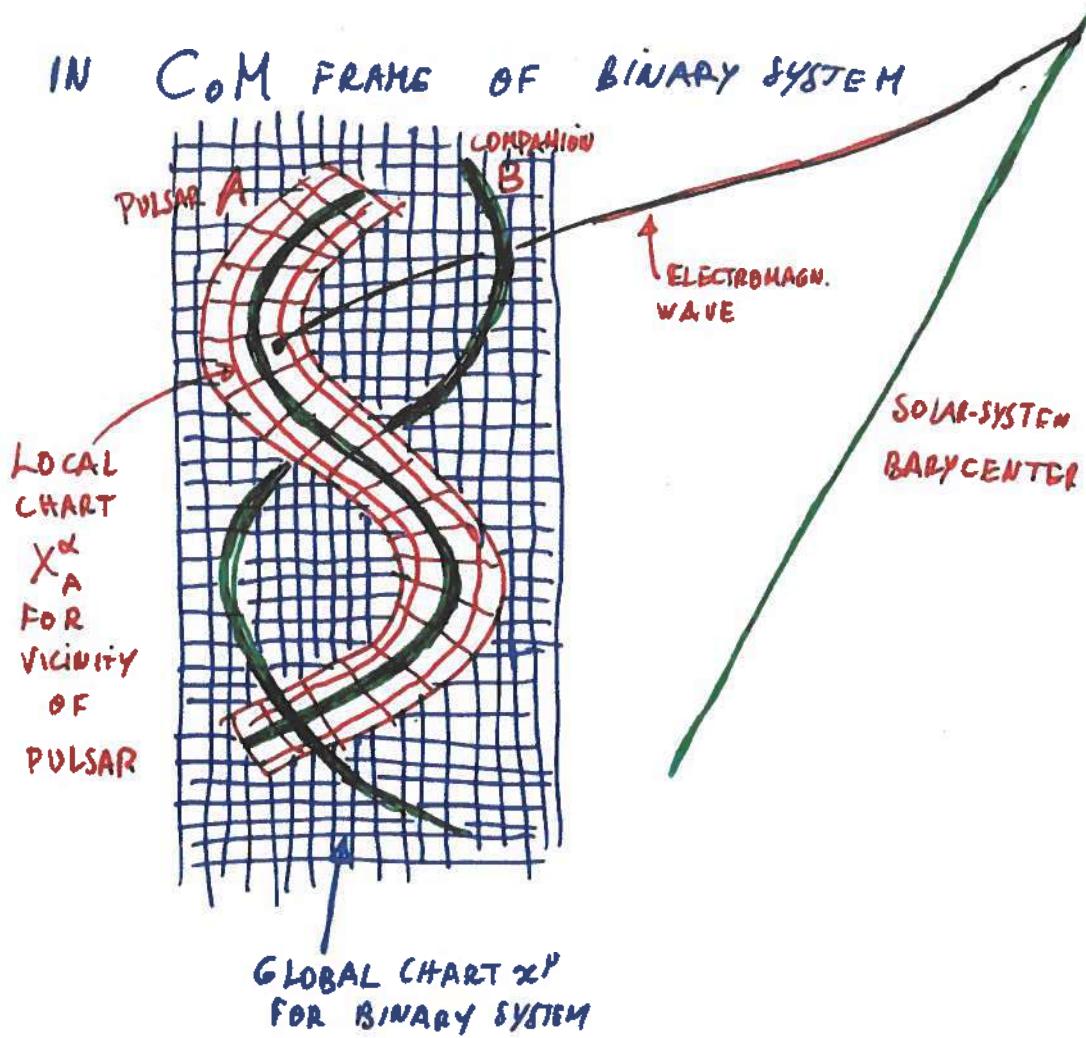
'PB OF MOTION' MARRED BY 'COORDINATE AMBIGUITIES' FOR MANY YEARS BUT:



## 2.3

# TIMING EFFECTS LINKED TO RELATIVISTIC BINARY MOTION

IN CoM FRAME OF BINARY SYSTEM



- NEED TO MATCH PROPAGATION INITIALLY IN LOCAL  $X_A^a$  CHART  
AND LATER IN GLOBAL  $x^\mu$  CHART

USING

$$x^\mu = x^\nu(\tau) + e_a^\mu(\tau) X^a + \frac{1}{2} f_{ab}^\mu(\tau) X^a X^b + \dots$$

(PROPER TIME)  
OF PULSAR FRAME

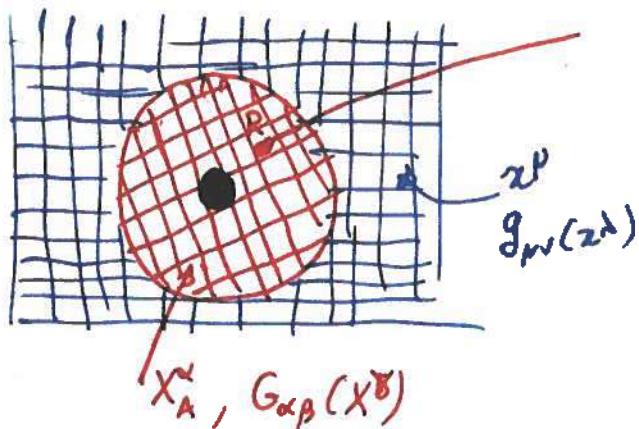
$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{c^2 R}) c^2 d\tau^2 + (1 + \frac{2GM}{c^2 R}) \delta_{ij} dx^i dx^j + \dots$$

$$e_a^0 \sim v_A^a / c$$

$$e_a^i \sim \delta_a^i + \frac{v_A^i}{c^2} + \frac{GM_B}{c^2 d}$$

2.4

- IN COMBINING THE TWO PARTS OF THE PROPAOTION



ONE CHECKS THAT THERE ARE NO DELICATE COUPLING BETWEEN INTERNAL (STRONG-FIELD) AND EXTERNAL (WEAK-FIELD/EFFECTS)  
ALL STRONG-FIELD EFFECTS ENTER AS UNIMPORTANT ADDITIVE CONSTANTS  
THE ONLY OBSERVATIONALLY SIGNIFICANT EFFECTS (AT LEADING ORDER) ARE:

- The components  $e_a^0 = \frac{v_a}{c} \left[ 1 + \frac{1}{2} \vec{v}^2 + 3 \frac{G m_B}{d} + \dots \right]$  in  $\overset{\text{P}}{e}_a^P X^a$   
LINEAR PART
- The link  $-c^2 dT^2 = \overset{\text{REGULARIZED}}{\tilde{g}_{\mu\nu}(z_A^A)} dz_A^\mu dz_A^\nu$  between the pulsar 'asymptotic proper time' and  $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^A + h_{\mu\nu}^B + \dots$
- $e_a^0 \rightarrow \text{'ABERRATION EFFECT': } \left[ \delta_i^a + \theta(v^2) \right] n^i \approx N^a(T) + \frac{v^a}{c} - N^a \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c}$   
DIRECTION in GLOBAL CHART      DIRECTION in LOCAL
- $T = \frac{1}{c} \int \sqrt{-\tilde{g}_{\mu\nu}(z_A^A) dz^\mu dz^\nu} \approx \int dt \sqrt{1 - 2 \frac{G m_B}{c^2 r_{AB}} - \frac{\vec{v}_A^2}{c^2}} \approx dt \left( 1 - \frac{G m_B}{c^2 r_{AB}} - \frac{\vec{v}_A^2}{2 c^2} \right)$   
i.e. 'COMBINED TIME-DILATION AND GRAVIT. REDSHIFT FROM B'

# TIMING FORMULA

WITH DEFINITION  $T = T_e - \Delta_A$

$$\boxed{T_N \text{ DEFINED BY: } N = N_0 + vT + \frac{1}{2} \ddot{v} T^2 + \frac{1}{6} \dddot{v} T^3}$$

(PROPER TIME OF EMISSION OF  $N^{TH}$  PULSE) CORRECTED FOR ABERRATION

THEN

$$D \cdot \tau_a = T + \Delta_R(T) + \Delta_E(T) + \Delta_S(T) + \Delta_A(T)$$

↓              ↓              ↓              ↓              ↓              ↓  
 DOPPLER      PROPER TIME      ROEHER      EINSTEIN      SHAPIRO      ABERRATION  
 FACTOR      OF ARRIVAL      TIME DELAY      TIME DELAY      TIME DELAY      TIME DELAY  
 AT SOLAR BODY/CENTRE  
 (CORRECTED FOR:  
 DISPERSION, POSITION OF  $\oplus$ ,  
 EINSTEIN + SHAPIRO SOLAR-PITCH  
 EFFECTS)

$D = \frac{1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_b/c}{\sqrt{1 - \vec{v}_b^2/c^2}}$

$$\Delta_R = -\frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{z}_A \quad \leftarrow \text{TIME OF FLIGHT ACROSS PSR ORBIT}$$

IF  $\approx 300,000 \text{ km} \rightarrow \Delta_R \sim 1 \text{ s}$

$$\Delta_E = + \frac{1}{c^2} \int dt \left( \frac{G m_B}{r_{AB}} + \frac{1}{2} \vec{v}_A^2 - \left( \frac{G m_B}{r_{AB}} + \frac{1}{2} \vec{v}_A^2 \right) \right)$$

AFTER RESCALING  $T$  BY MEAN  
GR + SR EFFECTS IN BINARY  
 $\rightarrow$  MONFIGS  $D$

$$\Delta_S = + \frac{1}{c^3} \int_{t_e}^{t_a} \frac{2 G m_B}{|\vec{r} - \vec{z}_B|} d\vec{r} \quad \leftarrow \text{ELM SIGNAL}$$

$$\Delta_A = \frac{1}{2\pi\nu} \frac{\vec{v}_A \cdot (\vec{n} \times \vec{e}_3)}{c (\vec{m} \times \vec{e}_3)^2}$$

# SOLVING THE RELATIVISTIC TWO-BODY PROBLEM<sup>OL12</sup>

## AT THE FIRST 'POST-KEPLERIAN' APPROXIMATION

(Damour, Deruelle 1985)

LAGRANGIAN  $L = \sum_a -m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_a^2}{c^2}} + L^{2\text{-body}} + L^{3\text{-body}}$

TAKES  $a > A$  or  $B$  EXPAND IN POWERS OF  $\frac{\vec{v}_a}{c}$

$$L = L_{\text{Kepler}} + \frac{1}{c^2} L_{\text{Post. Kepler}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

$$L_K = \frac{1}{2} m_A \vec{v}_A^2 + \frac{1}{2} m_B \vec{v}_B^2 + \frac{G m_A m_B}{r_{AB}}$$

$$L_{PK} = \frac{1}{8} m_A \vec{v}_A^4 + \frac{1}{8} m_B \vec{v}_B^4 + \frac{G m_A m_B}{2 r_{AB}} \left[ 3 \vec{v}_A^2 + 3 \vec{v}_B^2 - 7 \vec{v}_A \cdot \vec{v}_B - (\vec{m}_{AB} \vec{v}_A) \cdot (\vec{m}_{AB} \vec{v}_B) - G \frac{m_A m_B}{r_{AB}} \right]$$

- USE CONSERVATION LAWS (LINKED TO Poincaré INVARIANCE OF DYNAMICS)

- CENTER-OF-MASS INTEGRAL  $\vec{K} = \vec{G} - t \vec{P}$
- TOTAL LINEAR MOMENTUM  $\vec{P}$
- TOTAL ENERGY  $E$
- TOTAL ANGULAR MOMENTUM  $\vec{J}$

- USE  $\vec{P}, \vec{K}$  TO GO TO CENTER-OF-MASS FRAME:  $\vec{P} = \vec{0} = \vec{K}$

- IN C.O.M. FRAME USE  $E, \vec{J}$  TO REDUCE DYNAMICS TO RADIAL + ANGULAR MOTION:
 
$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = A + \frac{2B}{R} + \frac{C}{R^2} + \frac{D}{R^3}$$

USEFUL TRICK:  
USE SHIFTS  $R = R' + \text{cst}$   
TO ELIMINATE  $D/R^3$  TERM

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{H}{R^2} + \frac{I}{R^3}$$

# EXPLICIT SOLUTION OF (1PK) TWO-BODY PROBLEM OL13

(Dumour Deruelle 85)

## QUASI-KEPLERIAN FORM :

Kepler equation for  
'eccentric anomaly'

$$n(t - t_0) = u - e_t \sin u$$

ORBITAL FREQUENCY  $n \equiv \frac{2\pi}{P_b}$   
(PERIASTROK TO PERIASTRON)

TIME AT INFINITY  
IN COH FRAME

"t - eccentricity"

Angular motion

$$\theta - \theta_0 = (1+k) 2 \arctan \left[ \left( \frac{1+e_\theta}{1-e_\theta} \right)^{\frac{1}{2}} \tan \frac{u}{2} \right]$$

↑ "θ - eccentricity"  
fractional periastron advance per orbit

$$k = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{\langle \omega \rangle}{n} = \frac{\langle \omega \rangle P_b}{2\pi}$$

Radial motions

$$R \equiv r_{AB} = a_R (1 - e_R \cos u)$$

$$r_A \equiv |\vec{z}_A - \vec{z}_{COH}| = a_r (1 - e_r \cos u)$$

$$r_B \equiv |\vec{z}_B - \vec{z}_{COH}| = a_{r'} (1 - e_{r'} \cos u)$$

WITH DIFFERENT  
'SEMI-MAJOR AXES'  
 $a_R, a_r, a_{r'}$   
AND  
'RADIAL ECCENTRICITIES'  
 $e_R, e_r, e_{r'}$

$\exists$  EXPLICIT FORMULAS RELATING  $n, e_t, k, e_\theta, a_R, e_R, a_r, e_r, a_{r'}, e_{r'}$   
TO  $E$  AND  $J$  AND THE MASSES, E.G.

$$n = \frac{(-2E)^{3/2}}{GM} \left[ 1 - \frac{1}{4} (v-15) \frac{E}{c^2} \right]$$

↑  
ORBITAL FREQUENCY  
 $M \equiv m_A + m_B$

$v \equiv m_A m_B / (m_A + m_B)^2$

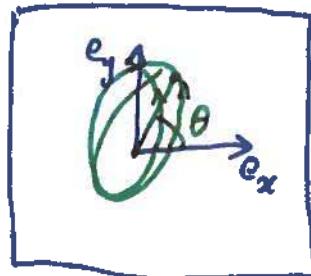
2.12

## ROEMER TIME DELAY

$$\vec{n} = -\sin i \hat{e}_y - \cos i \hat{e}_z$$

$$\Delta_R = -\frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{z}_A = +\frac{1}{c} \sin i \hat{e}_y \cdot \vec{z}_A = +\frac{1}{c} \sin i r_A \sin \theta$$

$$\vec{z}_A - \vec{z}_A - \vec{z}_{\text{orb}} = r_A \cos \theta \hat{e}_x + r_A \sin \theta \hat{e}_y$$



AS  $\Delta_R \sim \frac{a}{c} \sim \frac{v}{c} \frac{P_b}{2\pi}$  IS THE  
LEADING TERM IN TIMING FORMULA

$\Rightarrow$  NEED TO CAREFULLY TAKE INTO ACCOUNT  $\frac{v^2}{c^2}$  CORRECTIONS TO  
KEPLER MOTION. THEY WILL GIVE  $\Delta_R \sim \frac{a}{c} + \frac{GM}{c^3}$  COMPARABLE  
TO SHAPIRO

USE QUASI-KEPLERIAN FORM

$$n(t-t_0) = u - e_t \sin u$$

$$\theta = \omega_0 + (1+k) 2 \arctan \left[ \sqrt{\frac{1+e_\theta}{1-e_\theta}} \tan \frac{u}{2} \right]$$

$$r_A = a_r (1 - e_r \cos u)$$

$$a_r = \frac{m_B}{M} a_R$$

VANISHING  $O(\frac{v^2}{c^2})$  CORRECTION HERE!

YIELDS  $r_A \sin \theta$  IN TERMS OF ECCENTRIC ANOMALY  $u$

# FINAL DD TIMING FORMULA 2.15

(Damour, Deruelle '86)

PROPER TIME OF ARRIVAL (INFINITE-FREQUENCY) AT SOLAR-SYSTEM BARYCENTER  
OF  $N^{\text{TH}}$  PULSE,  $N = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$N = N_0 + \nu_p T + \frac{1}{2} \ddot{\nu}_p T^2 + \frac{1}{6} \dddot{\nu}_p T^3 \quad \text{DEFINES } T_N$$

$$\text{D } T_{\text{arrival barycenter}} = T + \Delta_R(T) + \Delta_E(T) + \Delta_S(T) + \Delta_A(T)$$

Roemer Einstein Shapiro Aberration

$$\Delta_R(T) = x \sin \omega [\cos u - e(1 + \delta_r)] + x \sqrt{1 - e^2(1 + \delta_r)^2} \cos \omega \sin u$$

$$\Delta_E(T) = \gamma \sin u$$

$$\Delta_S(T) = -2 r \ln \left\{ 1 - e \cos u - s [\sin \omega (\cos u - e) + \sqrt{1 - e^2} \cos \omega \sin u] \right\}$$

$$\Delta_A(T) = A \{ \sin[\omega + A_e(u)] + e \sin \omega \} + B \{ \cos[\omega + A_e(u)] + e \cos \omega \}$$

WITH

$$x = x_0 + \dot{x}(T - T_0)$$

$$e = e_0 + \dot{e}(T - T_0) \quad A_e(u) = 2 \arctan \left[ \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{u}{2} \right]$$

$$\omega = \omega_0 + k A_e(u)$$

$$u - e \sin u = 2\pi \left[ \frac{T - T_0}{P_b} - \frac{1}{2} \dot{P}_b \left( \frac{T - T_0}{P_b} \right)^2 \right]$$

2.17

## DD GR TIMING FORMULA

IN GENERAL RELATIVITY ALL POST-KEPLERIAN (PK) PARAMETERS ARE FUNCTIONS OF THE KEPLERIAN ONGS AND THE TWO MASSES  $m_A, m_B$  (+THE SPIN PARAMETERS  $\lambda, \eta$ )

E.G. IF ONE DEFINES

$$M \equiv m_A + m_B$$

$$x_A \equiv m_A/M$$

$$x_B \equiv m_B/M = 1 - x_A$$

$$x_A x_B \equiv \frac{m_A m_B}{(m_A + m_B)^2} = \nu$$

$$\beta_0(M) \equiv \left( \frac{GM}{c^3} \right)^{1/3} \sim \frac{v_{\text{orbit}}}{c}$$

$$\text{ACTUALLY ONLY } \frac{GM}{c^3} = \frac{M}{M_\odot} \frac{GM_\odot}{c^3} = \frac{M}{M_\odot} 4.925490947 \text{ ps}$$

$$k^{GR}(M) = 3 \frac{\beta_0^2(M)}{1-e^2}$$

$$\frac{m}{e} \gamma^{GR}(m_A, m_B) \equiv \delta^{GR}(m_A, m_B) = x_B (1+x_B) \beta_0^2(M)$$

$$r^{GR}(m_B) = \frac{GM_B}{c^3}$$

$$s^{GR}(m_A, m_B) = \frac{x_B n}{x_B \beta_0(M)} \quad (= \sin i)$$

$$\dot{P}_b^{GR}(m_A, m_B) = -\frac{192\pi}{5} x_A x_B \beta_0^5(M) \frac{1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4}{(1-e^2)^{7/2}}$$

$$\delta_\theta^{GR}(m_A, m_B) = \left( \frac{7}{2} x_A^2 + 6 x_A x_B + 2 x_B^2 \right) \beta_0^2(M)$$

# TESTING RELATIVISTIC GRAVITY WITH BINARY PULSAR DATA

T4

## TWO APPROACHES

- "THEORY-INDEPENDENT" OR "PHENOMENOLOGICAL"

### PARAMETRIZED POST-KEPLERIAN

- "THEORY-DEPENDENT"

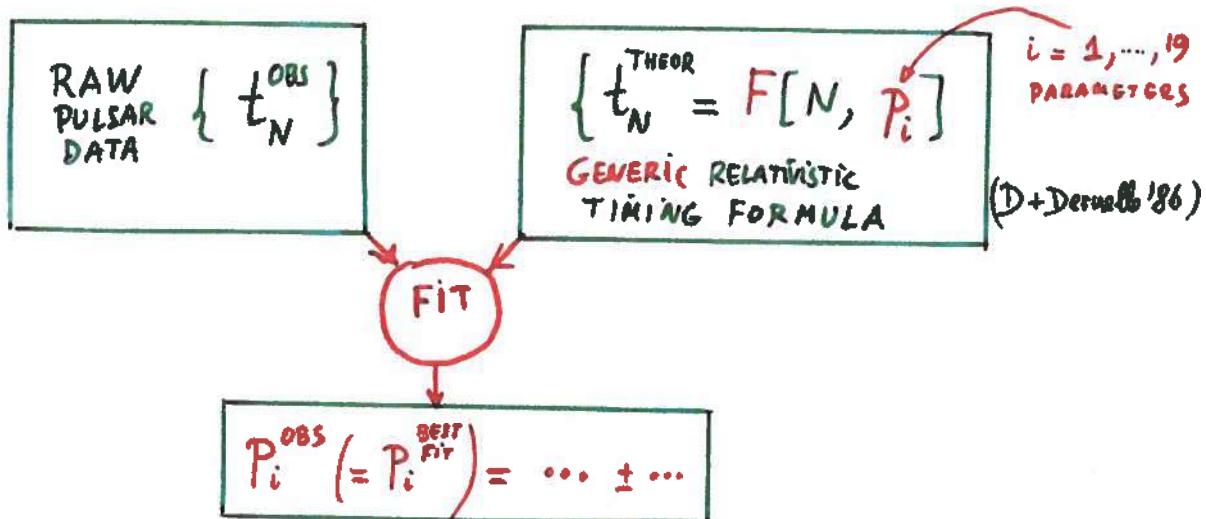
— BEYOND USUAL POST-NEWTONIAN PARAMETERS

— CLASSES OF TENSOR-SCALAR THEORIES

# USING BINARY PULSAR MEASUREMENTS TO PROBE RELATIVISTIC GRAVITY

TWO COMPLEMENTARY APPROACHES

- ① PHENOMENOLOGICAL ANALYSIS OF BINARY PULSAR DATA  
 "PARAMETRIZED POST-KEPLERIAN FORMALISM" (PPK)  
 (Blandford + Teukolsky '76, D+Deruelle '86, D '88, D+Taylor '92)

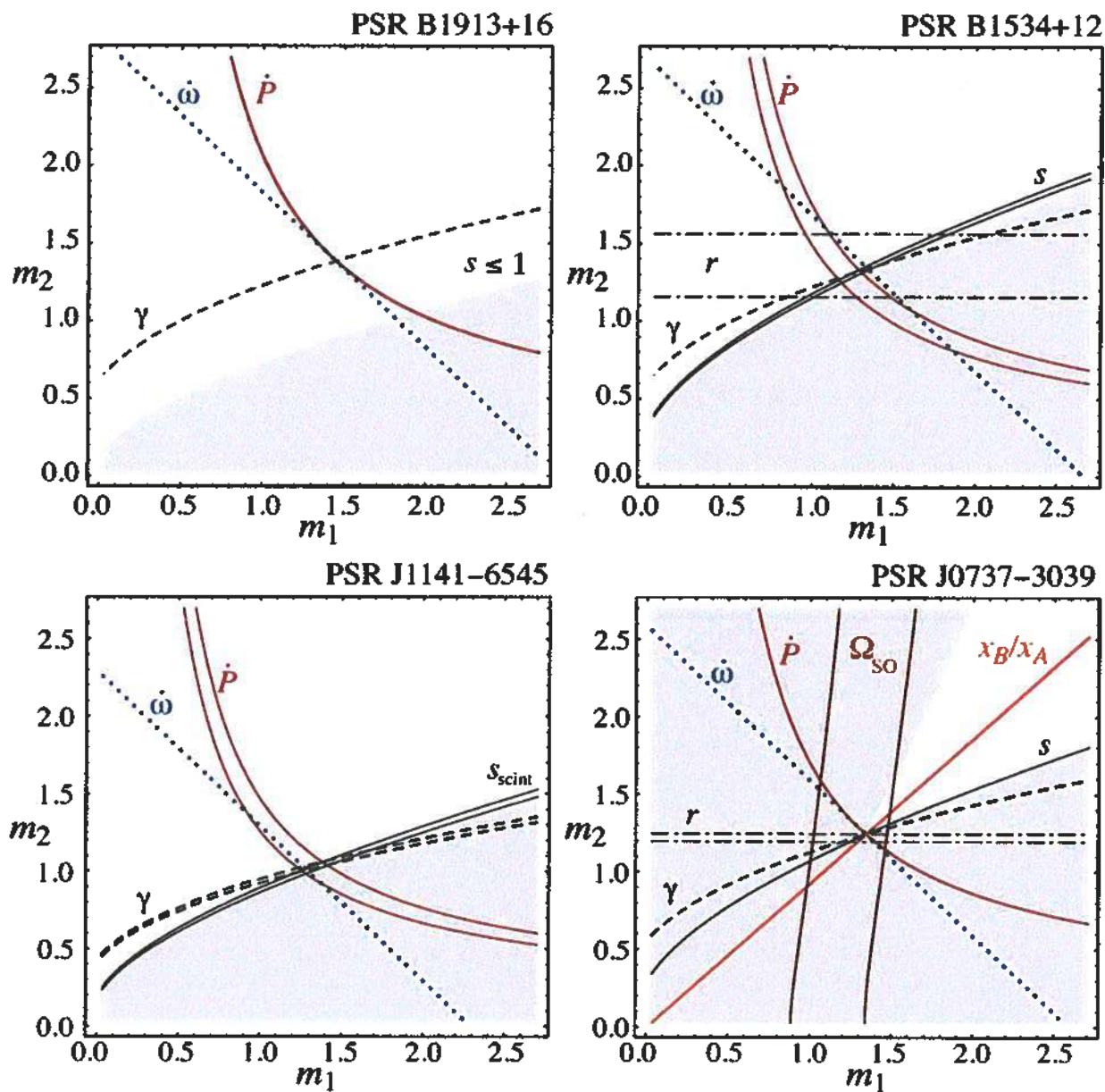


EACH RELATIVISTIC THEORY OF GRAVITY PREDICTS

$$p_i^{\text{THEOR}} = f_i^{\text{THEORY}}(m_1, m_2, (\lambda, \eta))$$

REDUNDANCY :  $19 - 2 (-2) = 15$  TESTS OF RELATIVISTIC GRAVITY  
 MOST PROBE STRONG-FIELD ASPECTS OF GRAVITY

N.B. EACH SUCH TEST IS A POTENTIAL KILLER OF G.R.

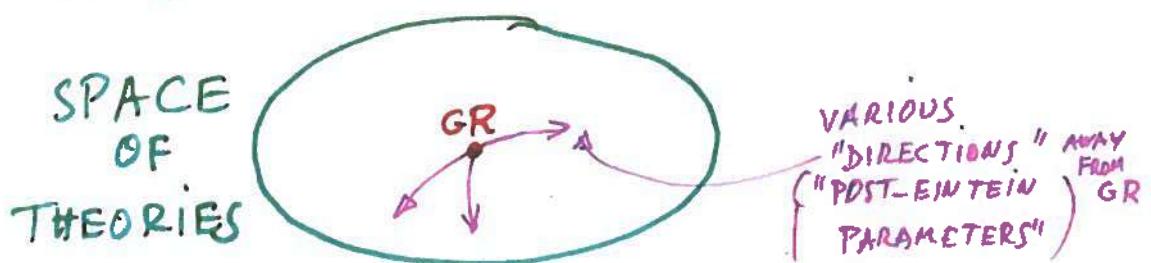


## ADVANTAGES OF PHENOMENOLOGICAL APPROACH

- CAN CONFIRM OR INVALIDATE A THEORY WITHOUT MAKING ASSUMPTIONS ABOUT OTHER THEORIES
- GR HAS NO PARAMETER  $\Rightarrow$  ANY TEST IS POTENTIALLY LETHAL

## DISADVANTAGES

- DOES NOT TELL US WHICH PART OF THE THEORY IS CONFIRMED
  - IN CASE OF FAILURE, DOES NOT TELL US WHICH PART SHOULD BE MODIFIED
- $\Rightarrow$  USEFUL TO COMPLEMENT THE PHENOMENOLOGICAL APPROACH BY A THEORY-DEPENDENT ANALYSIS :

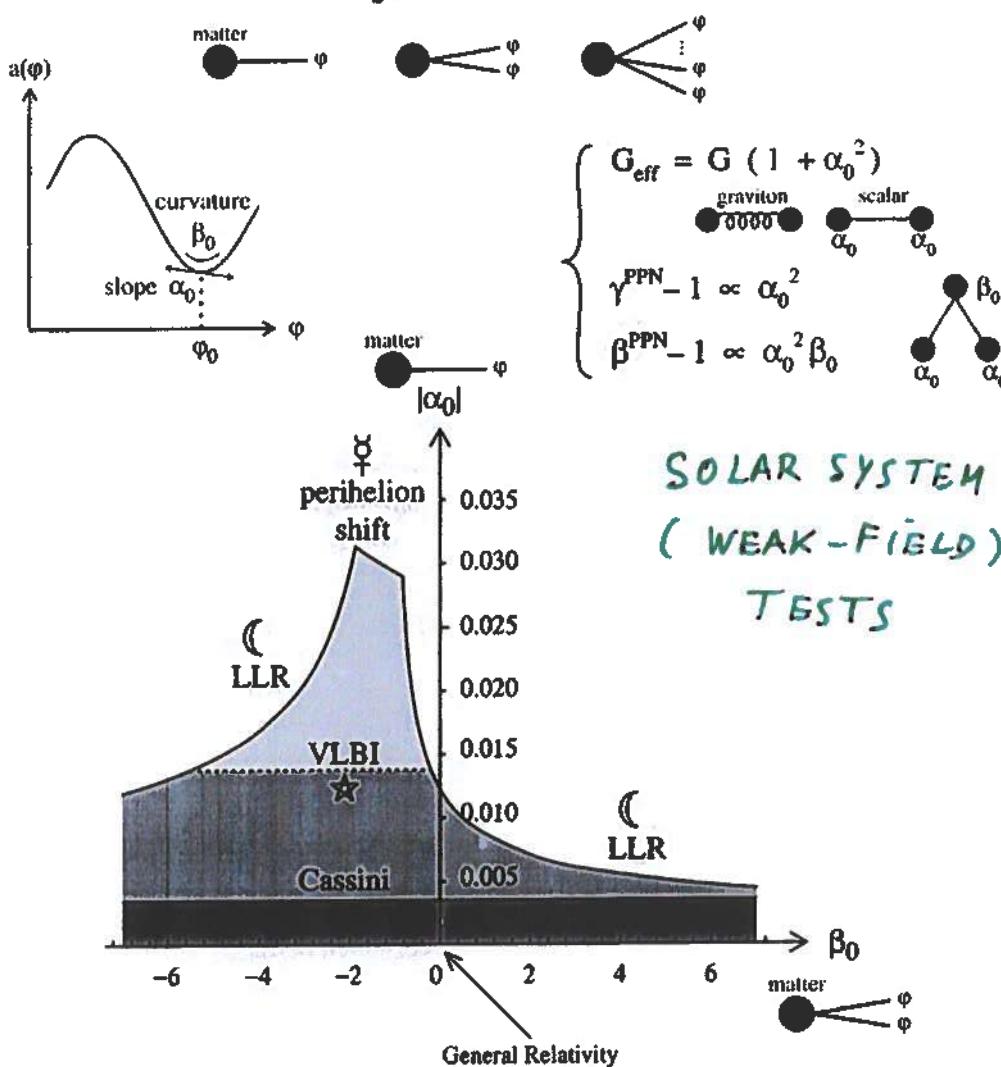


### Tensor-scalar theories

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} \left\{ R - 2(\partial_\mu \varphi)^2 \right\} + S_{\text{matter}} \left[ \text{matter}; \tilde{g}_{\mu\nu} \equiv e^{2a(\varphi)} g_{\mu\nu} \right]$$

↑ spin 2      ↑ spin 0      ↑ physical metric

$$a(\varphi) = \alpha_0 (\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2} \beta_0 (\varphi - \varphi_0)^2 + \dots$$

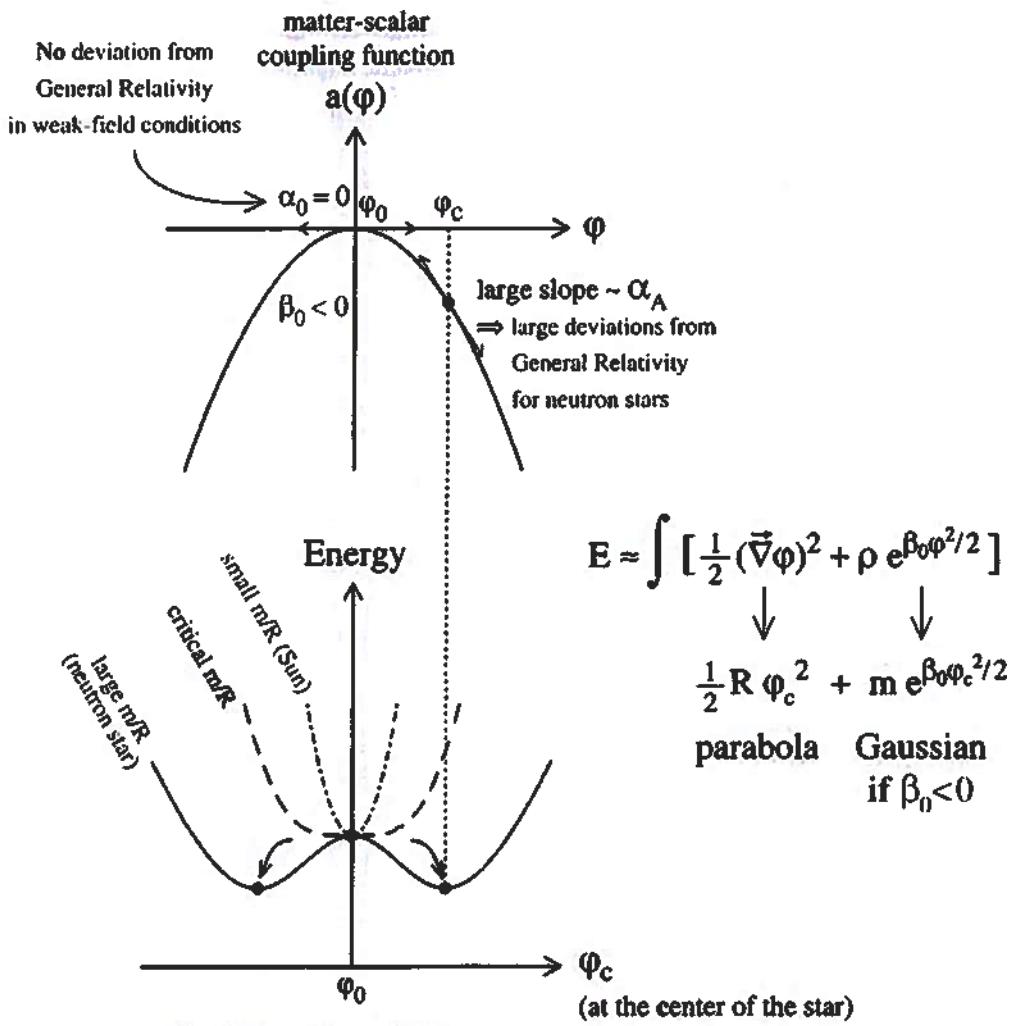


**SOLAR SYSTEM  
(WEAK-FIELD)  
TESTS**

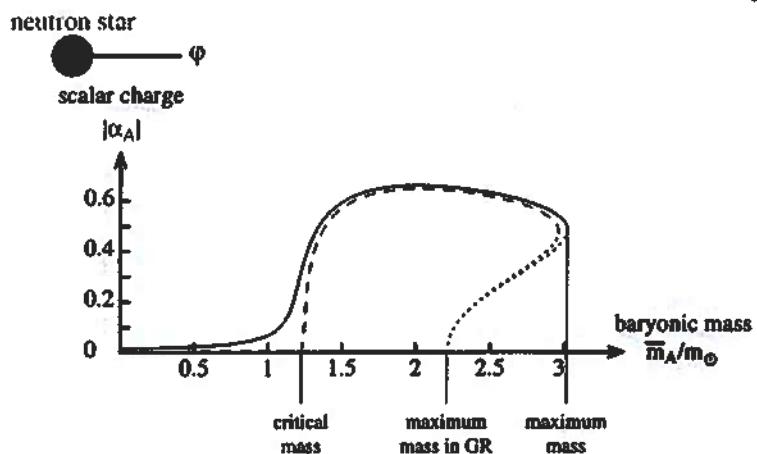
Vertical axis ( $\beta_0 = 0$ ): Jordan-Fierz-Brans-Dicke theory  $\alpha_0^2 = \frac{1}{2 \omega_{BD} + 3}$

# NON-PERTURBATIVE STRONG-FIELD EFFECTS

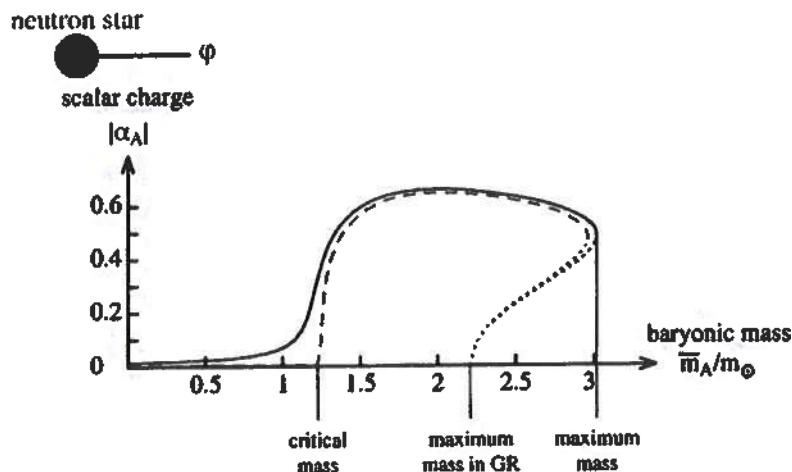
T12



"spontaneous scalarization" [T. Damour & G.E. Farhi, 1993]

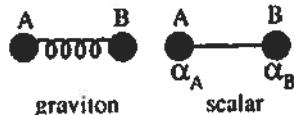


### Strong-field effects

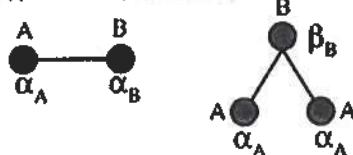


$$G_{AB}^{\text{eff}} = G (1 + \alpha_A \alpha_B)$$

depends on internal  
structure of bodies A & B



similarly for  $(\gamma^{\text{PPN}} - 1)$  and  $(\beta^{\text{PPN}} - 1) \Rightarrow$  all post-Newtonian effects



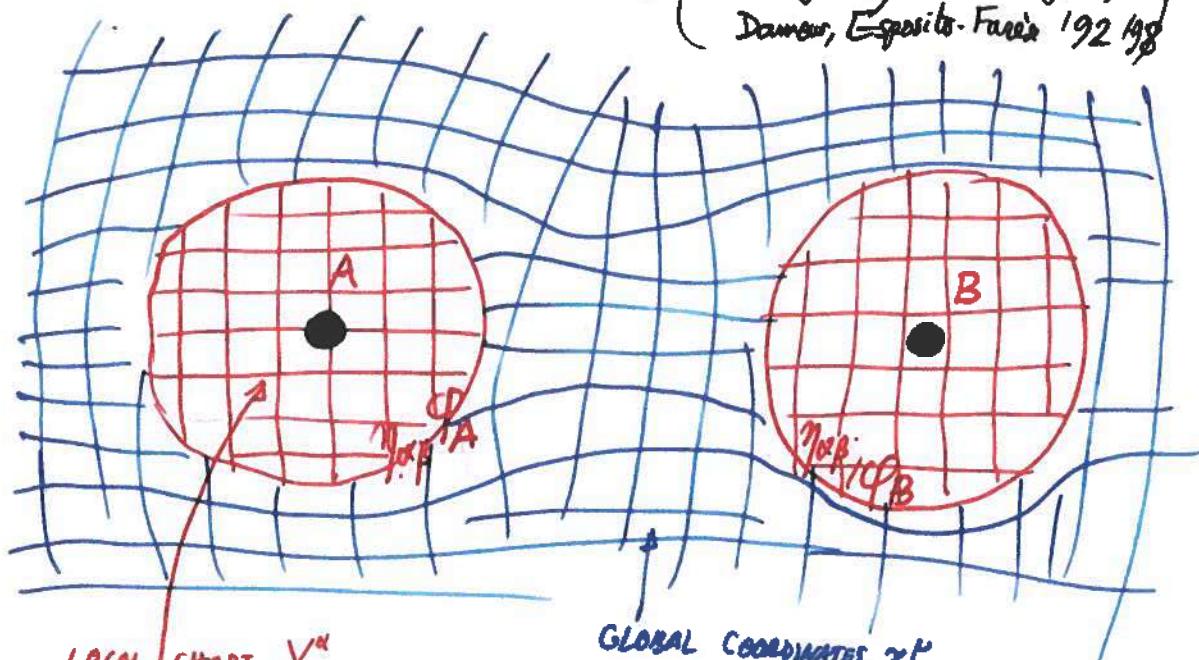
$$\text{Energy flux} = \frac{\text{Quadrupole}}{c^5} + O\left(\frac{1}{c^7}\right) \quad \text{spin 2}$$

$$+ \frac{\text{Monopole}}{c} \left(0 + \frac{1}{c^2}\right)^2 + \frac{\text{Dipole}}{c^3} + \frac{\text{Quadrupole}}{c^5} + O\left(\frac{1}{c^7}\right) \quad \text{spin 0}$$

$\uparrow$   
 $\propto (\alpha_A - \alpha_B)^2$

# MOTION AND RADIATION OF COMPACT 4.7 BODIES IN TENSOR-SCALAR THEORIES

GENERALIZE THE SIMPLIFIED 'POINT-PARTICLE' APPROACH, MODIFIED BY  
MAIN EXPECTED EFFECT OF MATCHING (Eardley '75, Will Eardley '77,  
Damour, Esposito-Farese '92 '98)



$$G_{\alpha\beta}^*(X_A^a) = G_{\alpha\beta}^{(0)} \xrightarrow{\text{LOCATED}} \lim_{(X_A^a) \rightarrow \infty} G_{\alpha\beta}^{(0)} = \gamma_{\alpha\beta}$$

$$\Phi(X) = \Phi^{(0)}(X) + \dots$$

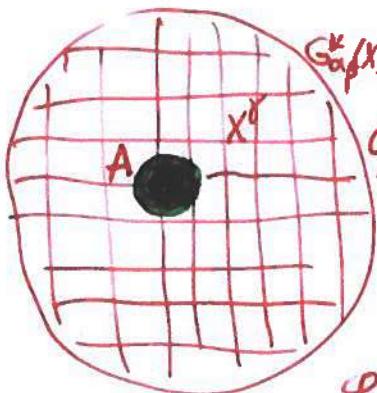
$$\downarrow \text{with } \lim_{|X| \rightarrow \infty} \Phi^{(\text{ISOL})}(X) = \Phi_A \approx \Phi_0 + \text{EFFECT OF COMPANION}$$

$$S = - \sum_a c \int m_a (\Phi_a = \tilde{\Phi}(z_a)) \sqrt{-\bar{g}_{\mu\nu}(z_a^i) dz_a^\mu dz_a^\nu} + \frac{c^4}{16\pi G} \int_C d^4 z \bar{g}_{\mu\nu} [R_g - 2\bar{g}_{\mu\nu}\bar{\varphi}_{;\mu}^{\;\nu}]$$

ONE MUST DETERMINE THE EFFECTIVE  
STRONG-SELF-GRAVITY  $\varphi$ -DEPENDENT 'MASS'  $m_a(\varphi_a)$

BY SOLVING THE STRUCTURE OF ISOLATED NEUTRON STARS IN TENSOR-SCALAR GRAVITY

# NEUTRON STARS IN TENSOR-SCALAR GRAVITY 4.8



NEED TO SOLVE THE EXACT,  
FULLY NON-LINEAR FIELD EQUATIONS

$$R_{\alpha\beta}(G^*) = 2\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi + \frac{8\pi G_*}{c^4} \left( T_{\alpha\beta}^{**} - \frac{1}{2} T G_{\alpha\beta}^{**} \right)$$

$$G_*^{\alpha\beta} \nabla_\alpha\nabla_\beta \varphi = -\frac{4\pi G_*}{c^4} \alpha(\varphi) T^{**}$$

$\varphi$ -DEPENDENT COUPLING STRENGTH

$$\alpha(\varphi) \equiv \frac{\partial \alpha(\varphi)}{\partial \varphi}$$

NUMERICALLY DETERMINING

TOTAL  
MASS-ENERGY  
(IN EINSTEIN UNITS)  
OF NS SPACETIME  
(INCLUDING ALL STRONG-SELF-GRAVITY  
EFFECTS, AND ENERGY IN  $(\nabla\varphi)^2$ ...)

$$m_A = m_A(\varphi_A)$$

EFFECTIVE  
COUPLING STRENGTH  
OF  $\varphi$  TO NS

$$\alpha_A \equiv \frac{\partial \ln m_A(\varphi_A)}{\partial \varphi_A}$$

$$\beta_A \equiv \frac{\partial \alpha_A}{\partial \varphi_A}$$

INERTIA  
MOMENT  
(IN EINSTEIN UNITS)  
(SLOW ROTATION)

$$I_A \equiv J_A/\Omega = I_A(\varphi_A)$$

$$k_A \equiv -\frac{\partial \ln I_A}{\partial \varphi_A}$$

# THEORETICAL PREDICTIONS FOR MOTION AND RADIATION OF COMPACT BINARIES IN TENSOR-SCALAR GRAVITY

(Damour-Esposito-Farése 1992)

SOLVE

$$S = - \sum_a c \int m_a (\phi_a = \tilde{\phi}(z_a)) \sqrt{-g_{\mu\nu}^2(z)} dz^\mu dz^\nu + \frac{c^4}{160G_0} \int \frac{dz}{c} \sqrt{g_{00}} [R_x - 2g_{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi]$$

TOTAL MASS-ENERGY

CONTAINS STRONG SCLR GRAVITY

MOTION

$$L = - \sum_A m_A (\phi_A) c^2 \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}} + L^{2\text{-body}} + L^{3\text{-body}}$$

$$L^{2\text{-body}} = G_{AB} \frac{\alpha_A \alpha_B}{r_{AB}} \left[ 1 + \frac{3(v_A^2 + v_B^2)}{2c^2} - \frac{7}{2c^2} (\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B) - \frac{1}{2c^2} (m_A v_A)(m_B v_B) + \bar{\gamma}_{AB} \left( \frac{\vec{v}_A - \vec{v}_B}{c^2} \right)^2 \right]$$

$$L^{3\text{-body}} = -\frac{1}{2} \sum_{B \neq A \neq C} \frac{G_{AB} G_{AC} \alpha_A \alpha_B \alpha_C}{r_{AB} r_{AC} c^2} [1 + 2 \bar{\beta}_{BC}^A]$$

EFFECTIVE NEUTON'S CONSTANT

$$G_{AB} = G_* [1 + \alpha_A \alpha_B]$$

EFFECTIVE  $\bar{\gamma} = \gamma_{\text{PL}-1}$

$$\bar{\gamma}_{AB} = -2 \frac{\alpha_A \alpha_B}{1 + \alpha_A \alpha_B}$$

EFFECTIVE  $\bar{\beta} = \beta_{\text{PL}-1}$

$$\bar{\beta}_{BC}^A = \pm \frac{1}{2} \frac{\alpha_B \beta_A \alpha_C}{[1 + \alpha_A \alpha_B][1 + \alpha_A \alpha_C]}$$

ASSUMING FOR SIMPLICITY  
 $\alpha(\phi_0) = 0$ ,  
 IF NOT  
 NEED TO  
 RE SCALE  
 UNITS BY  
 $\alpha(\phi_0)$

STRONG-FIELD EFFECTS CONTAINED IN  $G_{AB} \neq G_*$ ,  $\bar{\gamma}_{AB} \neq \bar{\gamma}$ ,  $\bar{\beta}_{BC}^A \neq \bar{\beta}$

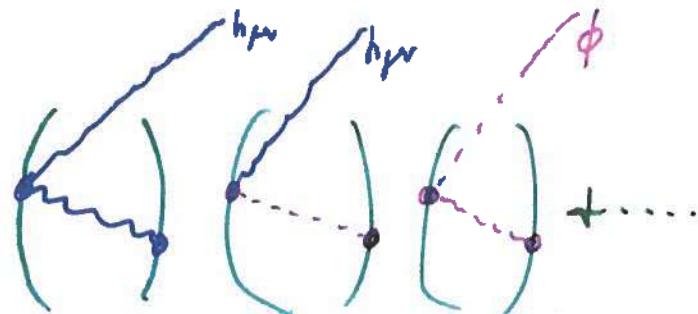
## 4.10

### THEORETICAL PREDICTIONS FOR RADIATION AND

### TIMING OF COMPACT BINARIES IN TENSOR-SCALAR

GRAVITY

RADIATION



CANNOT DO EASILY THE FULL  $v_{1/2}^3 v_{4/4}^6 v_{5/5}^5 \rightarrow$   
MORE HEURISTICALLY

$$\text{ENERGY FLUX AT } \infty: F = F_{\phi}^{\text{Monopole}} + F_{\phi}^{\text{Dipole}} + F_{\phi}^{\text{Quadrupole}} + F_h^{\text{Quadrupole}}$$

$\sim \frac{v^5}{c^5} f(\alpha_A \alpha_B \beta_0)$   
  $\sim \frac{v^3}{c^3} (\alpha_A - \alpha_B)^2$   
  $\sim \frac{v^5}{c^5} f(\alpha_A \alpha_B \epsilon_0)$   
 GR RESULT BUT  
 $G_N \rightarrow G_{AB}$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \dot{P}_b &= - \frac{2\pi v}{1 + \alpha_A \alpha_B} \frac{G_{AB} M \eta}{c^3} \frac{1 + e^{3/2}}{(1 - e^2)^{5/2}} (\alpha_A - \alpha_B)^2 \\
 &\quad - \frac{192\pi v}{5(1 + \alpha_A \alpha_B)} \left( \frac{G_{AB} M \eta}{c^3} \right)^{5/3} \frac{1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4}{(1 - e^2)^{7/2}} \\
 &\quad - \text{SEVERAL OTHER TERMS} \propto \left( \frac{G_{AB} M \eta}{c^3} \right)^{5/3} \dots
 \end{aligned}$$

# 4.12

## TIMING FORMULA IN TENSOR-SCALAR GRAVITY

- THE UNIVERSAL DD TIMING FORMULA HOLDS UNCHANGED

$$T_{\text{ARRIVAL}} = T + \Delta_R(T) + \Delta_E(T) + \Delta_J(T) + \Delta_A(T)$$

$$= F [T; P_b, T_0, e_0, \omega_0, x_0; k, \gamma, \dot{P}_b, r, s, \delta_B, \dot{e}, \dot{z}]$$

$\Rightarrow$  PHENOMENOLOGICAL ANALYSIS (PPK FORMALISM)  
AND PHENOM. TESTS CAN BE DONE INDEPENDENTLY OF THY

- BUT THE THEORETICAL PREDICTIONS

$$P_{\text{PK}}^{\text{OBS}} = f^{\text{THEORY}}(p_k; m_A, m_B)$$

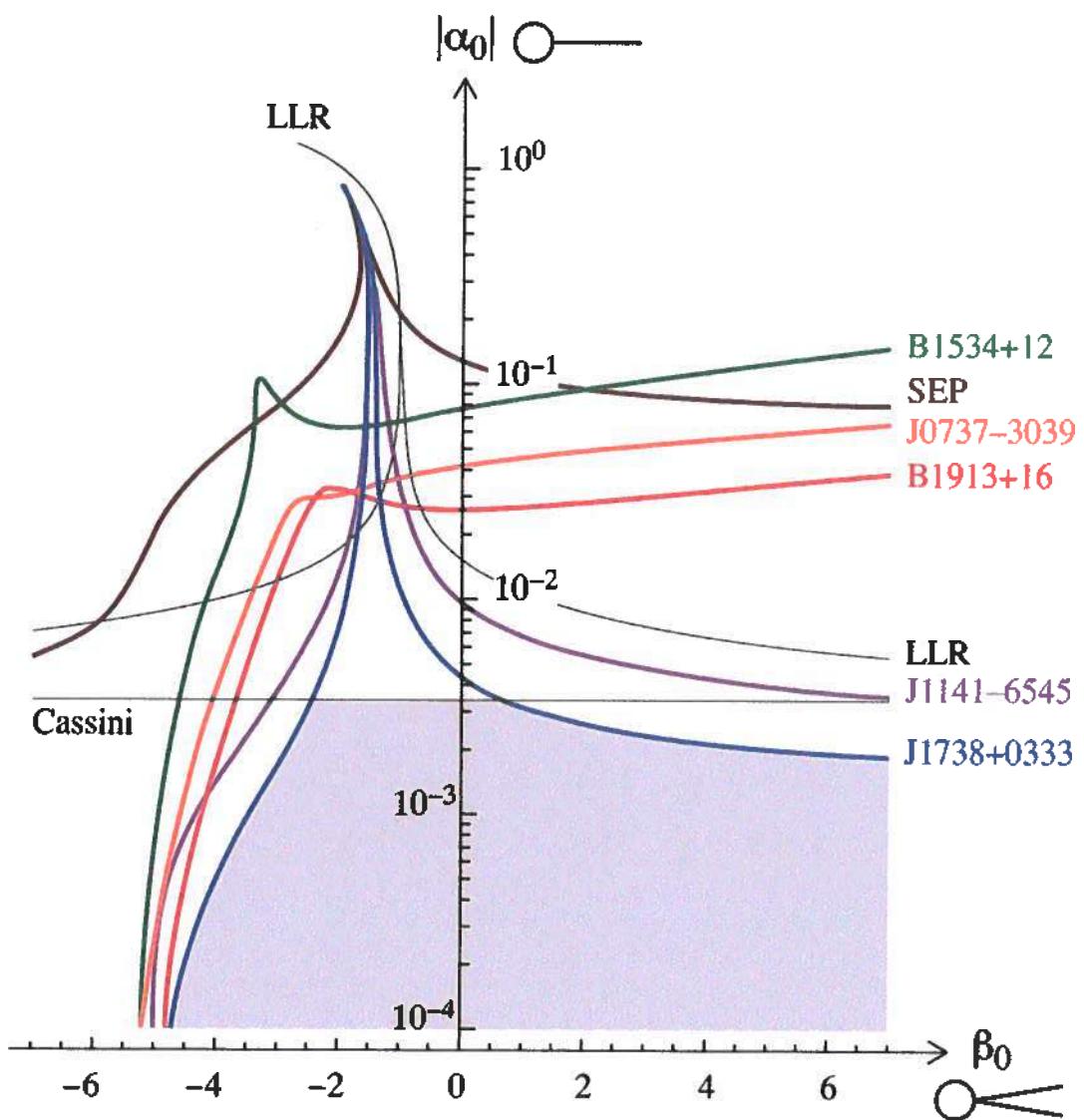
GET MODIFIED, NOTABLY BY SELF-GRAVITY EFFECTS

$$k^{\text{TH}} = \frac{\langle \dot{\omega} \rangle}{n} = \frac{3}{1-e^2} \left( \frac{G_{AB} M n}{c^3} \right)^{2/3} \left[ \frac{1 - \frac{1}{3} \alpha_A \alpha_B}{1 + \alpha_A \alpha_B} - \frac{x_A \beta_B \alpha_A^2 + x_B \beta_A \alpha_B^2}{6(1 + \alpha_A \alpha_B)^2} \right]$$

$$\gamma^{\text{TH}} = \frac{e}{m} \frac{x_B}{1 + \alpha_A \alpha_B} \left( \frac{G_{AB} M n}{c^3} \right)^{2/3} \left[ x_B (1 + \alpha_A \alpha_B) + 1 + k_A \alpha_B \right]$$

$$\dot{P}_b^{\text{TH}} = - \frac{2\pi x_A x_B}{1 + \alpha_A \alpha_B} \left( \frac{G_{AB} M n}{c^3} \right)^{5/3} \frac{1 + e^2/2}{(1 - e^2)^{5/2}} \left( \alpha_A - \alpha_B \right)^2 - x_A x_B \left( \frac{G_{AB} M n}{c^3} \right)^{5/3} \dots$$

...



## RÉSULTATS EXPÉIMENTAUX

$$\left[ \frac{\dot{P}_b^{\text{obs}} - \dot{P}_b^{\text{gal}}}{\dot{P}_b^{\text{GR}}[k^{\text{obs}}, \gamma_{\text{timing}}^{\text{obs}}]} \right]_{1913+16} = 0.997 \pm 0.002.$$

$$\left[ \frac{s^{\text{obs}}}{s^{\text{GR}}[k^{\text{obs}}, \gamma_{\text{timing}}^{\text{obs}}]} \right]_{1534+12} = 1.000 \pm 0.007.$$

$$\left[ \frac{\dot{P}_b^{\text{obs}}}{\dot{P}_b^{\text{GR}}[k^{\text{obs}}, R^{\text{obs}}]} \right]_{0737-3039} = 1.000 \pm 0.001.$$

$$\left[ \frac{s^{\text{obs}}}{s^{\text{GR}}[k^{\text{obs}}, R^{\text{obs}}]} \right]_{0737-3039} = 1.0000 \pm 0.0005.$$

$$\left[ \dot{P}_b^{\text{obs}} - \dot{P}_b^{\text{gal}} - \dot{P}_b^{\text{GR}} \right]_{1738+0333} = (2.0 \pm 3.7) \times 10^{-15}.$$

En outre :

- tests du principe d'équivalence fort (“Effet Stark”) dans plusieurs systèmes.
- détection de l'effet de couplage spin-orbite à travers les changements de profil des pulses.

## CONCLUSIONS GÉNÉRALES

- Tous les tests expérimentaux actuels sont compatibles avec les prédictions de la théorie de la relativité générale.
- L'universalité du couplage entre matière et gravité a été vérifiée au niveau  $10^{-13}$ .
- Les expériences dans le système solaire ont testé les prédictions en champ faible de la théorie d'Einstein au niveau  $10^{-4}$  (et même au niveau  $2 \times 10^{-5}$  pour le paramètre post-einsteinien  $\bar{\gamma} := \gamma - 1$ ).
- Les propriétés de propagation de la gravitation relativiste, ainsi que plusieurs de ses aspects de champ fort, ont été vérifiées au niveau  $10^{-3}$  dans plusieurs observations de pulsars binaires.
- De récentes expériences de laboratoire ont mis de fortes contraintes sur les modifications de la gravitation au niveau sous-millimétrique.
- Des confirmations quantitatives de la relativité générale ont aussi été obtenues sur des échelles astrophysiques et cosmologiques (en supposant l'existence de matière noire et d'une constante cosmologique).