Une introduction très rapide à la théorie de la $\mathbb{A}^1$-homotopie stable (RéGA 12/10/11)

$\boxed{\text{S. Kelly}}$

La catégorie d'homotopie stable

$$SH(k) \text{ ``}=\text{''} \frac{Sm/k}{\left\{\begin{array}{l} X \times \mathbb{A}^1 \to X \text{ iso} \\ - \times \mathbb{P}^1 \text{ inversible} \end{array}\right\}} \begin{array}{l} \text{homot.} \\ \text{stable} \end{array}$$

- Survol des propriétés de $SH(k)$

- H_{top} $\quad \dfrac{Top}{I \times X \to X \text{ iso}}$ $\quad I = [0,1] \subset \mathbb{R}$

SH_{top} $\quad \dfrac{Top}{\begin{array}{l} I \times X \to X \text{ iso} \\ - \times S^1 \text{ inversible}\end{array}}$ $\quad S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$

$H_\bullet(k)$

$SH(k)$

Quelques propriétés :

1) $\Sigma^\infty(\cdot)_+ : Sm/k \to SH(k)$

2) $(X \times \mathbb{A}^1 \to X)$ sont iso $\quad \hom(E,F) \in Ab$

3) $SH(k)$ est triangulée $\quad \oplus$ $\quad [1]$ analogue du décalage pour les complexes

triangles distingués $\quad X \to Y \to Z \to X[1]$

(analogues des suites exactes courtes)

terminal $\quad \wedge$

monoïdale $\quad 1$

4) $\wedge \mathbb{P}^1$ est inversible

5) Pour chaque carré cartésien

$$\begin{tikzcd} U \times_X V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d, "\text{ét}"] \\ U \arrow[r, "\text{Zariski}"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} p^{-1}(X \setminus U) \arrow[d, "s"] \\ X \setminus U \end{tikzcd}$$

(Mayer-Vietoris)

$$U \times_X V \to U \oplus V \to X \to U \times_X V[1]$$

6) $i : Z \to X$ immersion fermée régulière

Z, X lisses $\quad p : X_Z \to X$ éclatement

$$p^{-1}Z \to Z \oplus X_Z \to X \to p^{-1}Z[1]$$

7) N fibré normal

$$Th(N) = N / N \setminus Z \qquad \begin{tikzcd} N \arrow[d] \\ Z \arrow[u, bend right, dashed, "s"'] \end{tikzcd}$$

$$X \setminus Z \to X \to Th(N) \to (X \setminus Z)[1]$$

(Thom)

8) $H_{\mathbb{Z}}$, $BGL \in SH(k)$

$$\hom_{SH(k)}\left(X, H_{\mathbb{Z}} \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge i} \wedge (\mathbb{G}_m)^{\wedge j}\right) \cong CH^q(X, n)$$

quasi projectifs

groupes de Chow supérieurs (Bloch)

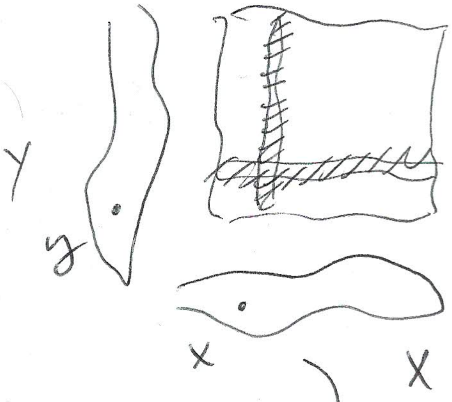
$$\hom_{SH(k)}\left(X, BGL \wedge (\mathbb{P}^1) \wedge (\mathbb{G}_m)^{\wedge j}\right) \cong K_n(X)$$

X lisse

la K-théorie algébrique de Thomason

Catégorie d'homotopie classique

$Top_\bullet$: espaces top. pointés



ob: $Top_\bullet \rightleftarrows Top : (-)_+$

$(X \amalg pt, pt) \longleftarrow X$

$$(X, x) \wedge (Y, y) = \left(\frac{X \times Y}{x \times Y \amalg X \times y}, (x, y) \right)$$

$(X, x) \wedge I_+$

<u>Déf.</u> homotopie $f, g : (X, x) \to (Y, y)$

$$h : (X, x) \wedge I_+ \to (Y, y)$$

$$h(-, 0) = f$$

$$h(-, 1) = g$$

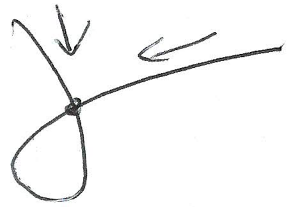
C'est une relation d'équivalence

$$\hom_{H.top}(\cdot, \cdot) = \hom_{Top.}(\cdot, \cdot)/\sim$$

i) $I^n / \partial I^n \cong S^n$

ii) $\underbrace{S^1 \wedge \ldots \wedge S^1}_{n \text{ copies}} \cong S^n$

iii) $\mathbb{A}^1(\mathbb{R}) / \{0, 1\} \cong S^1$



iv) $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = S^2$

v) $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong S^1$

vi) $\mathbb{G}_m(\mathbb{C}) \simeq S^1$

vii) $\mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$

viii) $\mathbb{A}^n(\mathbb{C}) \setminus \{0\} \simeq S^{2n-1}$

ix) $$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| < 1\} \big/ S^n \cong S^{n+1}$$

x) $$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \big/ \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \simeq S^n$$

Remarque

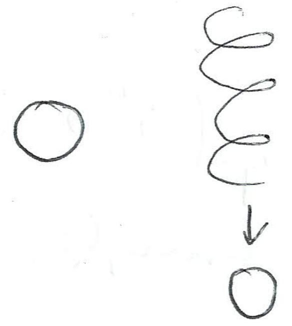
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Top}_\bullet \arrow[r, "L"] \arrow[d] & \mathcal{C} \\ H_\bullet\mathrm{top} \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

$L : \mathrm{Top}_\bullet \to \mathcal{C}$ tel que $\overbrace{(X \times I_+ \to X)}^{\in S}$ inversibles

$$H_\bullet\mathrm{top} \cong \mathrm{Top}_\bullet[S^{-1}]$$

Def. $\pi_i(X, x) := \hom_{H.\mathrm{top}}(S^i, (X, x))$

Ex: $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$



$$\pi_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & i < n \end{cases}$$

Théorème (Serre) les groupes $\pi_i(S^n)$ sont finis sauf $\pi_n(S^n)$ et $\pi_{4n-1}(S^{2n})$.

Ex: $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}/2$

Prop. $\forall n$, G (abélien si $n>1$)

$\exists\ (X,x)$ tq. $\pi_i(X,x) = \begin{cases} G & i=n \\ 0 & i\neq n \end{cases}$

Thm (Whitehead)

$(X,x) \xrightarrow{f} (Y,y)$ est iso dans $H_{\bullet,\mathrm{top}}$

$\Longleftrightarrow$ $\pi_i(f)$ est iso $\forall i$

$\hom_{H_{\bullet,\mathrm{top}}}((Y,y),(X,x)) = H^n(Y,G)$

↳ comme dans la prop.

Catégorie stable

SH_{top} (Freudenthal)

Pour $n \gg 0$, les groupes $\pi_{n+q}(S^n)$ sont simples.

Remarque :

$\hom(S^{n+q}, S^n) \cong \hom((S^1)^{\wedge n+q}, (S^1)^{\wedge n})$

Le système est $\wedge S^1$, donc c'est naturel de vouloir l'inverser.

<u>Déf.</u> Un spectre est une suite

$$(E_0, E_1, \ldots\ldots)$$

d'espaces topologiques pointés avec des morphismes $S^1 \wedge E_i \to E_{i+1}$

$$\pi_n(E_\bullet) := \operatorname{colim} \pi_{n+i} E_i$$

On obtient l'homotopie stable.

<u>Exemples</u>

① $E \in \mathrm{Top}_\bullet$.

$$\Sigma^\infty E := (E, S^1 \wedge E, S^2 \wedge E, \ldots\ldots)$$

$$\mathrm{Top}_\bullet \longrightarrow Sp_{S^1}(\mathrm{Top}_\bullet)$$

② $\pi_n(U) = \begin{cases} 0 & n \text{ pair} \\ \mathbb{Z} & \text{impair} \end{cases} \quad n>0$

$$E = (U, S^1 \wedge U, U, S^1 \wedge U, U, \ldots)$$

$$\pi_i(E) = \begin{cases} 0 & \text{pair} \\ \mathbb{Z} & \text{impair} \end{cases}$$

avec des groupes d'homot. négatifs

$$WE = \{E \xrightarrow{f} F \text{ tq. } \pi_i(f) \text{ iso } \forall i\}$$

<u>Déf</u>

$$SH_{top} = Sp_{S^1}(\mathrm{Top}_\bullet)[WE^{-1}]$$

$\Sigma^\infty(\cdot) : Top \to SH_{top}$ $\quad E \in SH_{top}$

$h^n_E(X) := \hom_{SH_{top}}(\Sigma^\infty X, E \wedge S^n)$

$SH_{top} \to \{$ théories de cohomologie $\}$

(Brown) C'est une équivalence

<u>Catégorie de $\mathbb{A}^1$-homotopie</u>

<u>Problèmes</u>

1) Sm/k n'a <u>pas assez</u> de colimites

$X \wedge Y \qquad \mathbb{A}^2/\mathbb{A}^1$

2) $Z \hookrightarrow X \quad \overset{\sim}{\sim} \quad \mathbb{A}^e \hookrightarrow \mathbb{A}^d$ n'est pas
<u>immersion</u> loc.   nul dans la cat.
<u>régulière</u>   de variétés (pour faire l'espace de Thom)

3) très difficile de savoir si $\mathcal{C}[S^{-1}]$ existe.

<u>Solution</u>: Remplacer Sm/k par $\Delta^{op} Sh_{Nis}(Sm/k)$

<u>Yoneda</u> : $Sm/k \longrightarrow PSh(Sm/k)$

$X \longmapsto \hom_{Sm/k}(\cdot, X)$

complétion d'une catégorie par ajout de colimites

$$\begin{array}{ccc} U \times_X V & \to & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \to & X \end{array}$$

n'est pas nécessaire que ceci donne un ...

<u>Faisceaux de Nisnevich</u>

F : préfaisceau t.q. $F(\emptyset) = pt$

$$\forall \quad \begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow \text{étale} \\ U & \xrightarrow[\text{Zariski}]{} & X \end{array} \qquad \begin{array}{c} p^{-1}(X \setminus U) \\ \downarrow \\ X \setminus U \end{array}$$

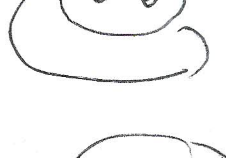
$$F(X) = \{ (s,t) \in F(U) \times F(V) \mid s_1 = t_1 \}$$

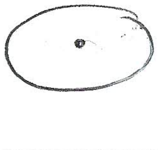
$\{U \to X, V \to X\}$ engendrent une topologie de Grothendieck :

$$Sh_{Zar} \supset Sh_{Nis} \supset Sh_{ét}$$

<u>Ex</u> :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0,1\} \\ & & \downarrow t \mapsto t^2 \\ \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \end{array}$$





$k \quad \sqrt{a} \notin k$

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{A}^1_{k(\sqrt{a})} - \{(T-\sqrt{a})\} \\ & & \downarrow \\ \mathbb{A}^1_k - \{(T^2-a)\} & \longrightarrow & \mathbb{A}^1_k \end{array}$$

dim coh Nis X = dim X

1) cohomologie d'un point = banale.

2) localement pour Nisnevich on a $Z \hookrightarrow X$

$\mathbb{A}^e \hookrightarrow \mathbb{A}^d$

Ensembles <u>simpliciaux</u>

$\Delta^{op} Sh_{Nis}(Sm/k)$ faisceaux de Nis à valeurs dans $\Delta^{op} Ens$ ($\sim$ Top)

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{op} Ens & \longrightarrow & \Delta^{op} Sh_{Nis}(Sm/k) \nwarrow \\ \uparrow & & Sh_{Nis}(k) \\ Ens & & \end{array}$$

$$Sm/k \longrightarrow \Delta^{op} Sh_{Nis}(Sm/k) \longleftarrow \Delta^{op} Ens$$

$H(k) := \Delta^{op} Sh_{Nis}(k)[S^{-1}]$

où S est une classe bien choisie qui contient les WE de Top et $X \times \mathbb{A}^1 \to X$.

$$SH(k) := \left(Sp_{\mathbb{P}^1} \Delta^{op} Sh_{Nis}(k)\right)[WE_{\mathbb{A}^1}]$$

<u>Remarque</u>:

$$S^1_s = S^1 \in \Delta^{op} Ens \qquad \text{cercle simplicial}$$

$$S^1_t = (\mathbb{G}_m, 1) \qquad \text{cercle de Tate}$$

$$\mathbb{P}^1 \cong S^1_s \wedge S^1_t \quad \text{dans } H(k)$$

$$\mathbb{A}^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1}_s \wedge S^n_t$$

$$\mathbb{P}^n / \mathbb{P}^{n-1} \cong S^n_s \wedge S^n_t$$

$E \in SH(k)$

$$\hom_{SH(k)}(X, E \wedge S^p_s \wedge S^q_t) := h^{p,q}_E(X)$$