RéGA, 16 novembre 2011



# OLIVIER BENOIST. — Séparation d'espaces de modules de variétés algébriques

## I. Le problème, motivations

### a) espaces de modules

$/\mathbb{C}$ Considérons un problème de modules de variétés polarisées

$\mathcal{C} = \{$ var. alg. $/\mathbb{C}$ projectives connexes réduites munies d'un fibré en droites ample $(X, \mathcal{L})\}$

Ex: $\mathcal{C} = \{$ courbes projectives lisses de genre $\geq 2$ $\quad (C, K_C) \}$

Ex: $\mathcal{C} = \{$ hypersurfaces de degré $d$ dans $\mathbb{P}^N$ $\quad (H, \mathcal{O}(1)) \}$

Ex: $\mathcal{C} = \{$ surfaces lisses de del Pezzo de degré $K_S^2 = d$ $\quad (S, -K_S) \}$

$-K_S$ ample

Ex: $\mathcal{C} = \{$ surfaces K3 lisses ou avec au plus des points doubles rationnels + un fibré ample $L$ de degré $L^2 = d$ $\quad (S, L) \}$

$K_S = 0$

$H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$

s'il n'est pas lisse, on demande que la désing. minimale soit K3

Un espace de modules pour $\mathcal{C}$ est une variété complexe dont les points sont en bijection avec les classes d'isomorphie d'éléments de $\mathcal{C}$

Si $\mathcal{C}$ est "raisonnable" (localement fermé), il existe toujours un champs de modules $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ [orbifold].

b) <u>séparation</u>

<u>Déf.</u> On dit que $\mathcal{C}$ est <u>séparé</u> si pour tout

$$\begin{array}{ccc} (X_1, \mathcal{L}_1) & & (X_2, \mathcal{L}_2) \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 \\ U = C \setminus \{0\} \subset (C, 0) & & (C, 0) \end{array}$$

↑ courbe $C$ lisse avec un point $0$

$p_i$ projectif plat dont les fibres sont des éléments de $\mathcal{C}$

tout isomorphie $f_\eta : (X_1, \mathcal{L}_1) \xrightarrow{\sim} (X_2, \mathcal{L}_2)$

pt générique

$$\begin{tikzcd} (X_1, \mathcal{L}_1) \arrow[dr] & & (X_2, \mathcal{L}_2) \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

se prolonge en un iso

$$\begin{tikzcd} f : (X_1, \mathcal{L}_1) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr] & (X_2, \mathcal{L}_2) \arrow[d] \\ & C \end{tikzcd}$$

critère valuatif de séparation

C'est une propriété d'unicité de la limite d'une famille à 1 paramètre de variétés de $\mathcal{C}$

Rem : $\mathcal{C}$ est séparé $\iff$ le champ de modules est séparé

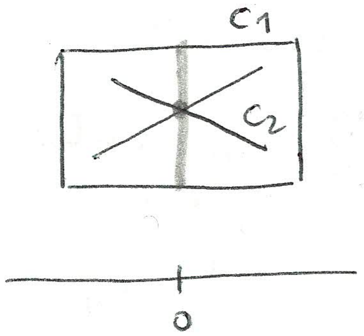
Théorème (Keel et Mori) Si $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ est séparé, il existe un espace de modules grossier $M_{\mathbb{C}}$ qui est un espace algébrique séparé.

Question : Est-ce que $M_{\mathcal{C}}$ est un schéma ? Une variété quasi-projective ?

## II Contre-exemples

a) importance de la polarisation

c-ex 1 :




$X = S \times C$

$\downarrow$ famille constante de surfaces

$C$

$X_1 = Bl_{\bar{C}_2} Bl_{C_1} X$

$X_2 = Bl_{\bar{C}_1} Bl_{C_2} X$

$id : X \longrightarrow X$ induit $f_\eta : X_1 \dashrightarrow X_2$ qui met en défaut la séparation

→ Éclater d'abord le point, puis un point dans $E$ (mais le point n'est pas le même pour $X_1$ et $X_2$)

→ Il n'y a pas de polarisations compatibles

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d] \\ \tilde{X} \arrow[ur] \arrow[d] & C \\ \tilde{C} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

c-ex 2 : $\times P$ $= X$ ; $\tilde{X} =$ $\times P$

revêtement double ramifié en $0$

famille de surfaces génériquement lisse

$X_0$ a un point double ordinaire $P$

$X$ lisse

$P$ est un point ordinaire double de l'espace total. Je l'éclate

$\tilde{X} \to \tilde{C}$ dont la fibre spéciale est

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = E$

ens. des sing. de $X_0$

Th (Artin) On peut contracter $E$ suivant

$$E \xrightarrow{p_1} \mathbb{P}^1 \quad \text{ou} \quad E \xrightarrow{p_2} \mathbb{P}^1$$

dans $\tilde{X}$. On obtient

$$\begin{tikzcd} \underset{\text{lisse}}{X_1} \arrow[r, dashed, "f_\eta"] \arrow[d] & \underset{\text{lisse}}{X_2} \arrow[d] \\ \tilde{C} & \tilde{C} \end{tikzcd}$$

$\mathrm{id} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ induit $f_\eta$ qui met en défaut la séparation

même si les fibres spéciales sont intègres !

(c-ex bien pire)

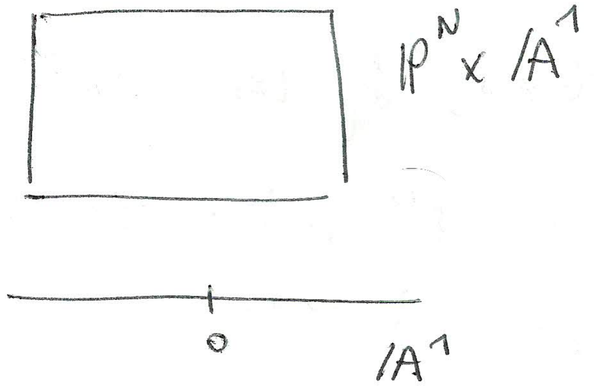
**Prop.** (Matsusaka–Mumford)

Si je suppose les variétés de $\mathcal{C}$ normales et <u>polarisées</u>, alors si $f_\eta$ se prolonge en un isomorphisme entre $U_1 \subseteq X_1$ et $U_2 \subseteq X_2$ intersectant les fibres spéciales, alors $f_\eta$ se prolonge dans un iso

$$\begin{tikzcd} (X_1, \mathcal{L}_1) \arrow[rr, "f", "\sim"'] \arrow[dr] & & (X_2, \mathcal{L}_2) \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

b) <u>rôle des singularités</u>

<u>c-ex 3</u>




$$X_1 = \{F(X_0, \dots X_N) = 0\} \quad \mathcal{O}(1)$$

$$X_2 = \{F(X_0, \dots X_{N-1}, tX_N) = 0\} \quad \mathcal{O}(1)$$

$$f_\eta : X_1 \dashrightarrow X_2$$

$$[x_0 : \dots : x_N] \mapsto [x_0 : \dots : x_{N-1} : \frac{x_N}{t}]$$

met en défaut la séparation.

Explication : il faut restreindre les singularités

En général, il est intéressant de chercher à autoriser le plus de singularités possibles

→ assez pour que l'EDM soit compact

→ suffisamment peu pour qu'il soit encore séparé

c) rôle des variétés

c-ex 4 :

$X_1 = \mathbb{P}^N \times \mathbb{A}^1$ $\qquad f_\eta : [x_0 : \dots : x_n] \mapsto [x_0 \dots x_{n-1} : t x_N]$

$X_2 = \mathbb{P}^N \times \mathbb{A}^1$

Explication : Pour $t \neq 0$, $f_t : [x_0 : \dots : x_n] \to [x_0 : \dots : t x_n]$

est un automorphisme de $\mathbb{P}^N$ qui varie en $t$

et qui dégénère quand $t \to 0$.

Ceci se produit dès qu'on autorise des

$(X, \mathcal{L})$ telles que $\dim \mathrm{Aut}(X, \mathcal{L}) > 0$.

c-ex 5 :

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, phantom, "\supseteq"] \arrow[d] & \mathbb{P}^N \times (\mathbb{A}^1 - \{0\}) \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{P}^N \times \mathbb{A}^1 - \{0\} \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[dl] & X_2 \arrow[d] \\
\mathbb{A}^1 \arrow[u, bend left, "\sigma_1"] \arrow[r, phantom, "\supseteq"] & \mathbb{A}^1 - \{0\} \arrow[u, bend left, "\sigma"] \arrow[ur, bend right, "\sigma"'] \arrow[rr, phantom, "\subseteq"] & & \mathbb{A}^1 \arrow[u, bend left, "\sigma_2"]
\end{tikzcd}$$

J'éclate dans $X_1$ : $\mathrm{Im}(\sigma_1)$

$X_2$ : $\mathrm{Im}(\sigma_2)$

En répétant le procédé, on obtient un c-ex à la séparation pour des variétés polarisées lisses sans autos.

III. Restrictions géométriques

a) variétés lisses

Th (Matsusaka-Mumford)

Si $\mathcal{C}$ est constitué de variétés lisses et non birationnellement réglées (ne sont pas bir. à $\mathbb{P}^1 \times Y$). Alors l'espace de modules est séparé.

Cor : lisses et $K \geq 0$

$\exists m$ tq. $H^0(X, K_X^{\otimes m}) \neq 0$.

$\Rightarrow$ Aut( ) fini

car sinon il y aurait une copie de $\mathbb{G}_a$ ou $\mathbb{G}_m$ qui donne des recouvrements par des courbes

b) singularités

Travaux de Kollár pour utiliser des singularités dans la théorie

# IV. Variétés de Fano

Question : C est cont[illegible] de variétés de Fano lisses sans automorphisme de dim > 0

$-K_X$ ample

en dim 1 : $\mathbb{P}^1$ a des automorphismes

en dim 2 : surfaces de del Pezzo de degré $d = K_X^2$

$1 \leq d \leq 9$ éclatements de $\mathbb{P}^2$ en $8 \geq \# pt \geq 0$

sans automorphismes pour $1 \leq d \leq 5$ ∑ de dim > 0

bir. réglés

Dans ces cas [Ishii], [Root] le pb de moduli est séparé.

en dim 3 : * parfois, non bir. réglés, donc parfois on peut appliquer M-M

* parfois, la réponse n'est pas connue

Prop. $\mathcal{C}$ = {intersections complètes lisses $\subset \mathbb{P}^N$ de codim $c$ et de degré $d_1, \ldots d_c$} Fano $\Leftrightarrow d_1 + \ldots + d_c < N+1$

le pb de mod. est séparé sauf si $c = 1$, $d_1 = 2$ QUADRIQUES